Funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce

Definice 1. Reálnou (komplexní) funkcí jedné proměnné rozumíme zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Její definiční obor označujeme D_f a obor hodnot H_f.

$$f(M) = \{y, y = f(x), x \in M\}$$

značíme obraz množiny M pomocí funkce f.

Příklad 2.

1. $D_f = \mathbb{N}$: posloupnost
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x + 1, \quad x \in [-1, 1]$
4. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Definice 3. f je *zúžením* g na D_f a g je *rozšířením* f na D_g, pokud $D_f \subset D_g$ a $f(x) = g(x)$ pro $x \in D_f$.

Definice 4. Grafem reálné (komplexní) funkce f se nazývá množina $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{C}$) definovaná předpisem $G_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$.

Příklad 5. Graf nemusí být zakreslený jednou čarou, příkladem může být tzv. Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racionální} \\ 0 & x \text{ iracionální} \end{cases}.$$

Definice 6. (součet, rozdíl, součin, podíl)
Definujeme:

$$\begin{aligned} (f_1 \pm f_2)(x) &= f_1(x) \pm f_2(x)\,, \quad D_{f_1} \cap D_{f_2}\,, \\ (f_1 \cdot f_2)(x) &= f_1(x) \cdot f_2(x)\,, \quad D_{f_1} \cap D_{f_2}\,, \\ (f_1/f_2)(x) &= f_1(x)/f_2(x)\,, \quad D_{f_1} \cap D_{f_2} \backslash \{x, f_2(x) = 0\}\,. \end{aligned}$$

Definice 7. Nechť jsou f_1, f_2 reálné (komplexní) funkce, $M = \{x, x \in D_{f_1}, f_1(x) \in D_{f_2}\}$. Potom složenou funkcí $f_2 \circ f_1$ definujeme takto:

$$D_{f_2 \circ f_1} = M\,, \quad (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))\,, \quad x \in M\,.$$

f_1 je vnitřní, f_2 je vnější funkce.

Definice 8. Řekneme, že funkce f je prostá, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definice 9. Je-li f prostá, pak funkcí k ní inverzní nazýváme funkci f^{-1} definovanou jako

$$D_{f^{-1}} = H_f\,, \quad f^{-1}(y) = x_y\,, \quad \text{je} - \text{li } f(x_y) = y \text{ pro } y \in D_{f^{-1}}\,.$$

Definice 10. Funkce je *sudá*, pokud pro $\forall x \in D_f$ platí $f(-x) = f(x)$; funkce je *lichá*, pokud pro $\forall x \in D_f$ platí $f(-x) = -f(x)$.

1 Příklady

Příklad 11. *Určete definiční obor funkce* $\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$.

Řešení: Argument logaritmu musí být kladný, proto $\frac{x-2}{x+1} > 0$. Nyní si reálnou osu rozdělíme na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ and $(2, \infty)$ a zjistíme na nich znaménko čitatele a jmenovatele.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-2}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Krajní body intervalů nezahrnujeme, protože chceme ostrou nerovnost. Definiční obor funkce tedy je $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Příklad 12. *Nalezněte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \sin(x^2 + 1)$, $D_f = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}, \sqrt{\pi - 1}\right)$.

Řešení: Nejdříve si uvědomíme, že na zadaném definičním oboru je funkce f prostá, protože funkce sinus je na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ prostá. Inverze funkce je její převrácení podle přímky svírající s oběma osami úhel 45° nebo jinými slovy změna rolí x a y. Pro inverzní funkci platí $x = \sin(y^2 + 1)$. Nyní z rovnice vyjádříme úpravami y.

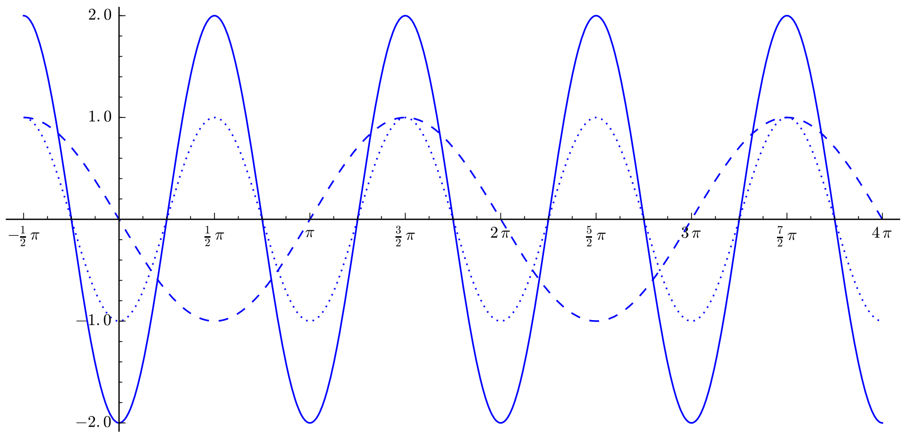
$$\begin{aligned} \arcsin x &= y^2 + 1 \\ \arcsin x - 1 &= y^2 \\ \sqrt{\arcsin x - 1} &= y \end{aligned}$$

Použijeme kladný kořen odmocniny, protože definiční obor funkce f je podmnožinou kladných reálných čísel, proto také obor hodnot inverzní funkce musí být kladný. Inverzní funkce je $f^{-1}(x) = \sqrt{\arcsin x - 1}$, definiční obor f^{-1} je roven oboru hodnot f, proto $D_{f^{-1}} = (0, 1)$.

Příklad 13. *Nakreslete graf funkce* $f(x) = 2\cos(2x + \pi)$.

Řešení: Funkci si přepíšeme jako $f(x) = 2\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Nejdříve si vyneseme funkci $f_1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (v grafu na obr. 1 čárkovaně). Je to kosinus posunutý o $\pi/2$ doleva. Poté vyneseme $f_2 = \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (v grafu tečkovaně). Ten dostaneme tak, že argument vynásobíme dvěma, funkce bude tedy oscilovat dvakrát rychleji. V $-\pi/2$ bude funkční hodnota stejná jako u funkce f_1, tedy 1. Nyní už zbývá vynést funkci f (plnou čarou). Tu dostaneme tak, že všechny funkční hodnoty funkce f_2 zvýšíme dvakrát.

Příklad 14. *Určete, zda funkce* $f(x) = x(x^2 + \cos x)$ *je sudá funkce, lichá funkce či ani jedno.*



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = 2\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Řešení: Určíme si funkční hodnotu v $-x$

$$f(-x) = -x((-x)^2 + \cos(-x)) = -x(x^2 + \cos x) = -f(x)\,.$$

Funkce je tedy lichá.

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 3