Diferenciální počet více proměnných
verze 1.3

1 Úvod

Následující text popisuje základy diferenciálního počtu více proměnných. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT1 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu
`jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Limita a spojitost

Nejdříve definujme pojem okolí.

Definice 2.1. *Pro kladné ε nazveme* ε-ovým okolím $U_\varepsilon(x_0)$ *bodu* $x_0 \in \mathbb{R}^r$ *množinu*

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x, x \in \mathbb{R}^r, \rho(x, x_0) < \varepsilon\}\,,$$

kde $\rho(\cdot,\cdot)$ je vzdálenost dvou bodů v $\mathbb{R}^r$.

Redukovaným ε-ovým okolím *nazveme ε-ové okolí bodu x_0 mimo tohoto bodu, tedy množinu*

$$U^*_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\}\,.$$

Nyní můžeme zadefinovat limitu funkce více proměnných a její spojitost.

Definice 2.2. *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, která je definovaná na $U^*_\varepsilon(x_0)$. Potom f má v x_0 limitu rovnou y_0, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in U^*_\delta(x_0)\,.$$

Definice 2.3. *Mějme opět funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ definovanou na $U_\varepsilon(x_0)$. Řekneme, že je spojitá v x_0, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in U_\delta(x_0)\,.$$

Jinými slovy, je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Limita popisuje chování funkce, když se blížíme k danému bodu. U funkcí více proměnných však existuje více způsobů, jak se k danému bodu přiblížit, než v jedné dimenzi. Můžeme se blížit např. po přímkách, po parabole, po spirále, atd. Funkce má limitu jen v tom případě, že při přiblížení libovolným způsobem dostaneme tutéž hodnotu.

Pro limity také platí, že limita součtu je součet limit, limita rozdílu rozdíl limit, limita součinu součin limit a limita podílu podíl limit (za předpokladu, že limita, kterou dělíme, je nenulová).

Příklad 2.4. *Určete limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ v bodě $(0, 0)$.*

Řešení: Zkusíme nejdříve limity po přímkách $y = kx$. Dostáváme

$$f(x, kx) = \frac{k^2x^4}{x^4 + k^4x^4} = \frac{k^2}{1 + k^4}\,.$$

Limita vzhledem ke každé z přímek je různá, proto limita této funkce neexistuje.

Příklad 2.5. *Určete limitu funkce* $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *v bodě* $(0, 0)$.

Řešení: Opět začneme přímkami $y = kx$.

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3k}{x^4 + k^2x^2} = 0\,.$$

Kandidátem na limitu je tedy číslo 0. To, že je limita při blížení se po všech přímkách stejná, ale neznamená, že funkce má limitu. Zkusme se blížit po parabole.

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}\,.$$

Limita tedy neexistuje.

Příklad 2.6. *Určete* $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin \frac{1}{x-y-z}$.

Řešení: Protože $\left|\sin \frac{1}{x-y-z}\right| \le 1$ a $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x| = 0$, máme

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin \frac{1}{x - y - z} = 0\,.$$

Příklad 2.7. *Ukažte spojitost funkce*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

v bodě $(0, 0)$.

Řešení: Musíme ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ je $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$. Máme

$$|f(x, y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2 + y^2}\right| = |x|\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \le \frac{|x|}{2}\,,$$

kde jsme využili nerovnosti $|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2}$. Dále protože $|x|/2 \le \sqrt{x^2 + y^2}/2 < \delta/2$, stačí zvolit $\delta = 2\varepsilon$.

3 Parciální derivace

Definice 3.1. *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ definovanou na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_r)$. Potom parciální derivací funkce f podle i-té proměnné v bodě a nazveme limitu*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_r) - f(a)}{t}\,.$$

Parciální derivaci označujeme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nebo $\partial_{x_i} f$ nebo f_{x_i}.

Platí věta, že funkce, která má v $U(a)$ všechny první derivace a tyto derivace jsou omezené, je v bodě a spojitá. Můžeme také zavést druhou parciální derivaci podle dané proměnné nebo smíšené parciální derivace. Pozor, obecně parciální derivace podle různých proměnných nejsou záměnné. Ilustruje to následující příklad.

Příklad 3.2. *Určete druhé smíšené parciální derivace funkce $f(x, y) = \begin{cases} xy & |x| \geq |y| \\ 0 & |x| < |y| \end{cases}$ v bodě $(0, 0)$.*

Řešení: Tato funkce se ve dvou oblastech chová jako xy a ve dvou oblastech jako 0. Pro všechna y platí $\partial_x f(0, y) = 0$ a pro všechna x platí $\partial_y f(x, 0) = x$. Proto

$$\partial_y(\partial_x f)(0, 0) = 0\,, \quad \partial_x(\partial_y f)(0, 0) = \partial_x(x)(0, 0) = 1\,.$$

Druhé parciální derivace nejsou tedy záměnné.

Příklad 3.3. *Ověřte záměnnost druhých parciálních derivací funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.*

Řešení: Vypočítáme postupně parciální derivace podle x, podle y a poté druhé smíšené parciální derivace.

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= 4x^3 - 8xy^2\,, \\ \partial_y f(x, y) &= 4y^3 - 8x^2y\,, \\ \partial_{xy} f(x, y) = \partial_{yx} f(x, y) &= -16xy\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.4. *Ověřte záměnnost druhých parciálních derivací funkce $f(x, y) = x^y$.*

Řešení:

$$\begin{aligned} \partial_x x^y &= \mathrm{e}^{y \ln x} \frac{1}{x} y\,, \\ \partial_y x^y &= \mathrm{e}^{y \ln x} \ln x\,, \\ \partial_y \partial_x x^y = \partial_x \partial_y x^y &= \mathrm{e}^{y \ln x} \ln x \frac{1}{x} y + \frac{1}{x} \mathrm{e}^{y \ln x}\,. \end{aligned}$$

4 Derivace ve směru

Obdobně jako můžeme vypočítat derivace podle jednotlivých souřadnicových proměnných, můžeme také vypočítat derivaci v libovolném směru.

Definice 4.1. *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ definovanou na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_r)$ a jednotkový vektor $h \in \mathbb{R}^r$. Potom derivací v bodě a ve směru h nazveme limitu*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} .$$

Derivaci značíme $\partial_h f$.

Pro dvě proměnné lze použít vztah

$$\partial_h f = h_x \partial_x f + h_y \partial_y f ,$$

pro tři proměnné obdobně

$$\partial_h f = h \cdot \nabla f = h_x \partial_x f + h_y \partial_y f + h_z \partial_z f .$$

Příklad 4.2. *Určete derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v bodě $(1, 1)$ ve směru $h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.*

Řešení: Vektor h je jednotkový, není ho tedy nutné normalizovat. Máme

$$\begin{aligned} \partial_x f &= 2x , \quad \partial_x f|_{(1,1)} = 2 , \\ \partial_y f &= -2y , \quad \partial_y f|_{(1,1)} = -2 , \\ \partial_h f &= 2\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\frac{1}{-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Příklad 4.3. *Určete derivaci funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ v bodě $a = (a_x, a_y, a_z)$ ve směru $h = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$*

Řešení: Využijeme vztah pro dimenzi 3.

$$\begin{aligned} \partial_x f = \partial_y f \partial_z f &= 1 , \\ \partial_h f = \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \sin\theta + \cos\theta &= (\cos\varphi + \sin\varphi) \sin\theta + \cos\theta . \end{aligned}$$

Příklad 4.4. *Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $h = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$.*

Řešení: Využijeme vztah pro dimenzi 3, derivaci vypočítáme jako skalární součin gradientu f

$$\nabla f|_a = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)|_a = (2x, 2y, -2z)|_{((1,2,-1))} = (2, 4, 2)$$

a směrového vektoru.

$$\partial_h f = h \cdot \nabla f = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (2, 4, 2) = \frac{4}{\sqrt{3}} .$$

5 Totální diferenciál

Definice 5.1. *Funkce f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineární zobrazení $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, pro které platí*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)[h]}{\|h\|} = 0\,.$$

Jinými slovy platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)[h] + \omega(h)\,, \quad \text{kde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Zatímco parciální derivace charakterizuje změnu funkce pouze v určitém směru, totální diferenciál nám něco říká o chování funkce pro všechny malé přírůstky h. Jeho interpretace je nahrazení funkce tečnou rovinou ke grafu funkce v daném bodě. Pokud má funkce v nějakém bodě spojité parciální derivace, pak tam má diferenciál. Platí následující věta.

Věta 5.2. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ v bodě a totální diferenciál. Pak je v bodě a spojitá, má v něm parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných a platí $\mathrm{d}f(a)[h] = \sum_{i=1}^r h_i \partial_{x_i} f$.*

Příklad 5.3. *Najděte totální diferenciál funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě (x_0, y_0).*

Řešení: Nejdříve vypočteme parciální derivace podle obou proměnných v bodě (x_0, y_0).

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0\,, \quad \partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0\,.$$

Pokud totální diferenciál existuje, má tedy tvar $2x_0h_1 + 2y_0h_2$.

$$\begin{aligned}\omega(h) &= f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \mathrm{d}f(x_0, y_0)[h] = \\ &= (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2 = h_1^2 + h_2^2\,.\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \|h\| = 0\,.$$

Totálním diferenciálem funkce f v bodě (x_0, y_0) tedy je $2x_0h_1 + 2y_0h_2$.

Příklad 5.4. *Určete, zda funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ má v počátku totální diferenciál.*

Řešení: Protože funkci nelze v počátku derivovat (nemá tam smysl), vypočítáme derivace přímo z definice

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0\,,$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0\,.$$

Totální diferenciál tedy je

$$\mathrm{d}f(0,0)[h] = \partial_x f(0,0)h_1 + \partial_y f(0,0)h_2 = 0h_1 + 0h_2 = 0\,.$$

Nyní ověříme, jestli tento kandidát je skutečně diferenciálem.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathrm{d}f(0,0)[h]}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \neq 0\,.$$

Protože limita neexistuje, neexistuje ani totální diferenciál v tomto bodě.

Příklad 5.5. *Zjistěte, kde je funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$ definovaná, spojitá, kde má parciální derivace 1. řádu a kde totální diferenciál.*

Řešení: Funkce je definovaná na polorovině $x + y > 0$. V celé této polorovině je spojitá a má parciální derivace 1. řádu

$$\partial_x f = \partial_y f = \frac{1}{x+y}\,,$$

které jsou zjevně spojité v celé polorovině. Protože jsou parciální derivace spojité, má funkce totální diferenciál.

6 Taylorův rozvoj

Obdobně jako v jedné proměnné můžeme ve více proměnných vyjádřit hladkou funkci Taylorovým rozvojem. Má-li funkce f jako funkce n proměnných spojité parciální derivace až do řádu $(k+1)$ včetně na okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_n)$, platí na jeho okolí

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^j f(a) + R_{k+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!} \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{k+1} f(a + \delta(x-a))\,,$$

$\delta \in (0,1)$.

7 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 7.1. *Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ platí:*

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} f(x,y) \right) = \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} f(x,y) \right) = 0$$

a přitom limita funkce dvou proměnných $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

Příklad 7.2. *Ukažte, že pro funkci* $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$ *naopak neexistují obě postupné limity* $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ *a* $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$, *zatímco* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Příklad 7.3. *Vypočtěte*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Příklad 7.4. *Vypočtěte*

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}.$$

Příklad 7.5. *Spočtěte druhé parciální derivace a dokažte záměnnost druhých smíšených parciálních derivací.*

a) $f(x,y) = 4x^3 + 2x^2y + 7y^3$.

b) $f(x,y) = x\sin(x+y)$.

Příklad 7.6. *Určete derivaci funkce* $f(x,y) = x^3 + y^3$ *v bodě* $(1,0)$ *ve směru* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Příklad 7.7. *Určete derivaci funkce* $f(x,y,z) = x^2 + yz$ *v bodě* $(1,1,2)$ *ve směru* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Příklad 7.8. *Určete derivaci funkce* $f(x,y) = x\cos(x+y)$ *v bodě* $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *ve směru* $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}},\right)$.

Příklad 7.9. *Najděte totální diferenciál funkce* $f(x,y) = x^3 + y^3$ *v bodě* $(1,1)$, *pokud existuje.*

Příklad 7.10. *Zjistěte, kde je následující funkce definovaná, spojitá, kde má parciální derivace 1. řádu, kde totální diferenciál a kde spojité 1. parciální derivace.*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8 Řešení příkladů k samostatnému procvičování

7.1 Při pevném nenulovém x je $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$, limita samých nul je nula. Neexistenci limity dvou proměnných lze ověřit např. pomocí přímek $y = kx$, pro $k = 1$ dostaneme výsledek 1, pro ostatní 0.
7.2 Postupné limity neexistují,protože neexistuje limita $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Limitu funkce dvou proměnných dostaneme z věty o limitě součinu funkce omezené a funkce jdoucí k nule.
7.3 Neexistuje, lze ověřit přímkami $y = kx$.
7.4 a.

7.5 a) $\partial_{xx} f = 24x + 4y$, $\partial_{yy} f = 42y$, $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 4x$,
b) $\partial_{xx} f = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $\partial_{yy} f = -x\sin(x+y)$, $\partial_{xy} f = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$. **7.6** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
7.7 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
7.8 $-\frac{3\sqrt{5}\pi}{10}$.
7.9 $3h_1 + 3h_2$.
7.10 $D(f) = \mathbb{R}^2$, všude spojitá, všude diferenciál a tudíž všude 1. parciální derivace, jež jsou nespojité pouze v počátku.

9 Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky II., Matfyzpress, Praha, 2003, kapitola 8 a 9

2. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky II., Matfyzpress, Praha, 2003, kapitola 3

3. Jan Hamhalter, Jaroslav Tišer, Diferenciální počet funkcí více proměnných, dostupné z www:
`http://math.feld.cvut.cz/tiser/difpocet.htm`

4. J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková a P. Šarmanová, Diferenciální počet funkcí více proměnných, dostupné z www:
`http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/`
`/diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf`

5. Jiří Klaška, Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných, dostupné z www:
`mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=364`

6. `http://artemis.osu.cz/uvma2/prikl/d03_dersmer.pdf`