CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

Výroky, množiny, zobrazení

(1) Rozhodněte o pravdivosti a negujte výrok

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ : (z > x \Longrightarrow y < z).$$

(2) Rozhodněte, zda platí

$$[(a \Longrightarrow b) \Longrightarrow c] \iff [a \Longrightarrow (b \Longrightarrow c)],$$

kde a, b, c jsou libovolné výroky.

(3) Dokažte a nebo vyvraťte následující identitu :

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C),$$

kde A, B a C jsou libovolné množiny a $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Reálné čísla

(4) (a) Dokažte, že nulový prvek $0 \in \mathbb{R}$, jednotkový prvek 1 jsou určeny jednoznačně.
(b) Dokažte, že $\forall a \in \mathbb{R}$ existuje právě jeden inverzní prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$.
(c) Dokažte rovnost $(-1) \cdot a = -a$.

(5) Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$ vyhovující vztahům :
(a) $|x-2| - x > |x| + 2|2x-1|$;
(b) $6x - 3|1-3x| \geq 3|x+2| - 5$;
(c) $\big||x+1| - |x-1|\big| < 1$.

(6) Dokažte Větu 3.21 z přednášky.

(7) Pomocí principu matematické indukce dokažte následující :
(a) $1 + 2 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
(b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
(c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$;
(d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Spočetné množiny

(8) Nechť $\mathcal{A}$ je systém po dvou disjunktních intervalů $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R},\ \alpha < \beta$. Dokažte, že $\mathcal{A}$ je spočetnou množinou.

(9) Ukažte, že množina všech mnohočlenů $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ libovolného stupně s racionálními koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ je spočetná.

(10) (a) Ukažte, že množina algebraických reálných čísel, tj. takových čísel $x \in \mathbb{R}$ pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$, kde $a_i \in \mathbb{Q}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ je spočetná.
(b) Číslo $x \in \mathbb{R}$, které není algebraické se nazývá **transcendentní**. Pomocí (a) ukažte, že množina všech transcendentních čísel je nespočetná.

(11) *(domácí cvičení)* Buď M nekonečná spočetná množina.
(a) Ukažte, že množina všech zobrazení $f : M \to \mathbb{N}$, $\operatorname{dom} f = M$ je nespočetná.
(b) Ukažte, že množina všech zobrazení $f : M \to \mathbb{N}$, takových, že $f(M) = \mathbb{N}$, $\operatorname{dom} f = M$, f je prosté (tedy množina všech bijekcí mn. M na mn. $\mathbb{N}$) je nespočetná.

Posloupnosti

(12) Dokažte z definice limity posloupnosti, že
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$;
(b) $\lim_{n\to\infty} 2(1 + 1/n) = 2$;
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-8} = 0$.

(13) Ukažte, že posloupnost $a_n = \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ je omezená.

(14) Ukažte omezenost, resp. neomezenost následujících posloupností :
(a) $a_n = n^{\cos(\pi \cdot n)}$, $n \in \mathbb{N}$
(b) $a_n = \frac{100-n^3}{n^2-10}$, $n \in \mathbb{N}$;
(c) $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

(15) Ukažte, že následující posloupnosti jsou monotónní, počínaje jistým indexem $n \in \mathbb{N}$.
(a) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$;
(b) $a_n = \frac{3n+4}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$;
(c) $a_n = \frac{100n}{n^2+16}$, $n \in \mathbb{N}$.

(16) S použitím tzv. Bernoulliho nerovnosti (viz. Př. 1.3.24) zjistěte limity posloupností
(a) $a_n = c^n$ pro $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$;
(b) $a_n = \frac{n}{2^n}$
(c) $a_n = nq^n$, $|q| < 1$;
(d) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$;
(e) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

(17) Ukažte, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

(18) Vypočtěte následující limity :
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(3n+3)(3n-8)}{n^3-n^2+1}$;
(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$;
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$;
(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$ $(a > 0)$;
(g)(*) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 \cos n}{3n-7}$;
(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n \cos^3 n}{3n^3-7}$;
(ch) $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{4}{n})^n$;
(i) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{4n}$.

(19) Nechť $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, a nechť $a > 0$, $x_0 > 0$. Položme

$$x_{n+1} := \frac{1}{p}\big((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\big). \tag{*}$$

Dokažte, že je posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergentní a že $x_n \to \omega > 0$, a $\omega^p = a$.

Definice : Je-li $a > 0$, $p \in \mathbb{N}$ definujeme $\sqrt[p]{a} \in \mathbb{R}$ jako kladné číslo ω, pro které platí $\omega^p = a$, pro $a = 0$ definujeme $\sqrt[p]{a} := 0$. $\square$

(20) Nechť $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $a_n \to a \in \mathbb{R}$, pak $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.
(21) Posloupnost $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem : $a_1 = 0$, $a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4}$ pro $n \geq 2$. Dokažte konvergenci této rekurentně zadané posloupnosti a spočtěte její limitu.
(22) Užitím Stolzovy věty vypočítejte následující limity :
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$
(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n}$, $c > 1$.
(23) Určete limes superior a limes inferior následujících posloupností.
(a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$;
(b) $a_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$;
(c) $a_n = (-1)^n n$;
(d) $a_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$.

Číselné řady

(24) Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Poznámka: Dokonce lze ukázat, že platí :$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (viz. J.Veselý Tvrzení 11.5.14).
Věta (kondenzační kritérium, J.Veselý, Věta 3.2.31).Nechť $\langle a_n \rangle$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Potom

$$\sum a_n < +\infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty.$$

(25) S využitím kondenačního kritéria vyšetřete konvergenci řad :
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$,
(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

(26) Najděte částečný součet a součet řady : (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n + 1/3^n)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

(27) Elementárními úvahami a odhady zjistěte, zda konvergují řady :
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{100n+1}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{\pi}{2^n})$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ (e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$.

(28) Užitím Raabeova kritéria ukažte, že konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(29) Užitím podílového kritéria ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ je konvergentní.

(30) Užitím odmocninového kritéria ukažte konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^n}$.

Spojitost a limita funkcí jedné reálné proměnné

(31) Z definice limity funkce ukažte, že $\lim_{x\to a} = c$, kde $f(x) = c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$.

(32) Pomocí Heineovy věty ukažte, že neexistuje a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ a b) $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.

(33) Uvažujme funkci "celá část" : $f(x) = [x],\ x \in \mathbb{R}$, kde $[x] :=$ největší celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $n \le x$. Ukažte, že
  (a) funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
  (b) funkce f je spojitá zprava v každém bodě $a \in \mathbb{Z}$,
  (c) $\lim_{x\to a}[x]$ neexistuje kdykoliv $a \in \mathbb{Z}$.

(34) Uvažujme tzv. Dirichletovu funkci definovanou následovně :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ukažte, že
  (a) funkce f nemá v žádném bodě $x \in \overline{\mathbb{R}}$ limitu.
  (b) Funkce $g(x) = xf(x),\ x \in \mathbb{R}$ je spojitá právě v jednom bodě $a = 0$.

(35) Uvažujme tzv. Riemannovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ nesoudělná} \end{cases}$$

Ukažte, že funkce f je spojitá v bodě a právě, když $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(36) (*) Dokažte si, že každá monotónní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

(37) Dokažte, že pro libovolnou periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existuje právě když $f(x) = c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(38) Ukažte, že existuje limita : $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ a dokažte neexistenci limity : $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$.

(39) Ukažte, že $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \operatorname{sgn} a_n \cdot (+\infty)$, a $\lim_{x\to-\infty} P(x) = (-1)^n \operatorname{sgn} a_n \cdot (+\infty)$, kde $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ x \in \mathbb{R}$ je polynom $n-$tého stupně ($a_n \neq 0$).

(40) Vypočítejte limitu : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$.

(41) Dokažte, že je-li R racionální funkce s reálnými koeficienty, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $Q(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, pak platí :

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } m > 0 \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{pro } m = n \\ (+\infty)\cdot \operatorname{sgn}(\frac{a_n}{b_n}) & \text{pro } m < n. \end{cases}$$

(42) Ukažte, že $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\right] = +\infty$.

(43) Nechť $p \in \mathbb{N}$. Ukažte, že pak funkce $f(x) = \sqrt[p]{x},\ x \geq 0$ je spojitá zprava v bodě $a = 0$.

(44) Buďte $p, n \in \mathbb{N}$. Pak ukažte, že

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x} = n$, (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[p]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{p}$.

(45) Předpokládejme, že jsme již dokázali, že $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Potom dokažte, že platí

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{1=\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, b(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$.

<u>Věta.</u> Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a nechť $g(x)$ je funkce definovaná na nějakém okolí (ne prstencovém) bodu a a je v bodě a spojitá. Dále nechť platí : $f(x) = g(x)$ na nějakém prstencovém okolí bodu a. Pak existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a platí : $\lim_{x\to a} f(x) = g(a)$.

Důkaz Věta je důsledkem definice spojitosti a limity funkce v bodě. $\square$

V následujících příkladech budeme tuto větičku mnohokráte používat.

(46) Spočítejte následující limity :

(a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$,

(e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

(f) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

(g) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$,

(h) $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$,

(ch) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$,

(i) $\lim_{x\to \infty}\frac{\sin}{x}$,

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$,

(k) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

(47) *Doma.* Dokažte, že jestliže na nějakém pravém prstencovém okolí bodu platí : $f(x) < A$ a jestliže $\lim_{x\to a+} f(x) = A$, $\lim_{y\to A-} g(y) = B$, potom platí $\lim_{x\to a+}(g\circ f)(x) = B$.

(48) Vypočítejte následující limity :

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x(1-\cos x)}{x^4}$,

(b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}$,

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$,

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$,

(e) $\lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$,

(f) $\lim_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

(49) K výpočtu následujících vzorových limit využijte limitu : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ pro $a > 0$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$,
(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

(50) Spočítejte limity :
(a) $\lim_{x\to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$,
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$,

(51) *(Doma.)* Nechť $P_\delta(a)$ označuje prstencové okolí bodu a o poloměru δ. Dokažte si následující tvrzení.
Nechť $\lim_{z\to a} \psi(z) = A$. Dále nechť ke každému $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $P_\delta(A) \subset \psi[P_\eta(a)]$. Je-li $\lim_{z\to a}(f\circ\psi)(z) = B$, pak je také $\lim_{x\to A} f(x) = B$.

(52) Uvažujme tzv. *Heavisideovu funkci* $f(x)$ definovanou předpisem :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Dále položme $\psi(z) = z^2,\ z \in \mathbb{R}$. Počítejte nyní limity $\lim_{z\to 0}(f\circ\psi)(z)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ a výsledky konfrontujte s tvrzením z předchozího cvičení.

(53) <u>Výpočet limit typu $\lim u(x)^{v(x)}$</u>
(a) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$,
(b) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$,

(54) <u>Různé limity.</u>
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{4x}$,
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin x}-1}{2x}$,
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-5x)}{x}$,
(d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x+5}\right)^{x+4}$,
(e) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{4x-1}$,
(f) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arccot}(\ln(x+1))$,
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$,
(h) $\lim_{x\to 5} \frac{(-1)^{[x]}}{x-5}$.

(55) Dokažte následující tvrzení :
(a) $2x - x^2 = O(x),\ x \to 0$,
(b) $x \sin\frac{1}{x} = O(|x|),\ x \to 0$,
(c) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x),\ x \to 0,\ n \in \mathbb{N}$.

Derivace funkce-základní vlastnosti

(56) Počítejte $f'(0)$ jestliže
(a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x),\ x \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbb{R}$, (c) $f(x) = x^2$, pro $x \in \mathbb{Q}$ a $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. (d) $f(x) = |x|$.

Poznámka Funkce f z cvičení (c) má konečnou derivaci v bodě 0 a neexistuje vlastní ani nevlastní derivace $f'(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$.

(57) Užitím věty o derivaci inverzní funkce určete derivaci funkce : $f(x) = \ln x,\ x \in (0,\infty)$.

(58) Najděte derivace funkcí : $f(x) = sin\ x,\ f(x) = cos\ x$, pro $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = tg\ x,\ x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = cotg\ x,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in (0,\infty)$.

Tabulka derivací

(1) $f(x) = c,\ x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ f'(x) = 0$.
(2) $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1$.
(3) $(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}$.
(4) $(\ln|x|)' = 1/x,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
(5) $(a^x)' = a^x \ln a,\ x \in \mathbb{R},\ a \in (0,\infty)$.
(6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},\ x \in (0,\infty),\ a \in (0,1)\cup(1,\infty)$,
(7) $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,
(8) $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,
(9) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
(10) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
(11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1$,
(12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1$,
(13) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$,
(14) $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$,
(15) $(\sinh x)' = \cosh x,\ x \in \mathbb{R}$,
(16) $(\cosh x)' = \sinh x,\ x \in \mathbb{R}$,
(17) $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},\ x \in \mathbb{R}$,
(18) $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,
(19) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R};\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\};\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha < 0$.

(59) Budiž $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ komplexní funkce. Ukažte, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci právě když existují derivace $f_1'(a)$ a $f_2'(a)$. Pak platí formule $f'(a) = f_1'(a) + if_2'(a)$.

(60) Odvoďte vzorce pro derivace funkcí: $f(x) = \arcsin x,\ f(x) = \arccos x,\ f(x) = \arctan x,\ f(x) = \cosh x,\ f(x) = \sinh x$.

(61) Najděte derivace daných funkcí včetně jejich definičního oboru užitím základních vět o výpočtu derivací a s využitím tabulkových derivací :
(a) $y = \ln(x^3) + 2\ln(x^2)$,
(b) $y = x^2 \log_4 x$,
(c) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,
(d) $y = e^{x^2 \ln x}$,
(e) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$,
(f) $y = x^{x^x}$,
(g) $y = \ln \frac{x^x - 1}{x^x}$.

(62) Najděte derivace druhého řádu následujících funkcí :

(a) $y = e^{x^2}$,
(b) $\ln(\sqrt[3]{1+x^2})$,
(c) $y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$.

(63) Spočítejte $f'_-(a)$, $f'_+(a)$ a rozhodněte, zdali existuje derivace $f'(a)$!
$f(x) = |\cos x|$, $a = 1/2 \cdot k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(64) Najděte derivace a jejich definiční obory následujících funkcí (počítejte derivace bez i s použitím věty o limitě derivací) :
(a) $f(x) = x|x|$,
(b) $f(x) = |x|^3$,
(c) $f(x) = |\sin x| \sin x$,
(d) $[x] \cdot \sin^2(\pi x)$.

(65) Nechť
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \leq 1 \\ Ax + B & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$
Určete konstanty A, B tak, aby existovala derivace $f'(1)$. Řešte úlohu bez i s použitím věty o limitě derivací.

(66) Najděte derivaci funkce
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$
a zkoumejte spojitost této derivace.

Derivace parametricky zadané funkce

Věta o derivaci paramericky zadané funkce. *Předpokládejme, že máme dány dvě funkce $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in (\alpha, \beta)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $\alpha \neq \beta$. Dále nechť mají funkce φ a ψ vlastní derivace v bodě t_0, φ je prostá funkce a $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak má funkce $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ má v bodě $x_0 = \varphi(t_0)$ vlastní derivaci a platí $f'(x_0) - \frac{\psi(t_0)}{\varphi(t_0)}$.*
Důkaz. Důkaz je jednoduchým důsledkem věty o derivaci složené funkce.

(67) Najděte derivace následujících parametricky zadaných funkcí:
(a) $x = 2t - 1$, $y = t^3$, (b) $x = 1/(t+1)$, $y = (\frac{t}{t+1})^2$, (c) Vypočtěte derivaci $(\frac{dy}{dx})_{t=\pi/2}$, jestliže $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, (d) Vypočtěte derivaci $(\frac{dy}{dx})_{t=1}$, jestliže $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

Geometrický význam derivace

(68) Najděte rovnici tečny ke křivce (a) $y = x^2 - 3x - 1$, $T = [2, ?]$,
(b) $y^2 = x^3$, $T = [?, -8]$.

(69) Najděte rovnici normály ke křivce v bodě $N : xy = 4$, $N = [?, -1]$.

(70) Najděte rovnici tečny ke křivce rovnoběžné s přímkou p. Křivka je dána rovnicí $xy = 8$, a přímka p rovnicí: $2x + y - 3 = 0$.

(71) Pomocí věty o derivaci parametricky zadané funkce najděte rovnici tečny ke křivce $x^2 + y^2 = 1$ v bodě $T : [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$.

Užití diferenciálu

(72) Vyčíslete přírůstek funkční hodnoty $f(a+h) = f(a)$ funkce f a diferenciál $df(a)(h)$ a porovnejte je. Dále vyčíslete hodnoty $\omega(h) = (f(a+h) - f(a)) - df(a)(h)$ a $\frac{\omega(h)}{h}$.
(a) $f(x) = x^2 - x,\ a = 5,\ h = 2,\ h = -0.2,\ h = 0.02.$
(b) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 9,\ h = -2.9,\ h = 0.31,\ h = -0.028.$

(73) Délka periody T matematického kyvadla je dána vzorcem $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, kde l značí délku kyvadla, g gravitační zrychlení ($g \doteq 9.8ms^{-1}$). Určete přibližně užitím diferenciálu změnu Δl délky 40cm kyvadla tak, aby se perioda T změnila o $\Delta T = 0.2\ s$.

(74) Dokažte užitím diferenciálu funkce přibližný vzorec $\sin x \approx x$ pro x blízká nule.

(75) S použitím diferenciálu funkce vypočítejte přibližně hodnotu $\sin 31^0$.

Aplikace základních vět diferenciálního počtu

(76) Rozhodněte, zda funkce splňující předpoklady Rolleovy věty na intervalu $\langle a, b\rangle$. V případě, že ano, určete odpovídající hodnotu $\xi \in (a, b)$ tak, aby $f'(\xi) = 0$.
(a) $f(x) = (x+2)(x-5),\ a = -2,\ b = 5,$
(b) $f(x) = |\sin x|,\ a = -\pi,\ b = 2\pi.$

(77) Ukažte, že rovnice $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$ má právě jeden reálný kořen.

(78) Užitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě dokažte, že $\forall a, b \in (0, \infty),\ a < b$ platí

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Užití L'Hospitalova pravidla

(79) Přímé užití L'H pravidla
(1) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$
(2) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$
(3) $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\tan x - 1}{\sin 4x}$
(4) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$

(80) Vícenásobné užití L'H pravidla
(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$
(2) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\cot x}$
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
(4) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$

(81) Neurčité výrazy typu $0\cdot\infty$
(1) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$
(2) $\lim_{x\to 1}\ln(2-x)\cot\pi x$
(3) $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)\cot x$
(4) $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$

(82) Neurčité výrazy typu $\infty - \infty$
(1) $\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$
(2) $\lim_{x\to\pi/2}(\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x})$

(3) $\lim_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})$
(4) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

(83) Neurčité výrazy typu 0^0, ∞^0, 0^∞, 1^∞ k nimž vedou funkce typu $[u(x)]^{v(x)}$
(1) $\lim_{x\to 1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$
(2) $\lim_{x\to 0+} x^x$
(3) $\lim_{x\to 0+}(\ln\frac{1}{x})^x$
(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
(5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

(84) Případy, kdy nelze použít L'H pravidla
(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$
(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkcí se zjišťují postupně :
(1) Definiční obor funkce.
(2) Spojitost v bodech definičního oboru.
(3) Limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti, pokud existují.
(4) Asymptoty v bodech $+\infty$ a $-\infty$.
(5) Existenci a hodnotu oboustranné derivace, resp. jednostranných derivací.
(6) Maximální intervaly na nichž je funkce monotónní,
(7) Absolutní extrémy a lokální extrémy.
(8) Maximální intervaly na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní; inflexní body.
(9) Graf funkce.
Druhou derivaci není nutné zjišťovat, její výpočet však bude často prostředkem k vyšetření extrémů, konvexity a inflexních bodů.

Definice Řekneme, že přímka o rovnici $y=kx+q$ je asymptotou funkce f v ∞, resp. $-\infty$, jestliže $\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-q)=0$, resp. $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx-q)=0$.

Věta *Přímka o rovnici $y=kx+q$ je asymptotou v $\pm\infty$, právě když* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = k$ *a* $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=q$.

(85) Vyšetřete průběhy následujících funkcí :
(a) $f(x)=coshx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,
(b) $f(x)=sinhx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,
(c) $f(x)=\frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$,
(d) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,
(e) $f(x)==\frac{e^x}{1+x}$.

(86) **(Jensenova nerovnost).** Ukažte, že funkce definovaná na intervalu I je konvexní, jestliže splňuje obecnější Jensenovu nerovnici :

$$f(\sum_{i=0}^{p}\lambda_i x_i)\le\sum_{i=0}^{p}\lambda_i f(x_i),$$

kdykoliv $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{p} = 1$, $x_0, \dots x_p \in I$.

(87) Nechť f je reálná funkce definovaná na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. definujme tzv. **nadgraf** funkce f jako množinu $epi(f) := \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq \mu \;\; x \in I\}$. Ukažte, že funkce f je konvexní právě, když je množina $epi(f)$ konvexní. (Připomeňme, že podmnožina X v lineárním prostoru V je konvexní, jestliže s každými dvěma body $x_1, x_2 \in X$ obasahuje i celou úsečku $[x_1, x_2] := \{\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 : \alpha \in [0, 1]\}$.)

(88) Ukažte, že je-li f konvexní funkce na intervalu I, potom je množina $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ konvexní pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

(89) (a) Nechť $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, pak je funkce $0 < x \mapsto g(x) := xf(1/x)$ konvexní na intervalu $(0, \infty)$.

(b) Je-li funkce g konvexní, resp. ryze konvexní, potom je složená funkce $f(x) = e^{g(x)}$ konvexní, resp ryze konvexní.

(c) Je-li funkce g konvexní, potom je konvexní i funkce f, definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} [g(x)]^2 & \text{pro } g(x) \geq 0 \\ 0 & \text{pro } g(x) < 0. \end{cases}$$

(90) Dokažte si, že je-li $f : I \to \mathbb{R}$ konvexní funkce definovaná na intervalu I, potom je Lipschitzovsky spojitá na každém omezeném uzavřeném intervalu $[a, b] \subset I^o$, tj. existuje $L \geq 0$ tak, že

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|, \; \forall x, x' \in [a, b].$$

(91) **(existence globálního extrému).**

Definice. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že množina M je uzavřená, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset M$ platí imlikace :

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \Longrightarrow x \in M.$$

(a) Ukažte, že je-li funkce f definovaná na neprázdné uzavřené množině D spojitá, potom je pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ množina $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ uzavřená.

(b) **(Weierstrass).** Nechť funkce f definovaná na množině D jako v bodu (a) je spojitá a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ omezená. Potom existuje bod $\widehat{x} \in D$ takový, že

$$f(\widehat{x}) = \inf\{f(x) : x \in D\}.$$

Návod. Použijte Bolzano-Weierstrassovu větu, že z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Aproximace polynomy

(92) Uvažujte funkci $f(x) = \ln(1 + x)$ a najděte Maclaurinův polynom $n-$tého stupně.

(93) Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

a ukažte, že funkci f nelze libovolně přesně aproximovat Maclaurinovým mnohočlenem na libovolně malém okolí nuly.

(94) Najděte Taylorův polynom nejvýše 3. stupně funkce $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ v bodě $x_0 = \pi$.

(95) Najděte MacLaurinův polynom stupně n a odpovídající tvar zbytku pro funkci $f(x) = xe^{-x}$, $n = 3$.

(96) Vypočítejte hodnotu $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ užitím přibližné formule $e^x \doteq 1 + x$ a odhadněte chybu.

(97) S využitím Taylorova rozvoje funkce vypočítejte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

(98) Napište dané mnohočleny ve tvaru součtu mocnin výrazu $(x - x_0)$, kde

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1,\ x_0 = 2.$

b) $P(x) = x^7 + x^5 + x^3 + 1,\ x_0 = -1.$

(99) Najděte takový interval $(-\delta, \delta)$, aby platila nerovnost

$$|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})| \leq \frac{1}{1000},\ \forall x \in (-\delta, \delta).$$

(100) Dokažte, postačující podmínku existence lokálního extrému druhého řádu (tj. obsahující derivaci druhého řádu), užitím Peanovy věty.