Diferenciál funkce jedné proměnné, Taylorův rozvoj

Definice 1. Píšeme $f = o(g)$, $x = a \in \mathbb{R}^*$, je-li $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = 0$. Píšeme $f = O(g)$, $x = a \in \mathbb{R}^*$, je-li $\frac{f}{g}(x)$ omezená na nějakém okolí bodu okolí $U^*(a)$.

Věta 2. Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci rovnou A, pak platí

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$$

a naopak, existuje-li $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ tak, že platí předchozí rovnice, má funkce f v bodě a vlastní derivaci rovnou A.

Definice 3. Diferenciálem funkce f v bodě a se nazývá taková funkce $\mathrm{d}f(a)(t) = At$, $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, pro kterou platí $f(a+t) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(t) = o(t)$ pro $t = 0$.

Věta 4. Funkce f má v bodě a diferenciál právě když tam má vlastní derivaci. Přitom číslo A v diferenciálu je rovno $f'(a)$.

Pro funkce jedné proměnné nemá pojem diferenciálu velký význam, důležité je ale jeho zobecnění pro funkce více proměnných.

Definice 5. Pro funkci f, která v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace až do řádu n včetně definujeme její Taylorův mnohočlen v bodě $x = x_0$ předpisem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $f^{(k)}$ značí k-tou derivaci funce f.

Věta 6. Má-li funkce f derivace v bodě x_0 do řádu n včetně, pak platí

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)\,.$$

Uvedeme si Taylorovy rozvoje nejčastějších funkcí.

Věta 7. Pro $x_0 = 0$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)\,,\\
\sin x &= \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^n)\,,\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n)\,,\\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)\,,\\
(1+x)^p &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{p}{k} x^k + o(x^n)\,,
\end{aligned}$$

kde $[x]$ je celá část čísla x, kombinační číslo $\binom{p}{k}$ je rovno $\frac{p!}{k!(p-k)!}$ a faktoriál $n!$ je součin čísel $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$.

1 Příklady

Příklad 8. *Určete s přesností na pět desetinných míst výraz* $\sqrt{25{,}001}$.

Řešení: Zvolme funkci $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ a zkoumejme její rozvoj v $x_0 = 25$. Vypočteme si první derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\,, \quad f(x_0) = 5\,, \quad f'(x_0) = 0{,}1\,.$$

Z Taylorova rozvoje prvního řádu máme

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 5 + 0{,}1 \cdot 0{,}001 = 5{,}000\,10\,.$$

Příklad 9. *Pomocí Taylorova rozvoje určete limitu* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x) - \cos x + 1 - x}$.

Řešení: Využijeme rozvojů

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\,, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\,,$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,.$$

Dosazením do rovnice máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x) - \cos x + 1 - x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + 1 - x + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 10. *Určete Taylorův rozvoj funkce* $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ *v bodě* $x = 0$.

Řešení: Existují dvě metody, jak tento příklad řešit, ukážeme si obě dvě. První je z definice Taylorova rozvoje. Vypočteme si derivace v nule

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,, \quad f''(x) = \frac{\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\cos^3 x}\,, \quad f''' = \frac{-9\cos^2 x \sin x + 6\sin^3 x}{\cos^4 x}\,,$$
$$f(0) = 1\,, \quad f'(0) = 0\,, \quad f''(0) = 1\,, \quad f'''(0) = 0\,.$$

Dosazením do Taylorova vzorce máme

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\,.$$

Druhá možnost je následující. Předpokládáme rozvoj ve tvaru

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)\,.$$

Dosazením rozvoje kosinu máme

$$1 = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)(a+bx+cx^2+dx^3)+o(x^3) = a+bx+\left(c - \frac{a}{2}\right)x^2+\left(d - \frac{b}{2}\right)x^3+o(x^3)\,.$$

Porovnáním koefientů dostáváme $a = 1$, $b = d = 0$, $c = \frac{1}{2}$, což dává stejný Taylorův rozvoj jako v prvním případě.

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 5.2

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 3.15, 4.5 a 5.7