Derivace, l'Hospitalovo pravidlo

Definice 1. Nechť je reálná funkce f definovaná na okolí $U(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Potom řekneme, že f má *vlastní derivaci* v bodě a rovnou $A \in \mathbb{R}$, pokud

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A\,.$$

Nechť f je definovaná na pravém okolí $U_+(a)$. Potom řekneme, že f má *vlastní derivaci zprava* rovnou A, pokud

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A\,.$$

Obdobně pro *derivaci zleva*.

Geometrický význam derivace je směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě. Často se používá ve fyzice, např. derivace dráhy je okamžitá rychlost, derivace přeneseného náboje je proud, apod.

Věta 2. (výpočet derivací)
Nechť c je konstantní funkce, f, g reálné funkce, které mají v bodě a vlastní derivaci. Potom

$$\begin{aligned} c' &= 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a)\,, \\ (cf)'(a) &= cf'(a)\,, \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,. \end{aligned}$$

Je-li $g(a) \neq 0$, platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,.$$

Derivace složené funkce: Nechť f má vlastní derivaci v bodě a a g má vlastní derivaci v bodě $A = f(a)$. Potom složená funkce $g \circ f$ má vlastní derivaci v bodě a a platí

$$(g \circ f)'(a) = g'(A)f'(a) = g'(f(a))f'(a)\,.$$

Derivace inverzní funkce: Nechť f je spojitá a ryze monotónní na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a má v bodě a vlastní nenulovou derivaci. Potom inverzní funkce f^{-1} má také vlastní a nenulovou derivaci v bodě $A = f(a)$ a platí

$$\left(f^{-1}\right)'(A) = \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(A))}\,.$$

Funkce f má v bodě a derivaci (vlastní či nevlastní), právě když má v tomto bodě obě jednostranné derivace a tyto derivace jsou si rovny.

Věta 3. (l'Hospitalovo pravidlo)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$, $a \in \mathbb{R}^*$ a existuje-li

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*,$$

pak je také

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Platí také pro jednostranné limity.

Pozor, musíme vždy ověřit, že jde o limitu typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, v opačném případě nemusí rovnost platit.

1 Příklady

Příklad 4. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x^2 + 2 + 3\ln x$.

Řešení: Využijeme toho, že derivace součtu je součet derivací. Pak použijeme vztahu pro derivaci x^n, konstanty a logaritmu.

$$f'(x) = (x^2)' + 2' + (\ln x)' = 2x + 0 + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}.$$

Příklad 5. *Určete derivaci funkce* $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$.

Řešení: Derivujeme jako podíl.

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'x^2 - \sin x(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{(\cos x)x^2 - (\sin x)2x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}.$$

Příklad 6. *Určete derivaci funkce* $f(x) = 2\ln(x^2+1)$.

Řešení: Dvojku jako konstantu můžeme vytknout před derivaci. Logaritmus derivujeme jako složenou funkci. Derivace vnější funkce je $\frac{1}{x^2+1}$, derivace vnitřní funkce je $2x$.

$$f'(x) = 2\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{4x}{x^2+1}.$$

Příklad 7. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x^x$.

Řešení: Tento příklad musíme řešit trikem. Nejdříve si přepíšeme $x^x = \mathrm{e}^{\ln(x^x)} = \mathrm{e}^{x\ln x}$. Pak tuto funkci derivujeme pomocí derivace složené funkce a derivace součinu.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}\left(1\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(1+\ln x).$$

Příklad 8. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Řešení: Nejdříve si dosazením ověříme, že se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$. Poté zderivujeme čitatele i jmenovatele zvlášť.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2\,.$$

Také jsme mohli místo zkrácení výrazu $1 - \cos x$ podruhé použít l'Hospitalovo pravidlo.

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 4 a 5.

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 4