Homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

verze 1.1

1 Úvod

Následující text popisuje řešení diferenciálních rovnic, homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT2 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Teorie

Budeme se zabývat rovnicemi typu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

s reálnými konstantami $a_0, \dots a_n$. Snadno vidíme, že jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ řešeními této diferenciální rovnice, je řešením také jejich lineární kombinace $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Označíme-li si operátor na levé straně rovnice jako $L(y)$, máme

$$L(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = C_1 L(y_1(x)) + C_2 L(y_2(x)) = 0\,.$$

Dále můžeme nahlédnout, že je-li řešením funkce $y(x) = u(x) + iv(x)$, jsou řešeními i funkce $u(x)$ a $v(x)$.

Řekneme, že funkce $y_1(x), y_2(x) \dots, y_n(x)$ jsou lineárně závislé na daném intervalu, pokud na tomto intervalu existují nenulové konstanty $c_1, c_2, \dots c_n$, pro něž platí

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots c_n y_n(x) = 0\,.$$

V opačném případě jsou tyto funkce lineárně nezávislé.

Pokud mají funkce $y_1(x), y_2(x) \dots, y_n(x)$ derivace do řádu $n-1$ včetně, můžeme jejich lineární závislost nebo nezávislost určit z tzv. Wronského determinantu (wronskiánu)

$$W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Platí, že řešení homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty $y_1(x), y_2(x) \dots, y_n(x)$ jsou na nějakém intervalu lineárně závislé, právě když je jejich wronskián na tomto intervalu nulový.

Pokud máme n řešení $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ rovnice (1), jejichž wronskián je nenulový (jsou lineárně nezávislé) pak soustavu $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ nazýváme *fundamentálním systémem* rovnice (1).

Nyní si řekneme, jak vypočítat řešení rovnice (1). Postupujeme tzv. Eulerovou metodou. Zvolíme substituci $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Víme, že každá derivace této funkce znamená vynásobení této funkce k. Po dosazení do rovnice (1) máme

$$\mathrm{e}^{kx}(a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0) = 0\,.$$

Polynom v závorce se nazývá *charakteristickým polynomem* rovnice (1), položíme-li ho roven nule, dostáváme tzv. *charakteristickou rovnici.*

Jsou-li kořeny charakteristického polynomu různé, tvoří funkce $\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{k_n x}$ fundamentální systém. Obecné řešení rovnice (1) je tedy

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{k_1 x} + C_2\mathrm{e}^{k_2 x} + \cdots + C_n\mathrm{e}^{k_n x}\,.$$

Pokud má charakteristický polynom komplexní kořen $a + ib$, pak rovnice (1) má řešení $y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos bx$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$. Z Eulerova vzorce totiž vidíme

$$\mathrm{e}^{a+bi} = \mathrm{e}^{a}\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{a}\,(\cos b + i\sin b)\,.$$

Reálná i imaginární složka této funkce musí vyhovovat řešení rovnice (1). Poznamenejme, že jsme tak získali sice dvě nová řešení místo jednoho, musíme si však uvědomit, že zároveň je kořenem charakteristické rovnice také $a - bi$.

Nyní ještě zbývá rozebrat si, co se stane, pokud dva nebo více z kořenů charakteristické rovnice jsou stejné. Zjevně totiž výše uvedený postup nedává lineárně nezávislá řešení. Abychom našli fundamentální systém rovnice, musíme přidat řešení $\mathrm{e}^{kx}, x\mathrm{e}^{kx}, \ldots x^{r-1}\mathrm{e}^{kx}$ pro r-násobný kořen k charakteristického polynomu. Pokud je r-násobný kořen komplexní, je fundamentální systém

$$\mathrm{e}^{ax}\cos bx, x\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \ldots, x^{r-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \mathrm{e}^{ax}\sin bx, x\mathrm{e}^{ax}\sin bx, x^{r-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,.$$

3 Příklady

Příklad 3.1. *Určete, zda funkce* e^{x} *a* e^{-x} *jsou lineárně závislé nebo nezávislé.*

Řešení: Spočteme wronskián těchto dvou funkcí

$$W_{\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{-x}}(x) = \det\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x}\\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x}\end{pmatrix} = -2\,.$$

Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

Příklad 3.2. *Určete, zda funkce* $1, \sin^2 x$ *a* $\cos^2 x$ *jsou lineárně závislé nebo nezávislé.*

Řešení: Wronskián je:

$$W_{1,\sin^2 x,\cos^2 x}(x) = \det\begin{pmatrix}1 & \sin^2 x & \cos^2 x\\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x\\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x\end{pmatrix} = 0\,.$$

Funkce jsou lineárně závislé.

Příklad 3.3. *Řešte rovnici* $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 - 4k + 3 = 0$, jejím řešením pak jsou čísla $k = 1$ a $k = 3$. Řešením rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} \,.$$

Příklad 3.4. *Řešte rovnici* $y^{(3)} - 7y' - 6y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^3 - 7k - 6 = 0$. Abychom ji vyřešili tipneme jeden z kořenů. Lehce zjistíme, že $k_1 = -1$. Podělením polynomu charakteristické rovnice polynomem $k + 1$ získáme $k^2 - k - 6 = 0$. Kořeny této rovnice jsou $k_2 = -2$, $k_3 = 3$. Kořeny jsou různé, obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + C_3 \mathrm{e}^{3x} \,.$$

Příklad 3.5. *Řešte rovnici* $y^{(3)} - 3y'' - 6y' + 8y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^3 - 3k^2 - 6k + 8 = 0$. Její kořeny určíme obdobně jako v předchozím příkladě, jsou jimi $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $k_3 = -2$. Obecné řešení tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + C_3 \mathrm{e}^{-2x} \,.$$

Příklad 3.6. *Řešte rovnici* $y'' + 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 + 9 = 0$, její kořeny $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$. Obecné řešení tedy je

$$y(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x \,.$$

Příklad 3.7. *Řešte rovnici* $y'' + 3y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 + 3k + 4 = 0$, její kořeny jsou $k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \,.$$

Příklad 3.8. *Řešte rovnici* $y'' + 2y' + 3y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 + 2k + 3 = 0$, její kořeny jsou $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} i$. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} \cos \sqrt{2} x + C_2 \mathrm{e}^{-x} \sin \sqrt{2} x \,.$$

Příklad 3.9. *Řešte rovnici* $y^{(3)} - 7y'' + 15y' - 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^3 - 7k^2 + 15k - 9 = 0$, její kořeny jsou $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 3$. Kořeny jsou stejné, k jednomu z řešení musíme přidat x. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} + C_3 x \mathrm{e}^{3x} \,.$$

Příklad 3.10. *Řešte rovnici* $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 - 4k + 4 = 0$, její kořeny jsou $k_1 = k_2 = 2$. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 x \mathrm{e}^{2x} .$$

Příklad 3.11. *Řešte rovnici* $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 = 0$, její kořeny jsou $k_1 = k_2 = i$, $k_3 = k_4 = -i$. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x .$$

4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 4.1. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 5y^{(3)} + 11y'' - 11y' + 4y = 0$.

Příklad 4.2. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$.

Příklad 4.3. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 13y'' - 24y' + 36y = 0$.

Příklad 4.4. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 10y'' - 18y' + 9y = 0$.

Příklad 4.5. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Příklad 4.6. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 8y'' + 6y' - 9y = 0$.

Příklad 4.7. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 13y'' - 36y' + 36y = 0$.

5 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování

4.1 $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x + C_3 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + C_4 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)$.
4.2 $y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
4.3 $y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 x \mathrm{e}^{3x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.
4.4 $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
4.5 $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x + C_3 x^2 \mathrm{e}^x + C_4 \mathrm{e}^{-2x}$.
4.6 $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} + C_3 \mathrm{e}^{3x} + C_4 x \mathrm{e}^{3x}$.
4.7 $y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 x \mathrm{e}^{2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.

6 Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky II., Matfyzpress, Praha, 2003, kapitola 1.8

2. `is.muni.cz/th/78442/prif_b/bakalarska_prace.pdf`