



Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

POUŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU VE FYZICE A GEOMETRII

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D.,
RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.

Hradec Králové 2015

Obsah

1	Použití integrálního počtu ve fyzice	4
1.1	Kinematika	4
1.2	Potenciál, potenciální energie	5
1.3	Určení těžiště tělesa	6
1.4	Moment setrvačnosti	9
1.5	Gravitační síla mezi dvěma tělesy	10
1.6	Výpočet práce	12
1.7	Elektrostatika	13
1.8	Příklady k samostatnému procvičování	17
1.9	Výsledky příkladů s samostatnému procvičování	17
2	Geometrické aplikace určitého integrálu	18
2.1	Délka křivky	18
2.2	Plošný obsah rovinných množin	20
2.3	Výpočet objemů těles	23
2.4	Výpočet povrchů rotačních ploch	25
2.5	Příklady k samostatnému procvičování	26
2.6	Výsledky příkladů s samostatnému procvičování	27
3	Doporučená literatura	28

Předmluva

Tento studijní text je určen zejména jako studijní pomůcka pro studenty předmětu Doplnková matematika 2, vyučovaného v letním semestru 1. ročníku bakalářského studia oboru Fyzikálně-technická měření a výpočetní technika na Katedře fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Tento předmět od akademického roku 2014/15 vyučuji. Text jsem převážně (až na kapitoly 1.6 a 1.7) sepsal podle poznámek předchozího vyučujícího doc. Jana Kříže, které jsem doplnil podrobnějším slovním komentářem a obrázky a příklady k samostatnému procvičování. Text je rozdělen do dvou hlavních částí: první se zabývá použitím integrálů ve fyzice a druhá jejich geometrickými aplikacemi. Na konci každé části naleznete příklady k samostatnému procvičování se stručnými výsledky. Budu rád, když tento text bude sloužit mým studentům, ale i nejen jim. V případě, že v textu objevíte chybu, překlep či nejasnost, sdělte mi ji prosím na emailu jiri.lipovskyzavinac@uhk.cz.

V Černvíře, 16. 11. 2015

Jiří Lipovský

verze 1.3

1 Použití integrálního počtu ve fyzice

1.1 Kinematika

Uvedeme si jednoduché použití neurčitého integrálu pro výpočet rychlosti a polohy při pohybu v prostoru. Máme zadanou zadanou rychlost a polohu v čase t_0 a zrychlení jako funkci času. Určujeme závislost rychlosti a polohy na čase; protože se jedná o vektory, musíme určit všechny tři jejich složky.

Složky rychlosti jsou

$$v_i(t) = \int a_i(t) dt,$$

integrační konstantu zvolíme tak, aby se složky rychlosti v čase $t = 0$ rovnaly složkám zadané počáteční rychlosti $v_i(t_0) = v_{0i}$. Obdobně určíme složky polohy

$$x_i(t) = \int v_i(t) dt,$$

integrační konstantu volíme s ohledem na $x_i(t_0) = x_{0i}$.

Příklad 1.1. Rychlost jednorozměrného pohybu závisí na čase vztahem $v = 3t - \frac{1}{t^2}$. Určete závislost polohy na čase, znáte-li $x(2) = 0$ m.

Řešení: Polohu určíme z výše uvedeného vztahu

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{t} + C.$$

Konstantu určíme z počáteční podmínky $x(2) = 0$

$$\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{13}{2}.$$

Závislost polohy na čase tedy je

$$x(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{t} - \frac{13}{2}.$$

Příklad 1.2. Určete závislost složek rychlosti a polohy na čase při pohybu v rovině s $a_1(t) = 1 \text{ ms}^{-2}$, $a_2(t) = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{t+1 \text{ s}}$, když v čase $t = 0$ s je $v_1(0) = 2 \text{ ms}^{-1}$, $v_2(0) = 1 \text{ ms}^{-1}$, $x(0) = -2$ m a $y(0) = 3$ m.

Řešení: Ze vztahu pro rychlost dostaneme

$$v_1(t) = \int a_1(t) dt = \int dt = t + C_1,$$

dosazením počáteční podmínky máme

$$v_1(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2, \\ v_1 = t + 2.$$

Obdobně pro druhou složku

$$\begin{aligned}v_2(t) &= \int a_2(t) dt = \int \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1) + C_2, \\v_1(0) = 1 &\Rightarrow 1 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1, \\v_1 &= \ln(t+1) + 1.\end{aligned}$$

Složky polohy dostaneme integrací složek rychlosti podle času.

$$\begin{aligned}x(t) &= \int v_1(t) dt = \int (t+2) dt = \frac{t^2}{2} + 2t + C_3, \\x(0) = -2 &\Rightarrow -2 = C_3, \\x(t) &= \frac{t^2}{2} + 2t - 2.\end{aligned}$$

Obdobně určíme závislost y -ové souřadnice na čase. Při integraci použijeme metodu per partes

$$\begin{aligned}y(t) &= \int v_2(t) dt = \int \ln(t+1) dt + \int dt = \left| f = \ln(t+1), f' = \frac{1}{t+1}, \right. \\g' = 1, g = t+1 &= (t+1) \ln(t+1) - \int dt + \int dt = (t+1) \ln(t+1) + C_4, \\y(0) = 3 &\Rightarrow 3 = \ln 1 + C_4 \Rightarrow C_4 = 3, \\y(t) &= (t+1) \ln(t+1) + 3.\end{aligned}$$

Obdobně můžeme získat úhlovou rychlost z úhlového zrychlení a úhel z úhlové rychlosti.

1.2 Potenciál, potenciální energie

Pokud je intenzita pole K funkcí jedné proměnné a je závislá pouze na pozici objektu, je potenciál dán jako primitivní funkce k $-K$. Integrační konstantu můžeme volit libovolně (podle toho, kde zvolíme nulovou hladinu). Obdobně potenciální energie je primitivní funkcí k negativně vzaté síle $-F$. Síle, která závisí pouze na pozici objektu, říkáme *konzervativní*.

Příklad 1.3. Určete potenciální energii odpovídající elastické síle $F(x) = -kx$.

Řešení: Potenciální energie je

$$E_p(x) = \int -F(x) dx = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2 + E_0.$$

Příklad 1.4. Určete potenciální energii odpovídající elektrostatické síle $F_e(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1Q_2}{r^2}$.

Řešení: Potenciální energie je

$$E_p(r) = \int -F_e(x) dx = \int -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1Q_2}{r^2} dr = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + E_0.$$

Příklad 1.5. Určete potenciální energii odpovídající gravitační síle $F_g(r) = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Řešení: Potenciální energie je

$$E_p(r) = \int -F_g(x) dx = \int \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r} + E_0.$$

Jako nulovou hladinu potenciální energie můžeme vzít např. povrch Země (v tom případě dostaneme $E_0 = \kappa \frac{m_1 m_2}{R_Z}$) nebo nekonečno ($E_0 = 0$).

Příklad 1.6. Určete potenciální energii homogenního tíhového pole se silou $F_G(h) = -mg$.

Řešení: Potenciální energie je

$$E_p(h) = \int -F_G(x) dx = \int mg dh = mgh + E_0.$$

1.3 Určení těžiště tělesa

Budeme uvažovat tuhé těleso v homogenním tíhovém poli. Na hmotný bod v tíhovém poli působí moment síly $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_G$, kde \mathbf{r} je polohový vektor síly vzhledem k ose otáčení. Moment síly působící na element tělesa o hmotnosti dm je $\mathbf{r} \times \mathbf{g} dm$, kde \mathbf{g} je tíhové zrychlení. Celkový moment síly působící na těleso tedy bude $\mathbf{M} = \int_{(m)} \mathbf{r} \times \mathbf{g} dm$, kde se integruje přes celou hmotnost tělesa. Účinek momentu sil se rovná momentu výslednice sil, která má působíště v těžišti $\mathbf{M} = \mathbf{r}_T \times \mathbf{g} m$, kde \mathbf{r}_T je polohový vektor těžiště. Porovnáním obou vztahů pro momenty dostáváme pro polohu těžiště

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{m} \int_{(m)} \mathbf{r} dm,$$

pro jednotlivé složky dostáváme

$$x_T = \frac{1}{m} \int_{(m)} x dm, \quad y_T = \frac{1}{m} \int_{(m)} y dm, \quad z_T = \frac{1}{m} \int_{(m)} z dm.$$

Využijeme-li vztahu pro hustotu tělesa $m = \rho V$, tedy $dm = \rho dV$, dostáváme

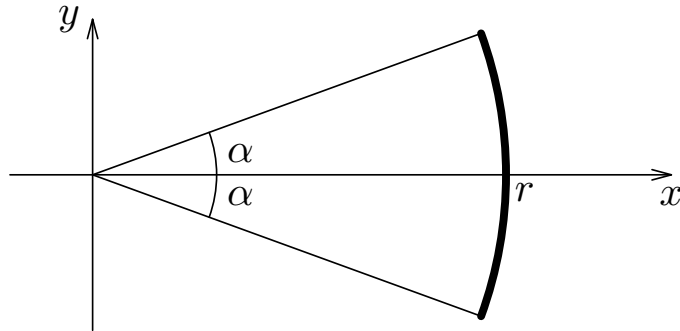
$$x_T = \frac{1}{\rho V} \int_{(V)} x \rho dV = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV, \quad y_T = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV, \quad z_T = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV.$$

Obdobně pro těleso se stále stejnou výškou dostáváme

$$x_T = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS, \quad y_T = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS, \quad z_T = \frac{1}{S} \int_{(S)} z dS$$

a pro těleso se stejným průřezem

$$x_T = \frac{1}{\ell} \int_{(\ell)} x d\ell, \quad y_T = \frac{1}{\ell} \int_{(\ell)} y d\ell, \quad z_T = \frac{1}{\ell} \int_{(\ell)} z d\ell.$$



Obrázek 1: Drát ve tvaru kruhového oblouku

Příklad 1.7. Stanovte polohu těžiště homogenního velmi tenkého drátu tvaru kruhového oblouku s poloměrem r a středovým úhlem 2α .

Řešení: Zvolíme si osu x tak, aby tvořila osu symetrie oblouku (viz obr. 1). Ze symetrie vidíme $y_T = z_T = 0$. Délka oblouku je $\ell = 2r\alpha$, oblouk můžeme parametrizovat $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ a malý element délky oblouku je $d\ell = r d\varphi$. Pro výpočet x -ové souřadnice těžiště použijeme vztah

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{\ell} \int_{(\ell)} x d\ell = \frac{1}{\ell} \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\alpha r} r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{r}{2\alpha} [\sin \varphi]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r}{\alpha} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Příklad 1.8. Určete polohu tenké homogenní desky omezené obloukem paraboly $y^2 = 2px$ a přímkou $x = a$ (viz obr. 2).

Řešení: Ze symetrie máme $y_T = z_T = 0$. Obsah desky vypočítáme tak, že ji „rozkrojíme“ na malé proužky o tloušťce dx a zintegrujeme. Dostáváme

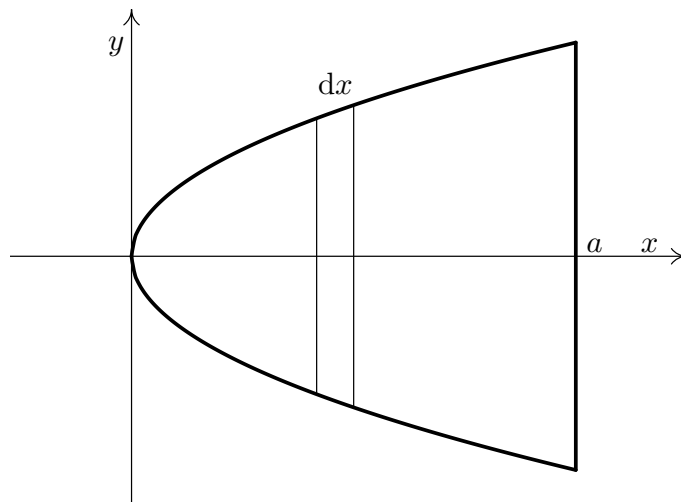
$$S = 2 \int_0^a y dx = 2\sqrt{2p} \int_0^a \sqrt{x} dx = 2\sqrt{2p} \frac{2}{3} [x^{3/2}]_0^a = \frac{4\sqrt{2p}}{3} a^{3/2}.$$

x -ová souřadnice těžiště tedy je s využitím $dS = 2y dx = 2\sqrt{2px} dx$

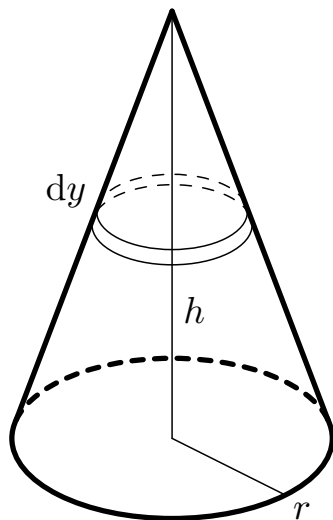
$$x_T = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS = \frac{1}{\frac{4\sqrt{2p}}{3} a^{3/2}} \int_0^a x 2\sqrt{2p} \sqrt{x} dx = \frac{3}{2a^{3/2}} \left[\frac{2x^{5/2}}{5} \right]_0^a = \frac{3}{5} a.$$

Příklad 1.9. Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele, který má poloměr podstavu r a výšku h .

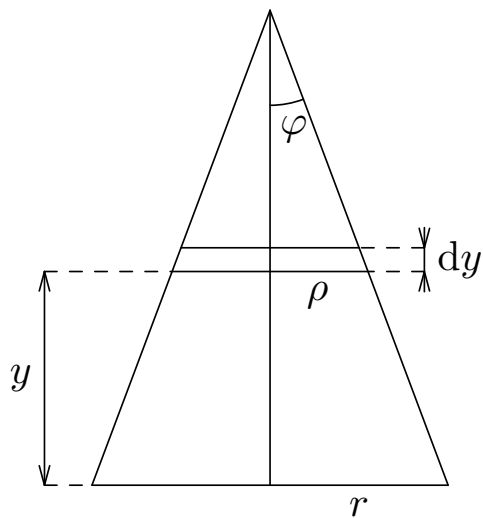
Řešení: Zvolíme si souřadnou soustavu tak, že osa y je osou kužele a počátek je ve středu jeho podstavu. Ze symetrie vidíme $x_T = z_T = 0$. Kužel rozřežeme



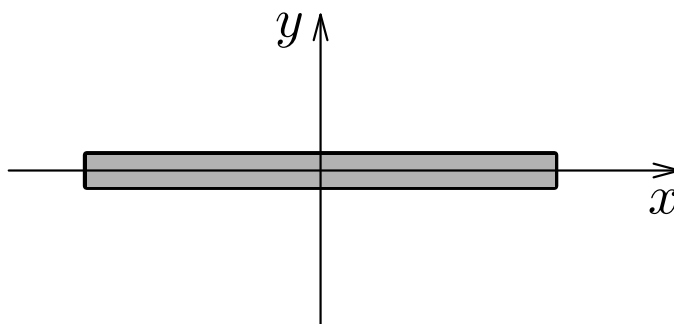
Obrázek 2: Deska tvaru paraboly



Obrázek 3: Rotační kužel



Obrázek 4: Řez kuželem



Obrázek 5: Velmi tenká tyč

na válce o výšce dy a poloměru ρ (viz obr. 3 a 4), dostáváme $dV = \pi\rho^2 dy$. Z geometrie máme (viz průřez na obr. 4)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{h} = \frac{\rho}{h-y} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{h}(h-y) = \rho.$$

Objem je

$$V = \int_0^h dV = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[h^2 y - h y^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

y -ovou souřadnici těžiště určíme ze vztahu

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV = \frac{3}{\pi r^2 h} \int_0^h y \pi \frac{r^2}{h^2} (h-y)^2 dy = \frac{3}{h^3} \int_0^h y (h-y)^2 dy = \\ &= \frac{3}{h^3} \left[h^2 \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} h y^3 + \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{3}{h^3} \left(\frac{h^4}{2} - \frac{2}{3} h^4 + \frac{h^4}{4} \right) = \frac{h}{4}. \end{aligned}$$

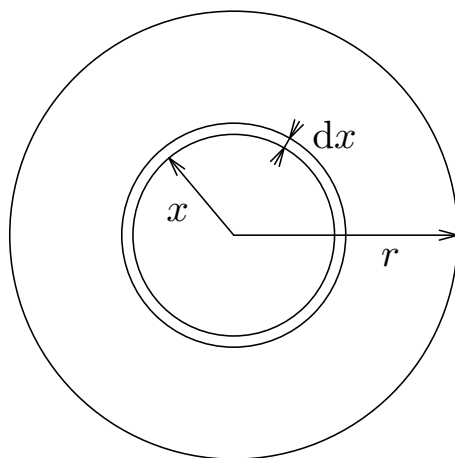
1.4 Moment setrvačnosti

Při určení momentu setrvačnosti tuhé těleso opět rozložíme na elementy o hmotnosti dm vzdálené r od osy otáčení. Příspěvek tohoto elementu do celkového momentu setrvačnosti je $dI = r^2 dm$, dostáváme tedy vztah $I = \int_{(m)} r^2 dm$.

Příklad 1.10. *Určete moment setrvačnosti homogenní velmi tenké tyče délky ℓ a hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm tyče kolmo na tyč.*

Řešení: Určujeme moment setrvačnosti tyče na obr. 5 vzhledem k ose y . Nechť tyč má hustotu ρ a průřez S . Pak pro element hmotnosti platí $dm = \rho S dx$. Pro moment setrvačnosti máme

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \rho S dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \rho S \left(\frac{\ell^3}{8 \cdot 3} + \frac{\ell^3}{8 \cdot 3} \right) = \rho S \ell \frac{\ell^2}{12} = \frac{1}{12} m \ell^2.$$



Obrázek 6: Řez válcem

Příklad 1.11. Určete moment setrvačnosti homogenního rotačního válce o hmotnosti m a poloměru r vzhledem k podélné ose válce.

Řešení: Nechť je délka válce ℓ a jeho hustota ρ . Rozřežeme válec na tenké slupky (v řezu na obr. 6). Element hmotnosti je $dm = \rho 2\pi x \ell dx$. Moment setrvačnosti podle výše uvedeného vztahu je

$$I = \int_0^r \rho 2\pi x^3 \ell dx = 2\pi\rho\ell \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r = 2\pi\rho\ell \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2}mr^2.$$

Příklad 1.12. Určete moment setrvačnosti koule poloměru r a hmotnosti m vzhledem k ose jdoucí středem.

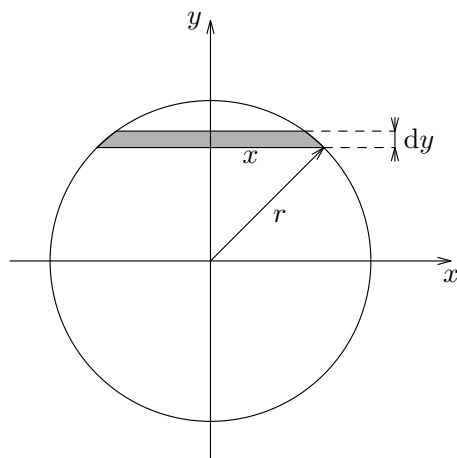
Řešení: Kouli budeme řezat na válcovité plátky o výšce dy a poloměru x . Element hmotnosti je $dm = \rho\pi x^2 dy$. Z Pythagorovy věty máme $x^2 + y^2 = r^2$, a tedy $dm = \rho\pi(r^2 - y^2) dy$. Z výše uvedeného vztahu pro moment setrvačnosti a výsledku předchozího příkladu dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_{(m)} \frac{1}{2}x^2 dm = \frac{1}{2} \int_{-r}^r \rho\pi(r^2 - y^2)^2 dy = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-r}^r (r^4 - 2r^2y^2 + y^4) dy = \\ &= \frac{1}{2}\rho\pi \left[r^4y - \frac{2}{3}r^2y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-r}^r = \rho\pi \frac{15r^5 - 10r^5 + 3r^5}{15} = \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho r^5 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \frac{2}{5}r^2 = \frac{2}{5}mr^2. \end{aligned}$$

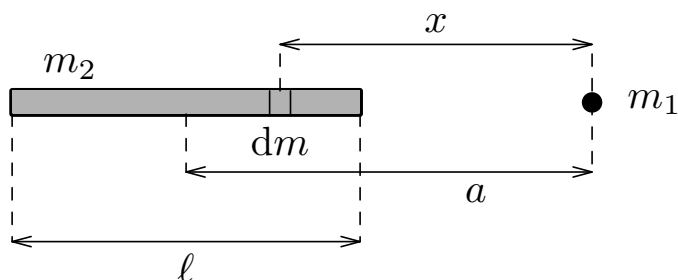
1.5 Gravitační síla mezi dvěma tělesy

Gravitační síla mezi dvěma hmotnými body (nebo dvěma koulemi) je

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2},$$



Obrázek 7: Řez koulí



Obrázek 8: Tyč a hmotný bod

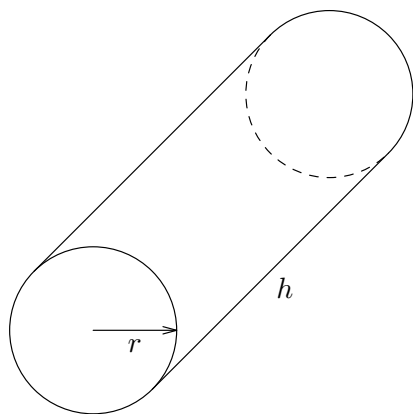
kde r je vzdálenost těchto bodů (resp. vzdálenost středů koulí), m_1 a m_2 jejich hmotnosti a κ gravitační konstanta. Tohoto vztahu využijeme a element gravitační síly mezi dvěma elementy hmotnosti tuhých těles vyjádříme jako

$$dF_g = \kappa \frac{dm_1 dm_2}{r^2}, \quad F_g = \int_{(m)} dF_g.$$

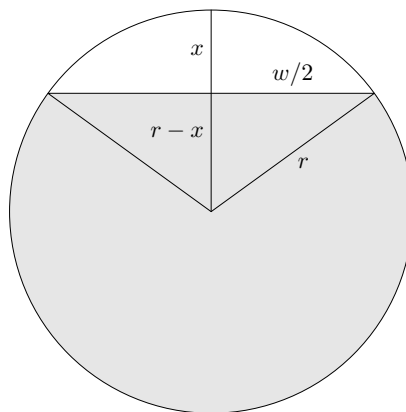
Příklad 1.13. Určete velikost gravitační síly, kterou na sebe vzájemně působí hmotný bod o hmotnosti m_1 a homogenní tyč délky l a hmotnosti m_2 , jejíž hmotný střed má vzdálenost a od hmotného bodu a hmotný bod leží v prodloužení podélné osy tyče.

Řešení: Nechť je průřez tyče S a její hustota ρ . Rozřežeme si ji na elementy dm dle obr. 8. Gravitační síla je podle výše uvedeného vztahu

$$F_g = \kappa m_1 \int_{a-\ell/2}^{a+\ell/2} \frac{\rho S dx}{x^2} = \kappa m_1 \rho S \left[-\frac{1}{x} \right]_{a-\ell/2}^{a+\ell/2} = \frac{\kappa m_1 m_2}{l} \left(\frac{1}{a-\ell/2} - \frac{1}{a+\ell/2} \right).$$



Obrázek 9: Válcový tank



Obrázek 10: Řez válcem

1.6 Výpočet práce

Práci určíme jako $W = \int_{(s)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, tj. integrujeme průmět síly do trajektorie po dráze, po které je těleso přemísťováno.

Příklad 1.14. Vypočítejte mechanickou práci, která je zapotřebí k vyčerpání vody z válcového tanku s vodou. Válec o poloměru podstavy r a výšce h má osu symetrie vodorovnou a otvor má na horním okraji (viz obr. 9).

Řešení: Zavedme si označení jako na obr. 10. Potom element objemu vody (tenká vrstva vody při hladině) je $dV = hw dx$, kde x je vzdálenost hladiny od otvoru. Z Pythagorovy věty vidíme, že

$$w = 2\sqrt{r^2 - (r-x)^2} = 2r\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2}.$$

Síla působící na element hmotnosti je rovna součinu tohoto elementu s gravitačním zrychlením, proto pro element práce dostáváme $dW = gx dm$. Práce je rovna

$$W = \int_0^{2r} g\rho hx 2r\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2} dx = 2g\rho hr \int_0^{2r} x\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2} dx.$$

Integrál vypočteme pomocí substituce

$$\begin{aligned} \int_0^{2r} x\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2} dx &= \left| t = 1 - \frac{x}{r}, dt = -\frac{1}{r} dx, x = r(1-t) \right| = \\ &= \int_1^{-1} r(1-t)(-r)\sqrt{1-t^2} dt = -r^2 \int_1^{-1} \sqrt{1-t^2} dt + r^2 \int_1^{-1} t\sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

Druhý integrál je nulový, protože integrujeme lichou funkci přes symetrický interval. V prvním integrálu zavedeme substituci $t = \sin u$, $dt = \cos u du$ a dostáváme

$$\begin{aligned} -r^2 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos^2 u du &= -r^2 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = |v = 2u, dv = 2du| = \\ &= -r^2 \int_{\pi}^{-\pi} \frac{1}{4} dv - r^2 \int_{\pi}^{-\pi} \frac{1}{4} \cos v dv = -\frac{r^2}{4} [v + \sin v]_{\pi}^{-\pi} = \frac{1}{2} \pi r^2. \end{aligned}$$

Práce tedy je

$$W = 2ghr \frac{1}{2} \pi r^2 = mgr = -E_p,$$

což je záporně vzatá potenciální energie těžiště vzhledem k otvoru.

Příklad 1.15. *Určete vztah pro práci plynu při izotermickém ději.*

Řešení: Při izotermickém ději platí $pV = c$, kde c je konstanta, z toho $p = \frac{c}{V}$. Element práce je roven $dW = F ds = pS ds = p dV$. Práce je rovna

$$W = \int dW = \int_{V_0}^{V_1} \frac{c}{V} dV = c \ln \frac{V_1}{V_0},$$

kde V_0 je počáteční a V_1 konečný objem.

Příklad 1.16. *Určete vztah pro práci plynu při adiabatickém ději.*

Řešení: Pro adiabatický děj platí $pV^\kappa = c$, kde c a κ jsou konstanty. Obdobně jako v předchozím příkladě dostáváme

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{c}{V^\kappa} dV = c \left[\frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa} \right]_{V_0}^{V_1} = c \frac{V_1^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}}{1-\kappa}.$$

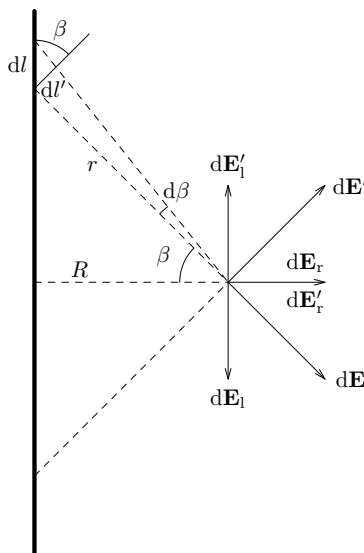
1.7 Elektrostatika

Intenzita elektrického pole je rovna součtu intenzit způsobených jednotlivými elementy náboje $d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0$, kde \mathbf{r}_0 je jednotkový vektor ve směru od elementu náboje do bodu, ve kterém intenzitu zjišťujeme.

Příklad 1.17. *Určete intenzitu pole nabitě přímky s lineární hustotou náboje τ ve vzdálenosti R od této přímky.*

Řešení: Náboj v části přímky o délce $d\ell$ je z definice lineární hustoty náboje $dQ = \tau d\ell$. Tento náboj způsobuje v bodě vzdáleném R od přímky intenzitu $d\mathbf{E}$ (viz obr. 11). Tuto intenzitu lze rozložit do dvou složek – složky rovnoběžné s přímkou $d\mathbf{E}_1$ a složky kolmé k přímce $d\mathbf{E}_r$. Složka \mathbf{E}_1 se vyruší s příspěvkem opačné části přímky $d\mathbf{E}'_1$, zatímco $d\mathbf{E}_r$ se sečte se stejně velkou složkou $d\mathbf{E}'_r$. Velikost kolmé složky je

$$dE_r = dE \cos \beta = \frac{\tau d\ell \cos \beta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



Obrázek 11: Pole nabité přímky

Z geometrie vidíme $d\ell' = d\ell \cos \beta = r d\beta$, z tohoto vztahu dosadíme do předchozí rovnice za $d\ell \cos \beta$

$$dE_r = \frac{\tau d\beta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau d\beta \cos \beta}{4\pi\epsilon_0 R},$$

neboť $R = r \cos \beta$. Velikost celkové intenzity tedy je

$$E = E_r = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin \beta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

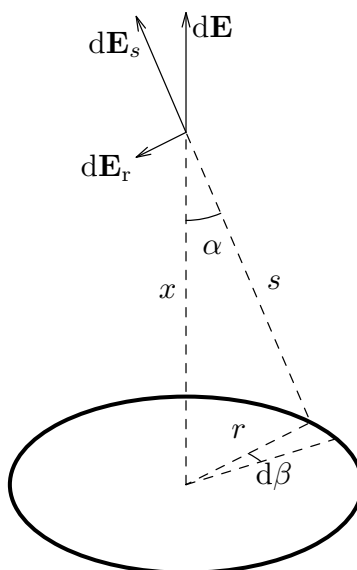
Příklad 1.18. Určete velikost intenzity pole nabitého prstence na jeho ose. Hustota náboje je μ , poloměr prstence r a vzdálenost bodu, ve kterém intenzitu měříme, od středu prstence je x .

Řešení: Situace je znázorněna na obr. 12. Elektrostatická síla od elementu prstence je $d\mathbf{E}_s$, která se dá rozložit na složku rovnoběžnou s osou prstence $d\mathbf{E}$ a složku k ní kolmou $d\mathbf{E}_r$. Příspěvky $d\mathbf{E}_r$ od opačných stran prstence se vyruší, takže nás zajímá pouze velikost $d\mathbf{E}$. Ta je

$$dE = dE_s \cos \alpha = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 s^2} \cos \alpha.$$

Element náboje $dQ = \mu d\ell = \mu r d\beta$ dosadíme do vztahu výše

$$dE = \frac{\mu r d\beta}{4\pi\epsilon_0 s^2} \cos \alpha = \frac{\mu r d\beta}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$



Obrázek 12: Pole nabitého prstence

Intenzita tedy je

$$E = \frac{\mu r}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} d\beta =$$

$$= \frac{\mu r}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} 2\pi = \frac{\mu}{2\epsilon_0} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Příklad 1.19. Určete intenzitu nabitě roviny (plošná hustota náboje σ) ve vzdálenosti x od ní.

Řešení: Využijeme obrázku v předchozím příkladu. Z geometrie vidíme, že $s d\alpha = \cos \alpha dr$, zároveň $s = \frac{x}{\cos \alpha}$. Kombinací těchto dvou vztahů dostáváme $dr = \frac{x d\alpha}{\cos^2 \alpha}$. Využijeme vztahu mezi lineární a plošnou hustotou $\mu = \sigma dr$ a výsledku předchozího příkladu.

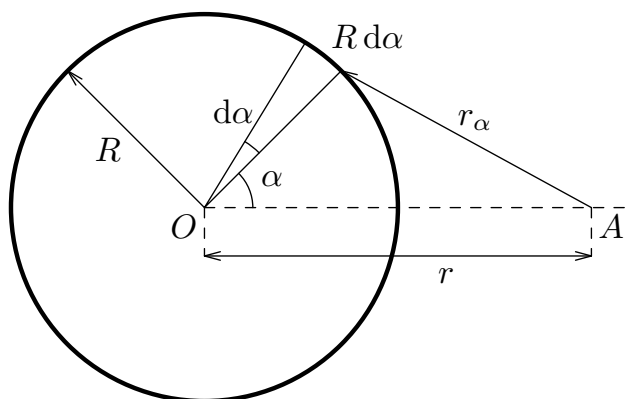
$$dE = \frac{\sigma dr \sin \alpha \cos \alpha}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma \sin \alpha \cos \alpha}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} \frac{x d\alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sigma \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2\epsilon_0 \cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Velikost intenzity tedy je

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \alpha]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Všimněte si, že intenzita nezávisí na vzdálenosti od roviny.



Obrázek 13: Pole nabité kulové slupky

Příklad 1.20. Určete potenciál a intenzitu nabité kulové slupky o poloměru R ve vzdálenosti r od jejího středu.

Řešení: Budeme uvažovat prstenec elementární šířky $R d\alpha$ kolmý k ose OA (viz obr. 13). Tento prstenec má náboj

$$dQ = \sigma(2\pi R \sin \alpha) R d\alpha = 2\pi R^2 \sigma \sin \alpha d\alpha .$$

Z kosinové věty máme $r_\alpha^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha$, diferencováním tohoto vztahu dostáváme $2r_\alpha dr_\alpha = 2Rr \sin \alpha d\alpha$. Odsud vyjádříme $\sin \alpha d\alpha$ a dosadíme do vztahu pro element náboje

$$dQ = \frac{2\pi R \sigma}{r} r_\alpha dr_\alpha .$$

Element potenciálu je

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r_\alpha} = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0 r} dr_\alpha .$$

Pokud A leží vně plochy ($r \geq R$), dostáváme

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0 r} \int_{r-R}^{r+R} dr_\alpha = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} .$$

Pokud A leží uvnitř plochy ($r < R$), dostáváme

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0 r} \int_{R-r}^{r+R} dr_\alpha = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} .$$

V prvním případě dostáváme potenciál nabitého bodu, uvnitř kulové slupky je potenciál konstantní. Intenzitu určíme ze vztahu $\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dr} \mathbf{r}_0$, její velikost je

tedy záporně vzatou derivací potenciálu.

$$\begin{aligned} r \geq R: & \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ r < R: & \quad E = 0 \end{aligned}$$

Uvnitř koule je intenzita nulová, jedná se o Faradayovu klec.

1.8 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 1.21. Určete závislost složek rychlosti a složek polohy na čase pro pohyb v rovině s $a_1(t) = (t + 2 \text{ s}) \cdot 4 \text{ ms}^{-3}$, $a_2(t) = (t^2 + 1 \text{ s}^2) \cdot 3 \text{ ms}^{-4}$, počátečními hodnotami složek rychlosti $v_1(0) = 1 \text{ ms}^{-1}$, $v_2(0) = 0 \text{ ms}^{-1}$ a polohy $x(0) = -1 \text{ m}$, $y(0) = 2 \text{ m}$.

Příklad 1.22. Určete polohu těžiště tenké homogenní půlkruhové desky o poloměru r se středem v počátku.

Příklad 1.23. Určete moment setrvačnosti rotačního kužele o výšce h a poloměru podstavy R vzhledem k ose procházející osou jeho symetrie.

Příklad 1.24. Dokažte, že gravitační síla mezi hmotným bodem a homogenní koulí je stejná jako v případě, kdy kouli nahradíme hmotným bodem o stejné hmotnosti. (Rozdělte kouli na kulové slupky a dále postupujte obdobně jako v příkladu 1.20).

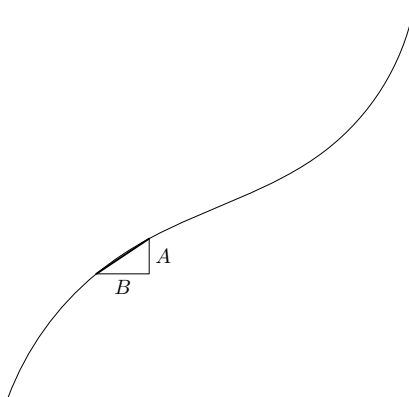
1.9 Výsledky příkladů s samostatnému procvičování

1.21 $v_1(t) = 2t^2 + 8t + 1$, $v_2(t) = t^3 + 3t$,

$x(t) = \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 + t - 1$, $y(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + 2$.

1.22 $x_T = \frac{4r}{3\pi}$, $y_T = 0$.

1.23 $I = \frac{3}{10}mR^2$.



Obrázek 14: K délce křivky

2 Geometrické aplikace určitého integrálu

2.1 Délka křivky

Křivka je zobrazení φ intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ do \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3). Množinu $\varphi([a, b])$ nazýváme geometrickým obrazem křivky. Délku křivky vypočítáme tak, že ji aproximujeme lomenými čarami a sčítáme jejich délky; zjemňujeme dělení a díváme se, zda se výsledek blíží nějakému číslu obdobně jako v definici Riemannova integrálu.

a) křivka parametricky zadaná

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad t \in [a, b].$$

Předpokládáme, že f_i mají spojité derivace. Pak je délka křivky rovna

$$s = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^N (f'_i(t))^2} dt, \quad N = 2, 3. \quad (1)$$

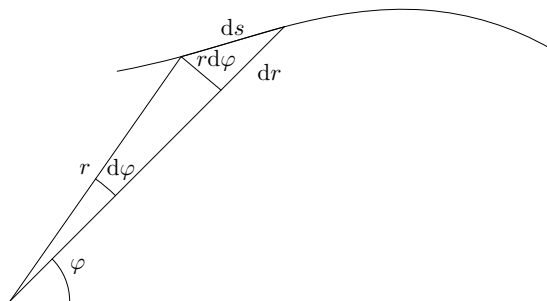
b) křivka zadaná jako graf spojitě derivovatelné funkce

Podle obr. 14 $\frac{A}{B} = f'(x)$, kde $B = dx$. Potom z Pythagorovy věty $ds = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Dostáváme

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2)$$

Jiný způsob odvození je pomocí vztahu (1) s použitím $x = x$, $y = f(x)$.

Příklad 2.1. Určete délku kružnice zadané parametricky $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.



Obrázek 15: Křivka zadaná v polárních souřadnicích

Řešení: Určíme derivace

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t.$$

S využitím vztahu (1) dostáváme

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = 2\pi r.$$

Příklad 2.2. Určete délku kružnice zadané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$.

Řešení: Horní půlkruh popíšeme rovnicí $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x = [-r, r]$, dolní půlkruh $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $x = [-r, r]$. Derivace je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Délka křivky je (počítáme integrál přes horní polovinu a násobíme dvěma)

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = |x = rt, \quad dx = r dt, \\ x = -r &\Rightarrow t = -1, \quad x = r \Rightarrow t = 1| = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - r^2 t^2}} r dt = \\ &= 2r \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = 2r [\arcsin t]_{-1}^1 = 2r \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2\pi r. \end{aligned}$$

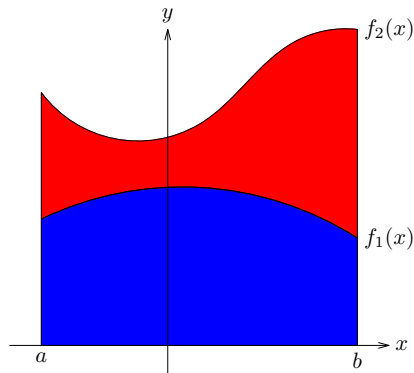
c) křivka zadaná v polárních souřadnicích

Křivka je zadána vztahem $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Podle obr. 15 a Pythagorovy věty dostáváme

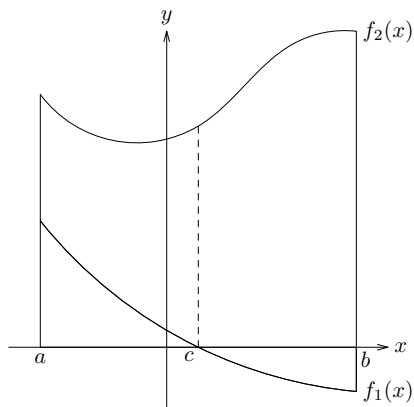
$$(ds)^2 = (r d\varphi)^2 + (dr)^2 = f(\varphi)^2 (d\varphi)^2 + f'(\varphi)^2 (d\varphi)^2.$$

Z toho

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi, \\ s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi. \end{aligned}$$



Obrázek 16: Obsah plochy mezi křivkami



Obrázek 17: Obsah plochy mezi křivkami, když f_1 nabývá záporných hodnot

Příklad 2.3. Určete délku kružnice zadané v polárních souřadnicích $r = R$.

Řešení: S využitím předchozího vztahu dostáváme

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0} d\varphi = 2\pi R.$$

2.2 Plošný obsah rovinných množin

- a) Množina M je omezena grafy funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ s $f_1(x) \leq f_2(x)$ pro $x \in [a, b]$ a přímkou $x = a$, $x = b$. Obsah plochy mezi křivkami (vybarvený červeně na obr. 16) je rozdílem plochy pod křivkou $f_1(x)$ (vybarvené některou z barev) a plochy pod křivkou $f_2(x)$ (vybarvené modře). Tedy

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

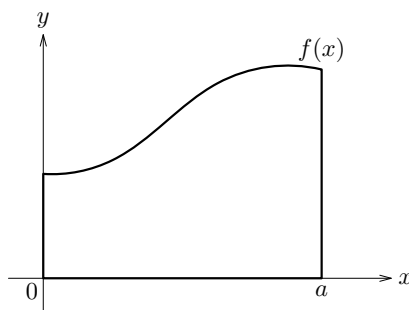
Stejný vztah platí i pro případ, kdy některá z funkcí nabývá záporných hodnot (viz obr. 17). V tomto případě dostáváme

$$S = \int_a^c (f_2(x) - f_1(x)) dx + \int_c^b f_2(x) dx - \int_c^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Stejný vztah bude platit i v případě, kdy záporných hodnot nabývá $f_2(x)$.

- b) $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená uzavřenou křivkou danou parametricky $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $t \in [a, b]$, $f_i(a) = f_i(b)$, $i = 1, 2$.

Příklad 2.4. Parametricky popište křivku na obrázku 18 a nalezněte vztah pro obsah plochy uzavřené touto křivkou pomocí parametrického popisu.



Obrázek 18: Křivka zadaná parametricky

Řešení: Popíšeme postupně čtyři části křivky.

1.

$$x = f_1(t) = t, \quad y = f_2(t) = 0, \quad t \in [0, a].$$

2.

$$x = f_1(t) = a, \quad y = f_2(t) = t - a, \quad t \in [a, f(a) + a].$$

3.

$$x = f_1(t) = -t + f(a) + 2a, \quad y = f_2(t) = f(f(a) + 2a - t), \quad t \in [f(a) + a, f(a) + 2a].$$

4.

$$x = f_1(t) = 0, \quad y = f_2(t) = -t + f(a) + 2a + f(0), \quad t \in [f(a) + 2a, f(a) + 2a + f(0)].$$

Obsah můžeme určit ze vztahu pro obsah plochy pod křivkou:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a f(x) dx = \int_{f(a)+2a}^{f(a)+a} y(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{f(a)+2a}^{f(a)+a} f_2(t) f_1'(t) dt = \\ &= - \int_{f(a)+a}^{f(a)+2a} f_2(t) f_1'(t) dt = - \int_0^{f(a)+2a+f(0)} f_2(t) f_1'(t) dt, \end{aligned}$$

neboť integrály přes části 1), 2) a 4) jsou nulové.

Předchozí vztah platí i obecně. Uvažujme uzavřenou křivku parametrizovanou parametrem t . Má-li v některém bodě parametr t hodnotu a a po obkroužení hodnotu b , lze obsah plochy uzavřené křivkou vyjádřit jako

$$S = - \int_a^b f_1'(t) f_2(t) dt.$$

Příklad 2.5. Určete obsah kruhu o poloměru r metodou a), tedy omezením plochy dvěma křivkami.

Řešení: V našem případě $f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Proto

$$\begin{aligned} S &= \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = |x = r \cos \varphi, \\ &dx = -r \sin \varphi d\varphi, \quad x = -r \Rightarrow \varphi = -\pi, \quad x = r \Rightarrow \varphi = 0| = \\ &= 2 \int_{-\pi}^0 r \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} r (-\sin \varphi) d\varphi = 2r^2 \int_{-\pi}^0 \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \left| \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right| = r^2 \left([\varphi]_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \cos 2\varphi d\varphi \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Druhý integrál v předposledním výrazu je roven nule, protože integrujeme kosinus přes celou periodu.

Příklad 2.6. *Určete obsah kruhu o poloměru r metodou b), tedy pomocí parametrizace.*

Řešení: Kružnici, která omezuje kruh, parametrizujeme pomocí

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Pro derivaci platí

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r \sin \varphi.$$

Proto

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^{2\pi} (-r \sin \varphi) r \sin \varphi d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \left([\varphi]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Opět integrujeme sinus přes celou periodu, proto druhý integrál v předposledním výrazu je nulový.

- c) M je dána dvěma polopřímkami v polárních souřadnicích $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ a křivkou $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

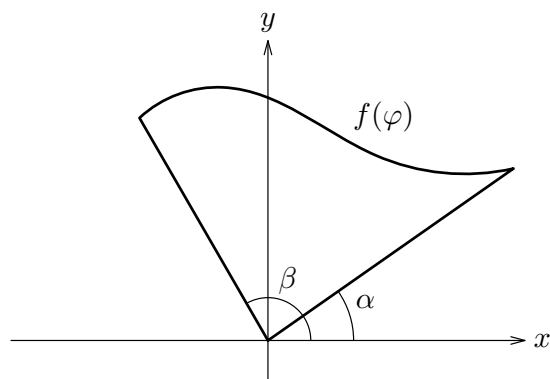
V tomto případě si plochu na obr. 19 rozdělíme na elementární trojúhelníky s jedním vrcholem v počátku souřadnic a dvěma vrcholy na křivce. Výška trojúhelníků je přibližně $f(\varphi)$, délka nejmenší strany je $f(\varphi) d\varphi$. Obsah je tedy

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$

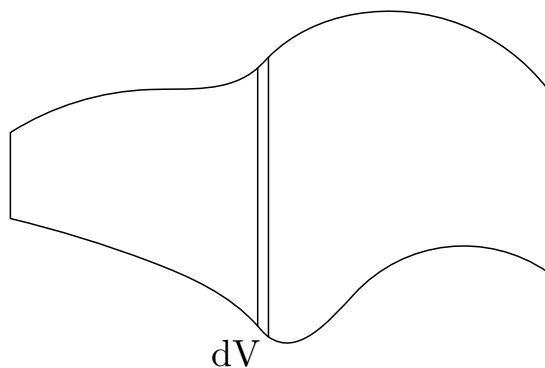
Příklad 2.7. *Určete obsah kruhu o poloměru R pomocí metody c), křivky zadané v polárních souřadnicích.*

Řešení: Zde $f(\varphi) = R$, tedy s využitím předchozího vztahu

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi = \frac{R^2}{2} [\varphi]_0^{2\pi} = \pi R^2.$$



Obrázek 19: Obsah plochy omezené křivkou danou v polárních souřadnicích



Obrázek 20: K výpočtu objemu tělesa, bod a)

2.3 Výpočet objemů těles

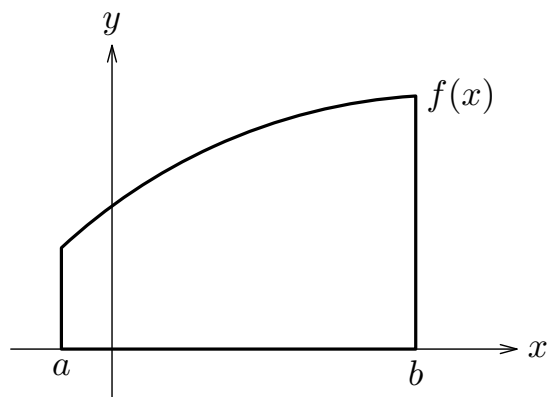
- a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$ a $x = b$, $a < b$ a pro všechna $x \in [a, b]$ známe plošný obsah $S(x)$.

Element objemu (viz obr. 20) je $dV = S(x) dx$. Vztah pro objem tedy je

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

- b) Těleso je tvořeno otáčením množiny M (ta leží v rovině xy) kolem osy x . Množina M je omezena přímkami $x = a$ a $x = b$, $a < b$, osou x , a grafem funkce $y = f(x)$, $0 \leq f(x)$ (případně grafy funkcí f_1, f_2 , kde $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) pro $x \in [a, b]$ (viz obr. 21).

Obsah řezu je $\pi f^2(x)$, resp. $\pi(f_2^2(x) - f_1^2(x))$, integrací podle proměnné



Obrázek 21: K výpočtu objemu tělesa, bod b)

x tedy dostáváme

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad \text{resp.} \quad \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

- c) V tomto případě je těleso vytvořeno otáčením množiny M z bodu b) s $a \geq 0$ kolem osy y .

Těleso si rozdělíme na tenkými řezy soustřednými válci s osou symetrie y (viz obr. 22). Element objemu pak je

$$dV = f(x) dx 2\pi x.$$

Integrací dostáváme

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx, \quad \text{resp.} \quad V = 2\pi \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Příklad 2.8. Určete objem koule o poloměru r metodou a).

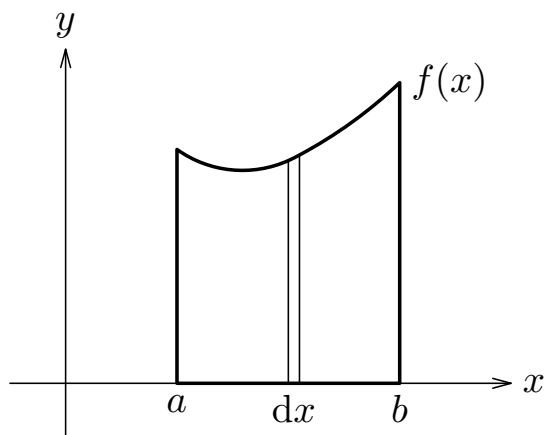
Řešení: Objem je

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \\ &= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Příklad 2.9. Určete objem koule o poloměru r metodou b).

Řešení: V tomto případě je funkce f rovna $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Dostáváme

$$V = \pi \int_{-r}^r f^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$



Obrázek 22: K výpočtu objemu tělesa, bod c)

Příklad 2.10. *Určete objem koule o poloměru r metodou c).*

Řešení: Horní polokouli popíšeme popisem v bodě c) s funkcí $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$. Výsledek musíme tedy vynásobit ještě dvěma, abychom dostali celou kouli.

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \cdot 2\pi \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = |y = r^2 - x^2, \quad dy = -2x dx, \\
 x = 0 &\Rightarrow y = r, \quad x = r \Rightarrow y = 0| = 4\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \int_r^0 \sqrt{y} dy = \\
 &= 2\pi \int_0^r y^{1/2} dy = 2\pi \left[\frac{2y^{3/2}}{3}\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3.
 \end{aligned}$$

2.4 Výpočet povrchů rotačních ploch

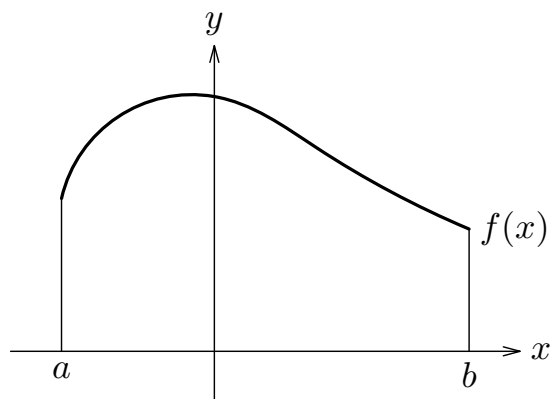
Uvažujeme plochu v \mathbb{R}^3 , která vznikne rotací okolo osy x (y) křivky zadané parametricky

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad t \in [a, b]$$

s $f_2 \geq 0$ ($f_1 \geq 0$). Potom její obsah spočteme pomocí vztahu

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \int_a^b f_2(t) \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2} dt, \\
 \left(P &= 2\pi \int_a^b f_1(t) \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2} dt \right).
 \end{aligned}$$

Vztah odvodíme tak, že si uvědomíme (viz obr. 23), že element obsahu plochy



Obrázek 23: K odvození výpočtu povrchů rotačních ploch

je dán jako

$$dP = 2\pi y ds = 2\pi f_2(t) \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2} dt.$$

Speciálně, je-li graf funkce $y = f(x)$, $0 \leq f(x)$, $x \in [a, b]$ rotovaný kolem osy x , dostáváme

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 2.11. Vypočítejte povrch jednotkové koule.

Řešení: Zmíněnou křivku (jednotkovou polokružnici) si parametrizujeme

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in (0, \pi).$$

Podle výše zmíněného vztahu je povrch koule

$$P = 2\pi \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi[-\cos t]_0^\pi = -2\pi(-1 - 1) = 4\pi.$$

2.5 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 2.12. Určete délku asteroidy parametrizované $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Příklad 2.13. Určete délku oblouku kardiody parametrizované polárními souřadnicemi $r = a(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Při výpočtu můžete použít vztahu $\sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2}$.

Příklad 2.14. Odvoďte vztah pro obsah elipsy o poloosách a a b dané rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Při jednom ze způsobů výpočtu můžete použít vztah

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x).$$

Příklad 2.15. *Odvoďte vztah pro objem a povrch kužele o poloměru podstavy R a výšce h .*

2.6 Výsledky příkladů s samostatnému procvičování

2.12 $6a$.

2.13 $8a$.

2.14 $ab\pi$.

2.15 $\frac{1}{3}\pi R^2 h, \pi R(R + \sqrt{R^2 + h^2})$.

3 Doporučená literatura

1. Miroslava Jarešová, Ivo Volf: Integrální počet ve fyzice, studijní text Fyzikální olympiády,
<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf>
2. Zdeněk Kadeřábek, Derivace a integrál ve fyzice,
<http://brkos.math.muni.cz/files/download/Derivace%20a%20integr%C3%A1l%20ve%20fyzice.pdf>
3. Bohumil Vybíral, Elektrostatika, studijní text Fyzikální olympiády,
<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elstat.pdf>
4. Eva Schlesingerová, Geometrické aplikace určitého integrálu,
<https://www.math.muni.cz/xschlesi/dp/web/i21.html>