Diferenciální operátory vektorové analýzy

verze 1.1

1 Úvod

Následující text popisuje diferenciální operátory vektorové analýzy. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT1 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Skalární a vektorové pole

Funkci tří proměnných $\varphi(x,y,z)$ nazýváme skalárním polem, plochy $\varphi(x,y,z) =$ konst. nazýváme hladinami tohoto pole. Vektorovou funkci

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$$

nazveme vektorovým polem. Vektor $\mathbf{r}(x,y,z)$ nazveme polohovým vektorem. Siločárou vektorového pole nazveme křivku, jejíž tečna má v každém bodě směr tohoto pole. Derivací vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ závislého na proměnné t nazveme limitu

$$\mathbf{a}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{a}(t+h) - \mathbf{a}(t)}{h} = a_1'(t)\mathbf{e}_x + a_2'(t)\mathbf{e}_y + a_3'(t)\mathbf{e}_z\,,$$

kde $\mathbf{e}_x$ je jednotkový vektor ve směru osy x, atd.

Věta 2.1. *Pro derivaci platí následující vztahy*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'\,, \quad (k\mathbf{a})' = k\mathbf{a}'\,,$$
$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})' = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}' + \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}\,, \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})' = \mathbf{a}\times\mathbf{b}' + \mathbf{a}'\times\mathbf{b}\,.$$

Příklad 2.2. *Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, který se pohybuje po kružnici* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.

Řešení: Derivujeme po složkách

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}(t)' = (-\sin t, \cos t, 0)\,,$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}(t)' = (-\cos t, -\sin t, 0) = -\mathbf{r}(t)\,.$$

3 Gradient

Gradient skalárního pole $\varphi(x,y,z)$ je vektorové pole, pro které platí

$$\operatorname{grad}\varphi(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\,.$$

Symbolu $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial_x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial_y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial_z}$ se říká „nabla“ a uvidíme ho i u dalších vektorových operací.

Následující větu známe z diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Věta 3.1. *Přírůstek hodnoty skalárního pole φ při posunutí o malý vektor* $\mathrm{d}\mathbf{r}$ *se vypočítá jako* $\mathrm{d}\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

Z uvedené věty plyne, že gradient skalárního pole je kolmý k jeho hladině, v každém bodě má směr největšího růstu tohoto pole. Gradient se ve vztazích chová podobně jako derivace, platí pro něj následující věta.

Věta 3.2. *Pro gradient platí*

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi\,, \quad \operatorname{grad}(k\varphi) = k \operatorname{grad}\varphi\,,$$
$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi\,, \quad \operatorname{grad} f(\varphi) = f'(\varphi) \operatorname{grad}\varphi\,.$$

kde φ, ψ jsou skalární pole, f funkce a k konstanta.

Příklad 3.3. *Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| = r$.*

Řešení: Gradient vypočteme po složkách.

$$\partial_x \varphi = \partial_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}\,.$$
$$\partial_y \varphi = \frac{y}{r}\,, \quad \partial_z \varphi = \frac{z}{r}\,.$$

Tedy

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0\,.$$

Výsledkem je jednotkový vektor ve směru $\mathbf{r}$.

Příklad 3.4. *Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$.*

Řešení: Příklad vypočteme dvěma metodami. Nejdříve po složkách.

$$\partial_x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,,$$
$$\partial_y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,,$$
$$\partial_z \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,,$$
$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Druhou možností je výpočet pomocí vztahu pro gradient funkce od pole.

$$\nabla \frac{1}{r} = \nabla r^{-1} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Využili jsme tady výsledku předchozího příkladu.

Příklad 3.5. *Vypočtěte gradient skalárního pole* $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r}$*, kde* $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$ *jsou konstantní vektory.*

Řešení: Nejdříve využijeme vztahu pro gradient součinu dvou skalárních funkcí.

$$\nabla\frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r} = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\nabla[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})]\,.$$

Druhý člen si vypočteme ve složkách.

$$\begin{aligned}\partial_x[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})] = \partial_x[b_1(ya_3 - za_2) + b_2(za_1 - xa_3) + b_3(xa_2 - ya_1)] =& \\ = a_2b_3 - a_3b_2 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x\,.&\end{aligned}$$

Tím jsme dostali x-ovou složku vektorového součinu $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Pro ostatní složky je výpočet obdobný a dostáváme

$$\nabla[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})] = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\,.$$

Výsledek $\nabla\frac{1}{r}$ vezmeme z minulého příkladu. Takže nakonec máme

$$\nabla\frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r} = -\frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{r}\,.$$

4 Divergence

Divergence vektorového pole je skalární pole, pro které platí

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\,.$$

Pomocí operátoru nabla lze divergenci vektorového pole $\mathbf{a}$ popsat jako skalární součin nably s tímto polem $\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a}$. Divergence udává zřídlovost vektorového pole. Budeme-li uvažovat např. vektorové pole dané gradientem teploty, kladná divergence tohoto pole znamená, že v tomto bodě teplo vzniká, záporná divergence, že zaniká.

Věta 4.1. *Pro divergenci platí:*

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \operatorname{div}\mathbf{a} + \operatorname{div}\mathbf{b}\,,\\ \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) &= \operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{a} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{a}\,.\end{aligned}$$

Důkaz: První vztah je triviální, dokážeme si druhý.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_z) = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}a_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}a_z + \varphi\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = \nabla\varphi\cdot\mathbf{a} + \varphi\nabla\cdot\mathbf{a}\,.\end{aligned}$$

Příklad 4.2. *Vypočtěte divergenci pole* $\mathbf{r} = (x, y, z)$*.*

Řešení:

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3\,.$$

Příklad 4.3. *Vypočítejte divergenci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Řešení: Využijeme vztahu $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{a}$. S využitím minulého příkladu a jednoho z předchozích příkladů (pro výpočet $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$) dostáváme

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}\,.$$

Příklad 4.4. *Vypočtěte divergenci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Řešení:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = -3 \frac{1}{r^4} \nabla r \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = -3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^5} + \frac{3}{r^3} = 0\,.$$

Pole je tedy nezřídlové.

5 Rotace

Rotací vektorového pole $\mathbf{a}(x, y, z)$ je vektorové pole

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(x, y, z) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z\,.$$

Body, ve kterých je rotace nenulová, se označují jako víry a příslušné pole jako vírové. Pole, které má ve všech bodech nulovou rotaci, je nevírové.

Pomocí operátoru nabla rotaci zapisujeme jako $\operatorname{rot} \mathbf{a}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z)$.

Věta 5.1. *Platí*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}\,, \\ \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} \varphi\,, \\ \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}\,. \end{aligned}$$

Příklad 5.2. *Vypočtěte rotaci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$.

Řešení: Pro první složku dostáváme

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0\,.$$

Obdobně i pro další složky, tedy $\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Příklad 5.3. *Vypočtěte rotaci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Řešení: Opět vypočteme první složku.

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r} = -\frac{z}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{y}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{zy}{r^3} + \frac{zy}{r^3} = 0\,.$$

Obdobně pro ostatní složky, tedy $\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

6 Laplaceův operátor

Naposledy si představíme Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Působí na skalární pole a výsledkem je opět skalární pole. Laplaceův operátor je důležitý např. v elektřině, kvantové teorii, popisu vlnění a difuze. Pomocí operátoru nabla lze vyjádřit jako divergence gradientu

$$\begin{aligned} &\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \\ &= \left(\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \end{aligned}$$

Věta 6.1. *Pro Laplaceův operátor platí následující vztahy.*

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi+\psi) &= \Delta\varphi + \Delta\psi\,, \\ \Delta(\varphi\psi) &= \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi + 2(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\,, \\ \Delta(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \Delta\mathbf{a} + \Delta\mathbf{b}\,, \\ \Delta(k\mathbf{a}) &= k\Delta\mathbf{a} \end{aligned}$$

pro k konstantní.

Věta 6.2. *Dále platí*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi &= \Delta\varphi\,, \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}\,, \\ \Delta\operatorname{grad}\varphi &= \operatorname{grad}\Delta\varphi\,, \\ \Delta\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \operatorname{rot}\Delta\mathbf{a}\,, \\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi &= \mathbf{0}\,, \\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= 0\,. \end{aligned}$$

Příklad 6.3. *Aplikujte Laplaceův operátor na skalární pole $\varphi(x,y,z) = r$.*

Řešení: Vypočtěme první a druhou derivaci pole pole x.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{x}{r}\,, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\,, \\ \Delta\varphi = \frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3} &= \frac{2}{r}\,. \end{aligned}$$

Příklad 6.4. *Určete Laplace skalárního pole $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r}$.*

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladě.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}\,,\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5}\,,\\ \Delta\varphi = -\frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} &= 0\,.\end{aligned}$$

Příklad 6.5. *Aplikujte Laplaceův operátor na vektorové pole* $\mathbf{a}(x,y,z) = \mathbf{r} = (x,y,z)$.

Řešení: Vypočteme první složku.

$$(\Delta\mathbf{a})_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0\,.$$

Obdobně pro ostatní složky. Tedy $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Příklad 6.6. *Dokažte identitu* $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{0}$.

Řešení: Identitu si rozepíšeme ve složkách.

$$\nabla\times\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y\partial z}\right)\,.$$

Protože jsou díky spojitosti φ parciální derivace záměnné, je výraz roven nulovému vektoru.

7 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 7.1. *Vypočtěte rychlost a zrychlení, má-li polohový vektor tvar* $\mathbf{r} = (t^3, t^2\sin t, \cos t)$.

Příklad 7.2. *Vypočtěte gradient funkce* $\varphi(r) = \frac{\cos r}{r}$*, kde* $r = |\mathbf{r}|$ *je absolutní hodnota polohového vektoru.*

Příklad 7.3. *Vypočtěte gradient funkce* $\varphi(\mathbf{r}) = |\mathbf{a}\times\mathbf{r}|$.

Příklad 7.4. *Vypočtěte divergenci funkce* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}\times\mathbf{r}$.

Příklad 7.5. *Vypočtěte rotaci funkce* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Příklad 7.6. *Aplikujte Laplaceův operátor na vektorové pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

8 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování

7.1 $\mathbf{v} = (3t^2, 2t\sin(t){+}t^2\cos(t), -\sin(t))$, $\mathbf{a} = (6t, (2{-}t^2)\sin(t){+}4t\cos(t), -\cos(t))$.
7.2 $\frac{-r\sin r - \cos r}{r^3}\mathbf{r}$.
7.3 $\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{r}|}$.
7.4 0.
7.5 0.
7.6 0.

9 Použitá a doporučená literatura

1. Daniel Hrivňák, Diferenciální operátory vektorové analýzy, dostupné z www: `http://artemis.osu.cz/uvma3/UVMA3_1.pdf`

2. Identities of vector analysis, dostupné z www: `https://www.math.okstate.edu/~binegar/4013-U98/4013-l15.pdf`