Diferenciální rovnice vyšších řádů, snižování řádu diferenciální rovnice

verze 1.3

1 Úvod

Následující text popisuje řešení diferenciálních rovnic, konkrétně diferenciálních rovnic vyšších řádů a snižování jejich řádu. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT2 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

Uvedeme si několik typů diferenciálních rovnic a jejich způsoby snížení řádu a řešení.

2 Typ 1: $y^{(n)} = f(x)$

Tento typ je jednoduchý, k nalezení funkce y stačí rovnici n-krát zintegrovat.

Příklad 2.1. *Řešte rovnici* $y''' = \mathrm{e}^{2x}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c_1\,, \\ y' &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + c_1 x + c_2\,, \\ y &= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3\,. \end{aligned}$$

Příklad 2.2. *Řešte rovnici* $y''' = \sin x$.

Řešení:

$$\begin{aligned} y'' &= -\cos x + c_1\,, \\ y' &= -\sin x + c_1 x + c_2\,, \\ y &= \cos x + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3\,. \end{aligned}$$

3 Typ 2: $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$

Rovnici řešíme tak, že zavedeme substituci $z = y^{n-1}$ a dále musíme doufat, že se nám vzniklou rovnici $z' = f(x,z)$ podaří vyřešit.

Příklad 3.1. *Řešte rovnici* $xy''' + 3y'' = 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned} z = y'' , \quad \Rightarrow \quad xz' + 3z = 0 \, , \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = - \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x} \, , \\ y'' = z = \frac{c_1}{x^3} \, , \\ y' = -\frac{c_1}{2x^2} + c_2 \, , \\ y = \frac{c_1}{2x} + c_2 x + c_3 \, . \end{aligned}$$

Příklad 3.2. *Řešte rovnici* $y''' + y'' = \mathrm{e}^x$.

Řešení: Po substituci se jedná o lineární rovnici 1. řádu, kterou řešíme metodou variace konstanty.

$$\begin{aligned} z = y'' \quad \Rightarrow \quad z' + z = \mathrm{e}^x \, , \\ z' + z = 0 \, , \\ z = c\mathrm{e}^{-x} \, , \\ z = c(x)\mathrm{e}^{-x} \, , \\ c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x} + c(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x \, , \\ c(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c_2 \, , \\ y'' = z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} \, , \\ y' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 \, , \\ y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 x + c_4 \, . \end{aligned}$$

Příklad 3.3. *Řešte rovnici* $xy''' + 2y'' = 3x$.

Řešení: Po substituci se jedná o lineární rovnici 1. řádu, kterou řešíme metodou variace konstanty.

$$\begin{aligned}
z = y'' , \quad \Rightarrow \quad xz' + 2z &= 3x , \\
xz' + 2z &= 0 , \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x , \\
z &= \frac{c}{x^2} , \\
z &= \frac{c(x)}{x^2} , \\
xc'(x)\frac{1}{x^2} + xc(x)\frac{-2}{x^3} + \frac{c(x)}{x^2} &= 3x , \\
c'(x) = 3x^2 , \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^3 + c_2 , \\
y''(x) = z &= x + \frac{c_2}{x^2} , \\
y'(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{c_2}{x} + c_3 , \\
y(x) &= \frac{1}{6}x^3 - c_2 \ln|x| + c_3 x + c_4 .
\end{aligned}$$

4 Typ 3: $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$

Tento typ řešíme substitucí $z = y^{(n-2)}$, získáme rovnici $z'' = f(z)$. Dále obě strany rovnice vynásobíme $2z'$, což je ekvivalentní úprava pro $z' \neq 0$. Dostáváme $[(z')^2]' = 2[F(z)]'$, kde $F(z)$ je primitivní funkce k $f(z)$. O tom, že předchozí rovnice platí, se lze přesvědčit derivací vnitřní funkce. Dále máme

$$\begin{aligned}
(z')^2 &= 2F(z) + c , \\
z' &= \pm\sqrt{2F(z) + c} .
\end{aligned}$$

Tuto rovnici lze řešit separací proměnných.

Příklad 4.1. *Řešte rovnici $y''' + y' = 0$.*

Řešení:

$$\begin{aligned}
z'' + z &= 0\,,\\
2z'z'' + 2zz' &= 0\,,\\
\left[(z')^2 + z^2\right]' &= 0\,,\\
z' &= \pm\sqrt{c - z^2}\,,\\
\pm \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{c - z^2}} &= \int \mathrm{d}x\,,\\
\pm \arcsin \frac{z}{\sqrt{c}} &= x + c_2\,,\\
z_1 &= c_1 \sin\left(x + c_2\right),\\
z_2 &= c_1 \sin\left(-x + c_2\right),\\
y' &= c_1 \sin\left(x + c_2\right),\\
y(x) &= -c_1 \cos\left(x + c_2\right) + c_3
\end{aligned}$$

Příklad 4.2. *Řešte rovnici* $y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}$*, s počátečními podmínkami* $y(0) = 0$*,* $y'(0) = 1$*,* $y''(0) = 1$*.*

Řešení:

$$z = y' \quad \Rightarrow \quad z'' = \frac{1}{4\sqrt{z}}, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 1\,,$$

$$\left[(z')^2\right]' = \frac{z'}{2\sqrt{z}}\,.$$

Nyní zintegrujeme obě strany rovnice od 0 do x.

$$(z')^2(x) - (z')^2(0) = \int_0^x \frac{z'(t)\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{z(t)}} = \sqrt{z(x)} - \sqrt{z(0)}\,.$$

Dosadíme do počátečních podmínek a máme

$$\left[z'(x)\right]^2 = \sqrt{z(x)}\,.$$

Po odmocnění zvolíme kladné znaménko, protože máme počáteční podmínku $z'(0) = 1$. Rovnici vyřešíme separací proměnných.

$$\begin{aligned}
z'(x) &= z^{\frac{1}{4}}(x), \quad z(0) = 1\,,\\
\int z^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z &= \int \mathrm{d}x\,,\\
\frac{4}{3} z^{\frac{3}{4}} &= x + c\,,\\
z &= \left[\frac{3}{4}(x + c)\right]^{\frac{4}{3}}\,,
\end{aligned}$$

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \left(\frac{3t}{4} + 1\right)^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}t = \frac{4}{7}\left[\left(\frac{3x}{4} + 1\right)^{\frac{7}{3}} - 1\right].$$

Příklad 4.3. *Řešte rovnici $y''' = \mathrm{e}^{2y'}$ s počáteční podmínkou $y''(-1) = 1$, $y'(-1) = 0$, $y(-1) = 0$.*

Řešení:

$$
\begin{aligned}
z'' = \mathrm{e}^{2z}\,, \quad z'(-1) = 1, \quad z(-1) &= 0\,,\\
\left[(z')^2\right]' = 2z'\mathrm{e}^{2z} &= (\mathrm{e}^{2z})'\,,\\
(z')^2 &= \mathrm{e}^{2z} + c_1\,,\\
z'(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 &= 0\,,\\
z' &= \mathrm{e}^{z}\,,\\
\int \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z &= \int \mathrm{d}x\,,\\
-\mathrm{e}^{-z} &= x + c_2\,,\\
z(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 &= 0\,,\\
y'(x) = z(x) = -\ln(-x)\,, \quad x &< 0\,,\\
y(x) = -x(\ln(-x) - 1) + c_3&\,,\\
y(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 &= 1\,,\\
y(x) = -x(\ln(-x) - 1) + 1&\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 4.4. *Řešte rovnici $y'' = -\frac{1}{y^3}$ s počáteční podmínkou $y'(1) = 1$, $y(1) =$* 1.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
2y'y'' &= -\frac{2y'}{y^3}\,,\\
(y'^2)' &= \left(\frac{1}{y^2}\right)'\,,\\
y'^2 &= \frac{1}{y^2} + C_1\,,\\
1 = 1 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 &= 0\,,\\
y' &= \frac{1}{y}\,.
\end{aligned}
$$

Vzali jsme kladné znaménko odmocniny kvůli počátečním podmínkám $y'(1) = 1$, $y(1) = 1$. Dále separací proměnných.

$$
\begin{aligned}
\int y\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x\,,\\
\frac{y^2}{2} &= x + C_2\,,\\
\frac{1}{2} = 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 &= -\frac{1}{2}\,,\\
y = \sqrt{2x-1}\,, \quad x &\geq \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

5 Typ 4: $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, $1 \le k \le n$

Nyní se budeme věnovat snižování řádu diferenciální rovnice bez toho, aniž bychom ji dořešili. U tohoto typu použijeme substituci $y^{(k)} = z$ a převedeme rovnici na rovnici řádu $n-k$ ve tvaru $f(x, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

6 Typ 5: známe jedno řešení rovnice

Pokud známe jedno řešení $u(x)$, můžeme použít obdoby dělení polynomů. Rovnici n-tého řádu převedeme na rovnici $(n-1)$-ního řádu v nové proměnné. Položíme $y(x) = v(x)u(x)$ a dosadíme do rovnice. V rovnici se nebude vyskytovat $v(x)$, pouze jeho derivace. Proto zavedeme substituci $z(x) = v'(x)$ a dostáváme rovnici $(n-1)$-ního řádu pro proměnnou $z(x)$.

Příklad 6.1. *Snižte řád diferenciální rovnice* $(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0$, *známe-li jedno řešení* $u(x) = x^2 - 2$.

Řešení: Triviálně můžeme ověřit, že $x^2 - 2$ je opravdu řešením uvedené rovnice. Zavedeme funkci $v(x)$ vztahem

$$\begin{aligned}
y(x) &= v(x)(x^2-2)\,,\\
y'(x) &= v'(x)(x^2-2) + v(x)2x\,,\\
y''(x) &= v''(x)(x^2-2) + 4xv'(x) + 2v(x)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2x-3x^3)\left[v''(x)(x^2-2) + 4xv' + 2v\right] +\\
&\qquad\qquad + 4v'(x)(x^2-2) + 8xv(x) + 6xv(x)(x^2-2)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2x-3x^3)(x^2-2)v''(x) + (8x^2 - 12x^4 + 4x^2 - 8)v'(x) +\\
&\qquad\qquad + (4x - 6x^3 + 8x + 6x^3 - 12x)v(x) = 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-3x^5 + 8x^3 - 4x)v''(x) + (-12x^4 + 12x^2 - 8)v'(x) = 0\,,\\
z = v' \quad \Rightarrow \quad &(-3x^5 + 8x^3 - 4x)z'(x) + (-12x^4 + 12x^2 - 8)z(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

Příklad 6.2. *Snižte řád diferenciální rovnice* $y'' + xy' - 2y = 0$ *znáte-li řešení* $u(x) = x^2 + 1$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
y(x) &= v(x)(x^2+1)\,,\\
y'(x) &= v'(x)(x^2+1) + v(x)2x\,,\\
y''(x) &= v''(x)(x^2+1) + 4xv'(x) + 2v(x)\,,\\
v''(x)(x^2+1) + v'(x)4x + 2v(x) + v'(x)x(x^2+1) + 2x^2v(x) - 2v(x)(x^2+1) &= 0\,,\\
v''(x)(x^2+1) + v'(x)(x^3+5x) &= 0\,,\\
z(x) = v'(x) \quad \Rightarrow \quad z'(x)(x^2+1) + z(x)(x^3+5x) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Příklad 6.3. *Snižte řád diferenciální rovnice* $-(2x^2+3)y'' - 2y' + 4y = 0$ *znáte-li řešení* $u(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} y(x) &= v(x)(x^2+x+2)\,, \\ y'(x) &= v'(x)(x^2+x+2) + v(x)(2x+1)\,, \\ y''(x) &= v''(x)(x^2+x+2) + 2v'(x)(2x+1) + 2v(x)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(2x^2+3)[2v(x) + (2x+1)2v'(x) + (x^2+x+2)v''(x)]- \\ &\qquad - 2[(2x+1)v(x) + (x^2+x+2)v'(x)] + 4(x^2+x+2)v(x) = 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(8x^3+6x^2+14x+10)v'(x) - (2x^2+3)(x^2+x+2)v''(x) &= 0\,, \\ z(x) &= v'(x)\,, \\ -(8x^3+6x^2+14x+10)z(x) - (2x^2+3)(x^2+x+2)z'(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

7 Typ 6: $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, kde f je homogenní vzhledem k $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Homogenita funkce f znamená

$$f(x, \mu y, \mu y', \ldots, \mu y^{(n)}) = \mu^\alpha f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,.$$

Zavedeme funkci z vztahem $y' = zy$. Vypočteme

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$$

a obdobně pro další derivace. Tím v proměnné z dostaneme rovnici nižšího řádu.

Příklad 7.1. *Řešte rovnici* $x^2((y')^2 - 2yy'') = y^2$.

Řešení: Zavedeme substituci $y' = zy$ s $y'' = y(z^2 + z')$.

$$\begin{aligned} x^2y^2(z^2 - 2z^2 - 2z') &= y^2\,, \\ x^2(-z^2 - 2z') &= 1\,. \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici nižšího řádu. Pokud by se nám ji podařilo vyřešit, obdržíme řešení původní rovnice z rovnice $y' = zy$ separací proměnných.

8 Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky II., Matfyzpress, Praha, 2003, kapitola 7.4

2. `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/Brz_ves/difrov.pdf`, kapitola 3.2