POZNÁMKA O ZOBECNĚNÍ POJMU LIMITY

16. listopadu 2004

Naší snahou je zavést takový pojem limitního procesu, který bude zahrnovat pojmy limity posloupnosti, limity funkce (včetně jednostranné limity).

Definice 0.1 *Definice báze. Řekneme, že systém $\mathcal{B}$ podmnožin $\mathcal{B} \subset X$ množiny X se nazývá bází na množině X, jestliže platí:*

1. $\forall B \in \mathcal{B} : B \neq \varnothing$;
2. $\forall B_1 \in \mathcal{B}, \forall B_2 \in \mathcal{B},\ \exists \mathcal{B} \in \mathcal{B} : B \subset B_1 \cap B_2$

Cvičení 1: Ukažte, že $\forall B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B} \exists B \in \mathcal{B} : B \subset B_1 \cap \cdots \cap B_n$.

Cvičení 2. (Důležité).

Dokažte, že následující systémy množin tvoří báze:

- a) $n \longrightarrow \infty : = \mathcal{B} := \{B \subset \mathbb{N} : B = \{n, n+1, n+2, \ldots\}\ n \in \mathbb{N}\}, X = \mathbb{N}$;
- b) $x \longrightarrow x_0$: $= \mathcal{B} := \{U_\delta^*(x_0) \subset \mathbb{R} : \delta > 0\}$;
- c) $x \longrightarrow x_0$: $= \mathcal{B} := \{U_\delta^*(x_0) \cap M \subset \mathbb{R} : \delta > 0\}$; [1]
- d) $x \longrightarrow x_0+$: $= \mathcal{B} := \{U_\delta^{*+} \subset \mathbb{R} : \delta > 0\}$;
- e) $x \longrightarrow x_0- : = \mathcal{B} := \{U_\delta^{*-}(x_0) \subset \mathbb{R} : \delta > 0\}$;
- f) $x \longrightarrow x_0\pm$: $= \mathcal{B} := \{U_\delta^{*\pm}(x_0) \cap M \subset \mathbb{R} : \delta > 0\}$ [1]

[1]Pochopitelně zde předpokládáme, že x_0 je limitním bodem množiny M.

- g) $x \longrightarrow \infty := \mathcal{B} := \{U_\delta(\infty) \subset \mathbb{R} : U_\delta(\infty) := \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\}, \delta \in \mathbb{R}\}$;

  V případech b) až g) je $X = \mathbb{R}$.

- h) Budiž X množina všech dvojic $(\mathcal{D}, \xi)$, kde $\mathcal{D}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ je vektor význačných bodů dělení $\mathcal{D}$.

  $\mathcal{B} := \nu(\mathcal{D}) \to 0" := \{B_\delta \subset X : B_\delta$ je množina takových dvojic $(\mathcal{D}, \xi)$ pro které je $\nu(\mathcal{D}) < "\delta,\ \delta > 0\}$.

Definice limity vzhledem k bázi. Nechť $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na množině X a nechť $\mathcal{B}$ je báze na množině X. Řekneme, že číslo $L \in \mathbb{R}$ je **limitou funkce f vzhledem k bázi $\mathcal{B}$**, jestliže ke každému okolí $\mathcal{U}(L)$ čísla L existuje prvek báze $B \in \mathcal{B}$ tak, že $f[B] \subset U(L)$. Je-li tomu tak, píšeme

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = L.$$

Jinak řečeno pro funkce reálné nebo komplexní

$$(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = L) := \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\ \forall x \in B\ (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Poznámka. Náš výklad je v podstatě založen na obecnější konstrukci limity zobrazení vzhledem k filtru, jejímž autorem je francouzský matematik Henri Cartan [2]

Základní věta o výpočtu limit.
Buďte $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{R}$ dvě funkce definované na množině X a nechť $\mathcal{B}$ je báze na množině X.
Je-li pak $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = a,\ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = b$, potom

- a) $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f(x) + g(x)) = a + b$;
- b) $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f(x)g(x)) = a \cdot b$;
- c) $\lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, je-li $b \neq 0$.

[2]Viz kniha General topology od N. Bourbakiho, Springer.

<u>DŮKAZ.</u> ad a) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K tomuto ε pak existují množiny $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tak, že platí:

$$(\forall x \in B_1 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2})\&(\forall x \in B_2 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Nyní z definice báze plyne existence množiny $B \subset B_1 \cap B_2$ a pak $\forall x \in B$ máme:

$$|(f(x) + g(x)) - (a + b)| \leqq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ad b) Z předpokladu $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = a$ plyne existence množiny $B_1 \in \mathcal{B}$ tak, že $\forall x \in B_1 : |f(x)| \leqq |a|+1$. Položme nyní $K := \max(|a|+1, |b|) > 0$. Zvolíme-li pak $\varepsilon > 0$ libovolně, existují množiny $B_2, B_3 \in \mathcal{B}$ takové, že potom

$$\left(\forall x \in B_2 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2K}\right)\& \ \left(\forall x \in B_2 := |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2K}\right).$$

Z vlastností báze nyní plyne existence $B \in \mathcal{B}$, že $B \subset B_1 \cap B_2 \cap B_3$ viz Cvičení 1. $\forall x \in B$ pak platí:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - f(x)b + f(x)b - ab| \\ &\leqq |f(x)||g(x) - b| + |f(x) - a||b| \\ &\leqq K(|g(x) - b| + |f(x) - a|) \\ &< K(\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

ad c) Především pokud je $|b| \neq 0$, potom existuje $B_1 \in \mathcal{B}$ tak, že $\forall x \in B_1$:

$$|g(x)| = |b - (b - g(x)| \geqq |b| - |b - g(x))| \geqq$$

$$\geqq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Ukažme, že $\lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$. Je-li $x \in B_1$, pak máme:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - g(x)}{g(x)b}\right| = \frac{|b - g(x)|}{|g(x)||b|} \leqq \frac{2|b - g(x)|}{|b|^2}.$$

Nyní zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $B_2 \in \mathcal{B}$ tak, že $\forall x \in B_2 : |b - g(x)| < \frac{|b|^2\varepsilon}{2}$. Dále existuje $B \in \mathcal{B}$ tak, že $B \subset B_1 \cap B_2$ a tudíž: $\forall x \in B$:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| \leqq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - g(x)| < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{\mathcal{B}} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

Tvrzení c) nyní dostáváme jako zřejmý důsledek právě dokázaného a tvrzení b). □

A nyní zobecněme známou větu o limitě složené funkce:

<u>Věta o limitě složené funkce.</u>

Nechť Y je množina, B_Y je báze na $Y, g : Y \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované na Y a mající limitu vzhledem k bázi $\mathcal{B}_Y$.

Dále nechť X je množina, $\mathcal{B}_X$ je báze na X a $f : X \to Y$ je zobrazení množiny X do množiny Y s vlastností:

$$\forall B_Y \in \mathcal{B}_Y \ \exists B_X \in \mathcal{B}_X : f[B_X] \subset B_Y.$$

Potom složené zobrazení $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ je definováno a má limitu vzhledem k bázi $\mathcal{B}_X$ a

$$\lim_{\mathcal{B}_X}(g \circ f)(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y)$$

<u>Důkaz.</u> Kompozice $g \circ f$ je definována na X, neboť $f[X] \subset Y$. Předpokládejme, že $\lim\limits_{\mathcal{B}_Y} g(y) = A$ a ukažme, že pak $\lim\limits_{\mathcal{B}_X}(g \circ f)(x) = A$. Nechť tedy $\mathcal{U}(A)$ je libovolné okolí bodu A a nechť $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ je takové, že $g[B_Y] \subset \mathcal{U}(A)$. Pak podle předpokladu existuje $B_X \in \mathcal{B}_X$ tak, že $f[B_X] \subset B_Y$. Pak máme:

$$(g \circ f)[B_X] = g[f[B_X]] \subset g[B_Y] \subset \mathcal{U}(A).$$

Tímto jsme tedy ukázali, že zobrazení $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ má limitu vzhledem k filtru $\mathcal{B}_X$ rovnou číslu A. □

Ukažme příklady na použití věty o limitě kompozice dvou zobrazení.

<u>Příklady.</u> a) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

<u>Důkaz.</u> $Y := \mathbb{N}, \mathcal{B}_Y := n \to \infty$;
$X := \mathbb{R}^+, \mathcal{B}_X := x \to \infty, f : X \to Y,$

$f(x) := [x]$ (... celá část z čísla x. Ukažme, že potom jsou splněny předpoklady zmíněné věty. Zvolme tedy libovolný element $B_Y = \{n \in \mathbb{N} : n > N\}, N \in \mathbb{N}$, báze $\mathcal{B}_Y$.

Položíme-li pak $B_X := \{x \in \mathbb{R}^+ : x > N + 1\} \in \mathcal{B}_X$, potom zřejmě $f[B_X] \subset B_Y$.

Definujme funkce $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takto:

$$g_1(n) := (1 + \frac{1}{n+1})^n, g_2(n) := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Z přednášky víme, že $g_1(n)$ je rostoucí posloupností a $\lim_{\mathcal{B}_Y} g_1(n) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = e \cdot 1 = e$. (viz KI, kap. 2, př. 2. 15). Dále víme, že posloupnost $g_2(n)$ je klesající a $\lim_{\mathcal{B}_Y} g_2(n) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e$ (viz KI, kap. 2, př. 2. 16).

Nyní předpokládejme, že $x \geq 1$, pak platí (podrobně si odůvodněte!): $[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x}$; $(1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1 + \frac{1}{x})^{[x]} \leqq (1 + \frac{1}{x})^x$;

dále $1 + \frac{1}{x} \leqq 1 + \frac{1}{[x]} \Rightarrow (1 + \frac{1}{x})^x \leqq (1 + \frac{1}{[x]})^x < (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1}$.

Tedy pro $x \geq 1$ máme:

$$(1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1}.*$$

Z toho, co bylo řečeno, a z věty o limitě složené funkce nyní

$$\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]} = \lim_{\mathcal{B}_X}(g_1 \circ f)(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g_1(n) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^n = e;$$

$$\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim_{\mathcal{B}_X}(g_2 \circ f)(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g_2(n) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e.$$

Nyní z věty o limitním přechodu v nerovnosti a z $(*)$ máme

$$\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

Obdobně lze ukázat, že $\lim_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$. □

b) Heineova [3] definice limity funkce.

[3]E. Heine (1821 - 1881) - německý matematik