Integrace racionálních funkcí

Budeme se zabývat integrací funkcí $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$ definovaných na $\mathbb{R}$ kromě bodů, ve kterých $Q(x) = 0$. Rozebereme si nejdříve dva speciální případy, poté přejdeme k obecnému postupu jak tyto funkce integrovat. Nejdříve popíšeme obecný postup a poté ho ilustrujeme na příkladu. Podrobnější obecný postup lze nalézt v Kopáčkově Matematické analýze pro fyziky I na str. 141. Uvedené vzorce se není třeba učit nazpaměť, je nutné pochopit postup.

1 Případ $R(x) = \frac{A}{(x-x_0)^k}$

Zde si zavedeme substituci $t = x - x_0$ a zintegrujeme t^{-k}. Obecně vyjde

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{A}{(-k+1)(x-x_0)^{-k+1}}, & k \geq 2, \\ A \ln|x-x_0| & k = 1. \end{cases}$$

Příklad 1. *Vypočítejte* $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^3}$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^3} = \begin{vmatrix} t = x-3 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int t^{-3}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2(x-3)^2} + C\,.$$

2 Případ $R(x) = \frac{(Ax+B)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}$, kde jmenovatel nemá reálné kořeny

Pokud je $A \neq 0$, snažíme se výraz upravit tak, aby čitatel byl derivací jmenovatele. Dostáváme

$$\int \frac{(Ax+B)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+\beta)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x + \frac{2B-\beta A}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}$$

První integrál je roven

$$= \begin{cases} \frac{A/2}{(-k+1)(x^2+\beta x+\alpha)^k} + C & k \geq 2, \\ \frac{A}{2}\ln(x^2+\beta x+\alpha) + C & k = 1. \end{cases}$$

Výpočet druhého integrálu si dále rozebereme. Jmenovatel upravíme tak, aby tvořil čtverec.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\beta x+\alpha)^k} = \int \frac{\mathrm{d}x}{((x+\beta/2)^2+\gamma^2)}\,,$$

kde $\gamma^2 = \alpha - \beta^2/4$. Dále pokračujeme substitucí $y = x + \beta/2$ a následně $z = y/\gamma$.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+\gamma^2)^k} = \frac{1}{\gamma^{2k}}\int \frac{\mathrm{d}y}{((y/\gamma)^2+1)^k} = \frac{1}{\gamma^{2k-1}}\int \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^k}\,.$$

Pro $k = 1$ dostáváme $\frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg} z$, kde $z = \frac{y}{\gamma} = \frac{x+\beta/2}{\sqrt{\alpha-\beta^2/4}}$. Pro vyšší k integrál vyjádříme pomocí integrálu s k o jedna menším a $\int \frac{z^2}{(1+z^2)^k}\,\mathrm{d}z$. Druhý integrál vyřešíme per partes. Podrobnější postup lze naleznout v Kopáčkovi.

Příklad 2. *Vypočítejte* $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{2x-3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{5}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x^2+2x+3| - \int \frac{5}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+2x+3| - \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \ln|x^2+2x+3| - \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \ln|x^2+2x+3| - \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t + C = \ln|x^2+2x+3| - \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C\,.$$

3 Obecný případ

Rozebereme obecný případ $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Nejdříve si uvědomíme, že případ, kdy stupeň polynomu P je větší nebo roven stupni polynomu Q, lze snadno převést na opačný případ. Polynomy totiž částečně podělíme a zintegrujeme členy x^k. Budeme se tedy zabývat případem, kdy stupeň polynomu P je menší než stupeň Q.

Polynom Q rozdělíme na součin

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{s}(x^2+\beta_j x+\alpha_j)^{l_j}\,,$$

kde a_i jsou reálné kořeny tohoto polynomu a trojčlen $x^2+\beta_j x+\alpha_j$ nemá reálné kořeny. Pak existuje rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{k_1,1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1,1}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{k_r,r}}{(x-a_r)^{k_r}} + \cdots + \frac{A_{1,r}}{x-a_r} +$$
$$+ \frac{C_{l_1,1}x+D_{l_1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\alpha_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{C_{1,1}x+D_{1,1}}{x^2+\beta_1 x+\alpha_1} + \cdots + \frac{C_{l_s,s}x+D_{l_s,s}}{(x^2+\beta_s x+\alpha_s)^{l_s}} + \cdots + \frac{C_{1,s}x+D_{1,s}}{x^2+\beta_s x+\alpha_s}\,.$$

Porovnáním členů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic pro tyto koeficienty. Koeficienty tedy vypočteme. Jednotlivé členy zintegrujeme podle prvních dvou případů.

Příklad 3. *Vypočítejte* $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,.$$

Koeficient Q si rozložíme pomocí kořenů kvadratické rovnice v x^2.

$$x^4+5x^2+4 = (x^2+1)(x^2+4)\,.$$

Hledáme tedy koeficienty A, B, C a D, aby platilo

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých exponentů dostáváme

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 0 = A + C, \\ x^2: &\quad 5 = B + D, \\ x: &\quad 0 = A + 4C, \\ 0: &\quad 4 = B + 4D. \end{aligned}$$

$$A = 0\,,\quad B = \frac{16}{3}\,,\quad C = 0\,,\quad D = -\frac{1}{3}\,.$$

Integrál tedy vyjádříme jako:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}x - \frac{16}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} + \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,x + C\,. \end{aligned}$$

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 7

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 6.4