Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

MATEMATIKA 1

RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.

Hradec Králové 2013 – 2018

Obsah

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OP VK „Inovace studijních oborů zajišťovaných katedrami PřF UHK"
Registrační číslo: CZ.1.07/2.2.00/28.0118

Předmluva z roku 2014

Tento soubor studijních textů vznikl v letech 2013 až 2014 jako podpora pro studenty předmětů Matematika 1 a Matematika 2 na Katedře fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Předměty jsou vyučovány v zimním, resp. letním semestru 1. ročníku NMgr. studia oboru Fyzikální měření a modelování. Studijní texty pokrývají hlavně diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných a metody řešení diferenciálních rovnic. Je v nich nejdříve shrnuta potřebná teorie; věty jsou uvedeny většinou bez důkazů. Student, který by se chtěl s teorií seznámit hlouběji, může využít existujících učebnic, např. série skript J. Kopáčka „Matematická analýza pro fyziky" a „Příklady z matematiky pro fyziky". Největší důraz je kladen na dostatek řešených příkladů, které mají studentovi pomoci pochopit aplikaci dané látky. U většiny témat jsou uvedeny také neřešené příklady k samostatnému procvičení; student si dále látku zopakuje i v domácích úkolech, které jsou ke stažení na stránkách předmětů `http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching.html`. Pokud ve studijních textech najdete chybu, uvítám, pokud mě na to upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

Při přípravě těchto skript jsem byl podporován projektem OP VK „Inovace studijních oborů zajišťovaných katedrami PřF UHK", registrační číslo: CZ.1.07/2.2.00/28.0118. Dále děkuji i svým studentům za to, že mě upozornili na chyby v textech.

V Hradci Králové 18. 12. 2014 — Jiří Lipovský

Předmluva z roku 2018

Vzhledem k tomu, že řešení příkladů v původních textech byly většinou relativně stručná, rozhodl jsem se původní texty přepracovat a hlavně detailněji popsat postup řešení příkladů. Doufám, že přepracovaný text bude sloužit studentům lépe. Stále platí prosba o upozornění na chyby v textu, které se jistě po úpravách objeví.

V Hradci Králové, 20. 8. 2018 — Jiří Lipovský

verze 1.0

1 Lineární algebra

1.1 Vektorové prostory

Jedním z nejužívanějším pojmů v lineární algebře je pojem vektorového prostoru. Abychom ho zavedli správně, začněme dvěma definicemi.

1.2 Definice tělesa

Číselným tělesem nazveme podmnožinu komplexních čísel T, která má alespoň dva prvky a pro kterou platí:

1. $\alpha \in T, \beta \in T \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta \in T\,,$
2. $\alpha \in T, \beta \in T \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \in T\,,$
3. $\alpha \in T \quad \Rightarrow \quad -\alpha \in T\,,$
4. $\alpha \in T, \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1/\alpha \in T\,.$

Tělesem jsou například komplexní čísla, reálná čísla nebo racionální čísla: Méně triviálním tělesem jsou zbytkové třídy $\mathbb{Z}_p$ po dělení prvočíslem p (dělení je zde definováno jako násobení inverzním prvkem).

1.3 Definice vektorového prostoru

Nyní zadefinujeme *vektorový prostor*.
Nechť jsou dány

1. číselné těleso T,
2. neprázdná množina V,
3. zobrazení $\oplus\, V \times V \to V$,
4. zobrazení $\odot\, T \times V \to V$.

Máme tedy číselné těleso, neprázdnou množinu, která bude vektorovým prostorem, a dvě zobrazení, která udávají sčítání vektorů a násobení vektoru číslem. Řekneme, že V je vektorový prostor nad tělesem T s operacemi $\oplus$ a $\odot$, pokud platí.

1. V s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu
   (a) existuje nulový vektor $\mathbf{0}$, že pro všechna $\mathbf{v} \in V$ platí $\mathbf{v} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{v}$,
   (b) pro všechna $\mathbf{v}$ existuje inverzní prvek $\mathbf{w}$, že $\mathbf{v} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{0}$,
   (c) sčítání vektorů je asociativní $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w})$,
   (d) sčítání vektorů je komutativní $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$,
2. násobení skalárem je asociativní $a \odot (b \odot \mathbf{v}) = (ab) \odot \mathbf{v}$,

3. $1 \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, kde 1 je jednotkový prvek tělesa T,

4. sčítání a násobení je distributivní

   (a) $a \odot (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (a \odot \mathbf{v}) \oplus (a \odot \mathbf{w})$,

   (b) $(a + b) \odot \mathbf{v} = (a \odot \mathbf{v}) \oplus (b \odot \mathbf{v})$.

1.4 Příklady vektorových prostorů

Příklad 1.1. *Asi nejznámějším příkladem vektorového prostoru je $\mathbb{R}^n$. Vektory zapíšeme jako uspořádané n-tice čísel*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Sčítáme a násobíme číslem po složkách

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} , \quad \alpha \odot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} .$$

Příklad 1.2. *Dalším příkladem vektorového prostoru je prostor všech matic typu $m \times n$, tj. tabulky komplexních čísel $m \times n$* $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$. *Sčítání matic je definováno následovně*

$$M \oplus N = \begin{pmatrix} m_{11} + n_{11} & m_{12} + n_{12} & \dots & m_{1n} + n_{1n} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} & \dots & m_{2n} + n_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} + n_{m1} & m_{m2} + n_{m2} & \dots & m_{mn} + n_{mn} \end{pmatrix}$$

a násobení skalárem takto

$$\alpha \odot M = \begin{pmatrix} \alpha m_{11} & \alpha m_{12} & \dots & \alpha m_{1n} \\ \alpha m_{21} & \alpha m_{22} & \dots & \alpha m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha m_{m1} & \alpha m_{m2} & \dots & \alpha m_{mn} \end{pmatrix} .$$

Příklad 1.3. *Dále můžeme uvést třeba vektorový prostor všech polynomů s operacemi*

$$(p \oplus q)(x) = p(x) + q(x) , \quad (\alpha \odot p)(x) = \alpha p(x) .$$

1.5 Lineárně nezávislé vektory

Množina vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ je *lineárně závislá*, pokud existují taková komplexní čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (přičemž alespoň jedno z nich je nenulové), pro která platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}\,.$$

V opačném případě je pak tato množina lineárně nezávislá.

Příklad 1.4. *Určete, zda vektory* $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ *jsou lineárně závislé.*

Řešení: Když sečteme první vektor s dvojnásobkem druhého vektoru a (-1)-násobkem třetího vektoru, dostaneme ve všech složkách nulu. Vektory jsou tedy lineárně závislé.

Příklad 1.5. *Zkonstruujte lineárně nezávislý vektor k vektorům* $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Řešení: Pokud bychom zvolili vektor, jehož třetí složka je nulová, např. $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$, byl by a-násobkem prvního vektoru plus b-násobkem druhého vektoru. Stačí tedy zvolit libovolný vektor, který má třetí složku nenulovou, protože žádnou kombinací těchto dvou vektorů ho nedostaneme. Například zvolíme $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

1.6 Báze prostoru

Bází vektorového prostoru V je taková množina lineárně nezávislých vektorů, jejíž lineární obal je V. *Lineární obal* podmnožiny M vektorového prostoru V je průnik všech podprostorů V, které obsahují M. Jinými slovy je to množina všech lineárních kombinací vektorů z M.

Příklad 1.6. *Zkonstruujte bázi prostoru všech hermitovských matic* 2×2. *Matice* M *je hermitovská, pokud je rovna svému hermitovskému sdružení, tj. transpozici a komplexnímu sdružení* $M = \bar{M}^{\mathrm{T}}$.

Řešení: Nejdříve si napíšeme libovolnou komplexní matici typu 2×2.

$$M = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{pmatrix}\,.$$

Vidíme, že má osm nezávislých parametrů, tj. báze prostoru komplexních matic 2×2 má osm prvků. Její hermitovské sdružení je

$$\bar{M}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a-bi & c-di \\ e-fi & g-hi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & g-hi \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{pmatrix}\,.$$

Odsud vidíme $b = 0$, $h = 0$, $e = c$, $f = -d$. Tvar obecné hermitovské matice 2×2 je
$$M = \begin{pmatrix} a & c + di \\ c - di & g \end{pmatrix} .$$
Bázi můžeme najít např. tak, že budeme postupně pokládat jeden z koeficientů roven jedné a ostatní rovné nule. Jednou z bází tedy je
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
Častěji se však používá báze matic, které jsou zároveň unitární (platí pro ně $M \cdot \bar{M}^{\mathrm{T}} = I$).
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
Prvním třem maticím se říká Pauliho matice a používají se pro popis částice se spinem $\frac{1}{2}$.

1.7 Násobení matic

Mějme $P \times Q$ matici M (má P řádků a Q sloupců) a $Q \times R$ matici N. Potom maticovým součinem matic M a N myslíme matici velikosti $P \times R$, která má v r-tém řádku a s-tém sloupci součin r-tého řádku matice M a s-tého sloupce matice N. Matice tedy násobíme systémem „řádek krát sloupec“. Jednotlivé členy výsledné matice dostaneme tak, že sečteme součiny odpovídajících prvků v daném řádku matice M a sloupci matice N. Jasnější to bude na následujícím příkladu.

Příklad 1.7. *Vynásobte matice* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 & 5 \\ -6 & -5 & -6 & -1 \\ 19 & 33 & 21 & 8 \end{pmatrix} .$$

Příklad 1.8. *Vynásobte matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ 3\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 3\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 & 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 6 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.8 Inverzní matice

Řekneme, že matice N je inverzní maticí ke čtvercové matici M, pokud platí:

$$N \cdot M = M \cdot N = I\,,$$

kde I je jednotková matice, která má na diagonále jedničky a všude jinde nuly.

Příklad 1.9. *Najděte inverzní matici k matici* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Při výpočtu postupujeme podobně jako při hledání řešení systému lineárních rovnic s pravou stranou. Místo pravé strany dáme jednotkovou matici. Poté provedeme Gaussovu-Jordanovu eliminaci. První řádek odečteme od obou ostatních, abychom v prvním sloupci dostali všude kromě prvního pole nulu. Stejnou úpravu provedeme i na jednotkové matici. Poté prohodíme druhý a třetí řádek, protože je v druhém řádku a třetím sloupci nula. Druhý i třetí řádek vydělíme -2, poté odečteme od prvního řádku druhý a od druhého řádku třetí. Všechny úpravy opakujeme i vpravo. Tak dostaneme vlevo jednotkovou matici a vpravo výslednou inverzní matici k původní.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right).$$

Inverzní matice tedy je $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.10. *Najděte inverzní matici k matici* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

1.9 Determinant

Determinant je zobrazení, které každé čtvercové matici přiřadí číslo. K tomu, abychom ho mohli zadefinovat, definujeme nejdříve permutaci. *Permutace* n prvků je jedno z možných uspořádání těchto prvků, kde výsledná uspořádaná n-tice má stejný počet prvků jako původní množina. *Znaménko permutace* udává, zda musíme udělat sudý či lichý počet přehození dvou prvků permutace, abychom dostali původní uspořádání. Sudé permutaci odpovídá kladné znaménko, liché záporné. Determinant je pak sumou všech permutací diagonály matice, přičemž každá permutace se bere s kladným znaménkem, pokud je sudá, a se záporným znaménkem, pokud je lichá. Pro matici typu $n \times n$ máme

$$\det M = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} M_{i,\sigma(i)} .$$

V předchozí rovnici sgn je znaménko permutace a P_n je množina všech permutací n prvků. Uvažujeme tedy všechny možné součiny prvků matice z různých řádků a sloupců se znaménkem příslušné permutace.

Pro matici typu 2×2 máme pouze dvě permutace a dostáváme tedy

$$\det M = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} .$$

Předchozí vztah si odvodíme. Existují pouze dvě různé permutace dvou prvků: $(1, 2)$ a $(2, 1)$, tedy původní uspořádání dvou prvků a jejich prohození. První permutace je sudá, odpovídá jí tedy kladné znaménko, druhá permutace je lichá a má záporné znaménko. Pro první permutaci je na prvním místě jednička, tedy $\sigma_1(1) = 1$ a na druhém místě dvojka $\sigma_1(2) = 2$. Pro tuto permutaci tedy dostáváme příspěvek do determinantu

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) M_{1,\sigma_1(1)} M_{2,\sigma_1(2)} = +M_{1,1}M_{2,2} .$$

U druhé permutace je na prvním místě dvojka $\sigma_2(1) = 2$ a na druhém jednička $\sigma_2(2) = 1$. Jelikož je lichá, dáváme před člen záporné znaménko, máme tedy

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2) M_{1,\sigma_2(1)} M_{2,\sigma_2(2)} = -M_{1,2} M_{2,1} \,.$$

Součtem obou výrazů dostáváme vztah pro determinant.

Pro výpočet matice 3×3 využijeme tzv. Sarusova pravidla:

$$\begin{aligned} \det M = M_{11}M_{22}M_{33} + M_{13}M_{21}M_{32} + M_{12}M_{23}M_{31} - \\ - M_{13}M_{22}M_{31} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{12}M_{21}M_{33} \,. \end{aligned}$$

Při odvození tohoto pravidla postupujeme obdobně jako pro matici 2×2. Permutací tří prvků existuje šest: $\sigma_1 = (1,2,3)$, $\sigma_2 = (1,3,2)$, $\sigma_3 = (2,1,3)$, $\sigma_4 = (2,3,1)$, $\sigma_5 = (3,1,2)$ a $\sigma_6 = (3,2,1)$. První, čtvrtá a pátá z nich jsou sudé, ostatní liché (ověřte!). Příspěvek sudých permutací je

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(\sigma_1) M_{1,\sigma_1(1)} M_{2,\sigma_1(2)} M_{3,\sigma_1(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_4) M_{1,\sigma_4(1)} M_{2,\sigma_4(2)} M_{3,\sigma_4(3)} + \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\sigma_5) M_{1,\sigma_5(1)} M_{2,\sigma_5(2)} M_{3,\sigma_5(3)} = \\ &\quad = +M_{1,1}M_{2,2}M_{3,3} + M_{1,2}M_{2,3}M_{3,1} + M_{1,3}M_{2,1}M_{3,2} \,. \end{aligned}$$

U lichých permutací dostáváme

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(\sigma_2) M_{1,\sigma_2(1)} M_{2,\sigma_2(2)} M_{3,\sigma_2(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_3) M_{1,\sigma_3(1)} M_{2,\sigma_3(2)} M_{3,\sigma_3(3)} + \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\sigma_6) M_{1,\sigma_6(1)} M_{2,\sigma_6(2)} M_{3,\sigma_6(3)} = \\ &\quad = -M_{1,1}M_{2,3}M_{3,2} - M_{1,2}M_{2,1}M_{3,3} - M_{1,3}M_{2,2}M_{3,1} \,. \end{aligned}$$

Sečtením obou příspěvků dostáváme Sarusovo pravidlo. Při výpočtu můžeme použít následující pomůcku. První a druhý řádek si přepíšeme pod zadanou matici a pak vynásobíme členy v úhlopříčkách „zleva nahoře doprava dolů“, tyto příspěvky bereme s kladným znaménkem. Odečteme od nich součin členů v úhlopříčkách „zleva dole doprava nahoru“, jak symbolicky znázorňuje následující rovnice (členy stejné barvy násobíme).

$$\begin{pmatrix} \color{red}{M_{11}} & M_{12} & M_{13} \\ \color{green}{M_{21}} & \color{red}{M_{22}} & M_{23} \\ \color{blue}{M_{31}} & \color{green}{M_{32}} & \color{red}{M_{33}} \\ M_{11} & \color{blue}{M_{12}} & \color{green}{M_{13}} \\ M_{21} & M_{22} & \color{blue}{M_{23}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \color{red}{M_{13}} \\ M_{21} & \color{red}{M_{22}} & \color{green}{M_{23}} \\ \color{red}{M_{31}} & \color{green}{M_{32}} & \color{blue}{M_{33}} \\ \color{green}{M_{11}} & \color{blue}{M_{12}} & M_{13} \\ \color{blue}{M_{21}} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix}$$

Determinanty matic vyšších řádů vypočteme podle věty o rozvoji podle řádku nebo sloupce

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} (-1)^{i+j} C_{ij} \,,$$

kde C_{ij} je determinant matice, která vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce v matici M.

Příklad 1.11. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Determinant vypočteme pomocí Sarusova pravidla.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 0 = 9\,.$$

Příklad 1.12. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Opět využijeme Sarusova pravidla.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0\cdot 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot(-1) = 5\,.$$

Příklad 1.13. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Všimněme si, že první a druhý řádek matice jsou lineárně závislé. Determinant matice s lineárně závislými řádky je nula.

Příklad 1.14. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Provedeme rozvoj podle prvního řádku

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot\det \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 1\cdot\det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} -$$
$$-(-1)\cdot\det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -29 + 19 + 17 = 7\,.$$

1.10 Vlastní čísla

Platí-li pro danou čtvercovou matici M rovnice

$$Mv = \lambda v\,, \tag{1}$$

kde v je vektor a λ komplexní číslo, nazveme λ vlastním číslem matice M a v vlastním vektorem této matice. Přepíšeme-li si rovnici do tvaru $(M - \lambda I)v = 0$, kde I je jednotková matice, vidíme, že matice $M-\lambda I$ má lineárně závislé sloupce. Existují totiž čísla $v_1, \ldots, v_N$, kterými když vynásobíme jednotlivé sloupce, dostaneme nulu. Pro $N \times N$ matici M má matice $M - \lambda I$ má tedy hodnost (počet lineárně nezávislých řádků nebo sloupců) menší než N, a tudíž platí

$$\det(M - \lambda I) = 0\,. \tag{2}$$

Toho využijeme při počítání vlastních čísel.

Vlastní čísla a vlastní vektory se hojně používají v kvantové mechanice; hodnota pozorovatelé je totiž vyjádřena vlastním číslem daného operátoru a vlastní stavy jsou dány vlastními vektory.

Příklad 1.15. *Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: Využijeme rovnice $\det(M - \lambda I) = 0$. Dostáváme

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0\,,$$

máme tedy tři řešení $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 3$. Z rovnice (1) pak určíme vlastní vektor v. Přepíšeme si ji do tvaru

$$(M - \lambda I)v \;= 0\,. \tag{3}$$

Pro λ_1 dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

odsud $v_2 = 0$ a $v_3 = 0$. Takže vlastní vektor můžeme zvolit jako $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Možný je také libovolný jeho nenulový násobek.

Pro λ_2 máme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tedy $v_1 = 0$ a $v_3 = 0$. Vlastní vektor můžeme zvolit jako $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pro λ_3 máme

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tedy $v_1 = 0$ a $v_2 = 0$. Vlastní vektor můžeme zvolit jako $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.16. *Určete vlastní vektory a vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z rovnice (2) máme

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1\,.$$

Odsud $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Pro $\lambda_1 = 1$ máme z rovnice (3)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

$-v_1 + v_2 = 0$, tedy $v_1 = v_2$. Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme z rovnice (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

$v_1 + v_2 = 0$, tedy $v_1 = -v_2$. Odpovídající vlastní vektory tedy jsou pro λ_1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pro λ_2 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.17. *Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Řešení: Nyní už budeme postupovat stručněji. Dostáváme rovnici $\lambda^2 - 4 = 0$ s řešeními $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$. Pro vlastní vektory získáme z rovnice

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

respektive

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

vlastní vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ -(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ -(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}$.

Příklad 1.18. *Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z rovnice $(\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0$ dostáváme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

Pro $\lambda_1 = 0$ máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tj. $v_1 + v_2 = 0$, pro $\lambda_2 = 2$ máme

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tj. $v_1 - v_2 = 0$. Vlastní vektory tedy jsou $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.19. *Najděte vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z (2) dostáváme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0\,,$$

jejímž řešením jsou vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\,.$$

Příklad 1.20. *Najděte vlastní čísla a jeden vlastní vektor matice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z rovnice (2) máme $\lambda^3 - 1 = 0$, což se dá rozložit jako $(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0$, máme tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

Najdeme vlastní vektor odpovídající číslu λ_1. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tj. $-v_1 + v_3 = 0$, $v_1 - v_2 = 0$, tedy $v_1 = v_2 = v_3$. Jako vlastní vektor tedy zvolíme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.21. *Určete vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Vlastní čísla určíme ze vztahu

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -3 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)\,.$$

Máme tedy řešení $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Příklad 1.22. *Najděte vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Řešení: Vlastní čísla určíme ze vztahu

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+6\lambda^2+\left(8+\frac{15}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)(-\lambda)+$$

$$+\frac{1}{8}(60+2-2-10+4-6) = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\,.$$

Máme tedy řešení $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Kořeny polynomu třetího řádu nalezneme tak, že jeden z nich uhodneme a následně vyřešíme kvadratickou rovnici.

1.11 Literatura

Podrobněji lze téma nastudovat např. v [23, 24, 15, 19, 13, 26], kniha [21] není vhodná pro začátečníky, lze v ní ale nalézt mnoho zajímavých souvislostí daného tématu.

1.12 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 1.23. *Dokažte, že prostor matic $m \times n$ je vektorovým prostorem.*

Příklad 1.24. *Určete, zda vektory*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé nebo lineárně závislé.

Příklad 1.25. *Najděte bázi prostoru reálných polynomů řádu 5. Jakou má dimenzi?*

Příklad 1.26. *Určete součin dvou matic*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.27. *Vypočtěte*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Příklad 1.28. *Vypočtěte*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Příklad 1.29. *Vypočtěte*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.30. *Vypočtěte*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.31. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 11 & -15 \\ 2 & -3 & 7 \\ 2 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.32. *Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.33. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.34. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} -1 & -8 & -6 \\ 1 & 6 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.35. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Diferenciální počet funkcí více proměnných

V bakalářském studiu jste se seznámili s diferenciálním počtem funkce proměnné. Součástí kurzu Matematika 1 a Matematika 2 bude hlavně diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných, tedy funkcí, na jejichž vstupu je více reálných čísel.

2.1 Limita a spojitost

Nejdříve zadefinujeme funkci r proměnných.

Definice 2.1. *Reálná (komplexní) funkce r reálných proměnných je zobrazení f z $\mathbb{R}^r$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).*

Tedy tato funkce má na vstupu r reálných čísel a na výstupu jedno reálné (v případě komplexní funkce komplexní) číslo. Příkladem může být nadmořská výška v závislosti na zeměpisné šířce a délce, případně funkce udávající objem plynu v závislosti na teplotě, tlaku a času.

Podobně jako u funkce jedné proměnné můžeme definovat pojem limity. Nejdříve definujme pojem okolí.

Definice 2.2. *Pro kladné ε nazveme* ε-ovým okolím $U_\varepsilon(x_0)$ *bodu $x_0 \in \mathbb{R}^r$ množinu*

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x, x \in \mathbb{R}^r, \rho(x, x_0) < \varepsilon\},$$

kde $\rho(\cdot,\cdot)$ je vzdálenost dvou bodů v $\mathbb{R}^r$.

Redukovaným ε-ovým okolím *nazveme ε-ové okolí bodu x_0 mimo tohoto bodu, tedy množinu*

$$U_\varepsilon^*(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Například v prostoru $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou (vzdálenost bodů $X_1 = (x_1, y_1)$ a $X_2 = (x_2, y_2)$ je dána jako $\rho(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$) je ε-ovým okolím bodu kruh bez hranice o poloměru ε a středu v daném bodu. Redukovaným okolím je tento kruh bez hranice kromě svého středu.

Nyní můžeme zadefinovat limitu funkce více proměnných a spojitost funkce.

Definice 2.3. *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, která je definovaná na $U_\varepsilon^*(x_0)$. Potom f má v x_0 limitu rovnou y_0, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in U_\delta^*(x_0).$$

Definice 2.4. *Mějme opět funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ definovanou na $U_\varepsilon(x_0)$. Řekneme, že je spojitá v x_0, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in U_\delta(x_0).$$

Jinými slovy, je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Limita popisuje chování funkce, když se blížíme k danému bodu. U funkcí více proměnných však existuje více způsobů, jak se k danému bodu přiblížit, než v jedné dimenzi. Můžeme se blížit např. po přímkách, po parabole, po spirále, atd. Funkce má limitu jen v tom případě, že při přiblížení libovolným způsobem dostaneme tutéž hodnotu.

Pro limity také platí, že limita součtu je součet limit, limita rozdílu rozdíl limit, limita součinu součin limit a limita podílu podíl limit (za předpokladu, že limita, kterou dělíme, je nenulová).

Příklad 2.5. *Určete limitu funkce* $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ *v bodě* $(0,0)$.

Řešení: Ukážeme si metodu, která se hodí k důkazu, že limita neexistuje. Najdeme-li dvě různé křivky, po kterých když se blížíme, dostaneme různé limity, víme, že limita neexistuje. Dostaneme-li pro velkou třídu křivek stejné výsledky, ještě to nutně neznamená, že limita existuje, ale máme alespoň kandidáta na tuto limitu. Tu musíme dokázat jiným způsobem.

Zkusíme nejdříve limity po přímkách $y = kx$. Vztah pro tuto přímku dosadíme do funkce dvou proměnných. Dostáváme

$$f(x,kx) = \frac{k^2x^4}{x^4 + k^4x^4} = \frac{k^2}{1+k^4}\,.$$

Limita vzhledem ke každé z přímek je různá $\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \frac{k^2}{1+k^4}$, proto limita této funkce dvou proměnných neexistuje.

Příklad 2.6. *Určete limitu funkce* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *v bodě* $(0,0)$.

Řešení: Opět začneme přímkami $y = kx$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3k}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} x\frac{k}{x^2+k^2} = 0\,.$$

Kandidátem na limitu je tedy číslo 0. To, že je limita při blížení se po všech přímkách stejná, ale neznamená, že funkce má limitu. Zkusme se blížit po parabole $y = x^2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}\,.$$

Limita tedy neexistuje.

Příklad 2.7. *Určete* $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin\frac{1}{x-y-z}$.

Řešení: Protože $\left|\sin\frac{1}{x-y-z}\right| \le 1$ a $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x| = 0$, máme díky větě, že součinu limita funkce jdoucí k nule a omezené funkce je nula,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin\frac{1}{x-y-z} = 0\,.$$

Příklad 2.8. *Ukažte spojitost funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

v bodě $(0,0)$.

Řešení: Musíme ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ je $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. Máme

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = |x| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|}{2},$$

kde jsme využili nerovnosti $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Ta plyne z nerovností $(x-y)^2 \geq 0$ a $(x+y)^2 \geq 0$. Dále protože

$$|x|/2 \leq \sqrt{x^2+y^2}/2 < \delta/2,$$

stačí zvolit $\delta = 2\varepsilon$.

2.2 Parciální derivace

Definice 2.9. *Mějme funkci* $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ *definovanou na nějakém okolí bodu* $a = (a_1, \ldots, a_r)$. *Potom parciální derivací funkce* f *podle* i*-té proměnné v bodě* a *nazveme limitu*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_r) - f(a)}{t}.$$

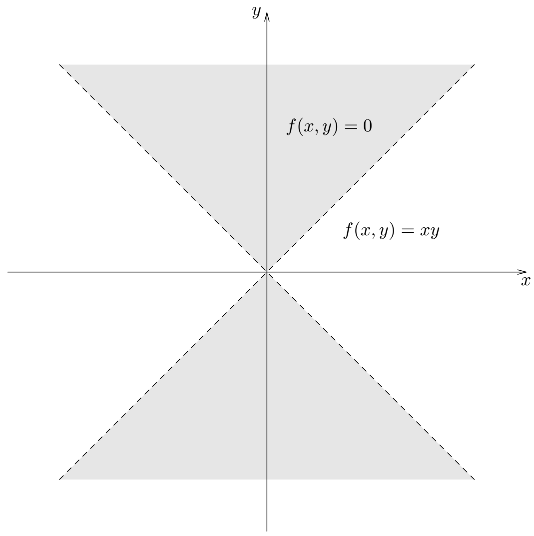
Parciální derivaci označujeme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *nebo* $\partial_{x_i} f$ *nebo* f_{x_i}.

Platí věta, že funkce, která má v $U(a)$ všechny první derivace a tyto derivace jsou omezené, je v bodě a spojitá. Můžeme také zavést druhou parciální derivaci podle dané proměnné nebo smíšené parciální derivace. Budeme používat konvenci, že $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ je derivace nejdříve podle x a poté podle y. Někdy se můžete setkat i s opačnou konvencí. Pro „hezké“ funkce platí, že smíšené druhé derivace jsou záměnné, tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Postačující podmínkou pro to je, aby smíšené druhé derivace byly spojité v daném bodě. Pozor, obecně parciální derivace podle různých proměnných nejsou záměnné. Ilustruje to následující příklad.

Příklad 2.10. *Určete druhé smíšené parciální derivace funkce* $f(x,y) = \begin{cases} xy & |x| \geq |y| \\ 0 & |x| < |y| \end{cases}$ *v bodě* $(0,0)$.

Řešení:

Tato funkce se ve dvou (bílých) oblastech chová jako xy a ve dvou (šedých) oblastech jako 0 (viz obr. 1). Pro všechna y platí $\partial_x f(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} =$



Obrázek 1: Obrázek k příkladu 2.10 – oblasti, ve kterých je funkce definována různým výrazem

0, protože jsme v šedé oblasti a $f(x,y)$ i $f(0,y)$ jsou v této oblasti nulové. Obdobně pro všechna x platí $\partial_y f(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = x$, protože v tomto případě jsme v bílé oblasti, kde $f(x,y) = xy$ a $f(x,0) = 0$. Proto

$$\partial_y(\partial_x f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial_x f(0,y) - \partial_x f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0\,,$$
$$\partial_x(\partial_y f)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial_y f(x,0) - \partial_y f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1\,.$$

Druhé parciální derivace nejsou tedy záměnné.

Příklad 2.11. *Ověřte záměnnost druhých parciálních derivací funkce* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

Řešení: Vypočítáme postupně parciální derivace podle x, podle y a poté druhé smíšené parciální derivace. Při výpočtu parciálních derivací postupujeme podle obdobných pravidel jako u derivace funkce jedné proměnné. Derivujeme-li např. podle x, považujeme všechny ostatní proměnné (tedy v našem případě y) za konstanty.

$$\partial_x f(x,y) = 4x^3 - 8xy^2\,,$$
$$\partial_y f(x,y) = 4y^3 - 8x^2y\,,$$
$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -16xy\,.$$

Příklad 2.12. *Ověřte záměnnost druhých parciálních derivací funkce* $f(x,y) = x^y$.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu.

$$\begin{aligned}
\partial_x x^y = \partial_x \mathrm{e}^{\ln x^y} = \partial_x \mathrm{e}^{y \ln x} &= \mathrm{e}^{y \ln x} \frac{1}{x} y \,, \\
\partial_y x^y = \partial_y \mathrm{e}^{\ln x^y} = \partial_y \mathrm{e}^{y \ln x} &= \mathrm{e}^{y \ln x} \ln x \,, \\
\partial_y \partial_x x^y = \partial_x \partial_y x^y &= \mathrm{e}^{y \ln x} \ln x \frac{1}{x} y + \frac{1}{x} \mathrm{e}^{y \ln x} \,.
\end{aligned}$$

2.3 Derivace ve směru

Obdobně jako můžeme vypočítat derivace podle jednotlivých souřadnicových proměnných, můžeme také vypočítat derivaci v libovolném směru.

Definice 2.13. *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ definovanou na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_r)$ a jednotkový vektor $h \in \mathbb{R}^r$. Potom derivací v bodě a ve směru h nazveme limitu*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \,.$$

Derivaci značíme $\partial_h f$.

Pro dvě proměnné lze použít vztah

$$\partial_h f = h_x \partial_x f + h_y \partial_y f \,,$$

pro tři proměnné obdobně

$$\partial_h f = h \cdot \nabla f = h_x \partial_x f + h_y \partial_y f + h_z \partial_z f \,.$$

Zde h_x je x-ová souřadnice vektoru h, obdobně pro h_y a h_z. Vektor h musí být pro tyto vztahy normalizovaný.

Příklad 2.14. *Určete derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v bodě $(1, 1)$ ve směru $h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.*

Řešení: Vektor h je jednotkový, není ho tedy nutné normalizovat. Máme

$$\begin{aligned}
\partial_x f = 2x \,, &\quad \partial_x f|_{(1,1)} = 2 \,, \\
\partial_y f = -2y \,, &\quad \partial_y f|_{(1,1)} = -2 \,, \\
\partial_h f = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 &\frac{1}{-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \,.
\end{aligned}$$

Příklad 2.15. *Určete derivaci funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ v bodě $a = (a_x, a_y, a_z)$ ve směru $h = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$*

Řešení: Využijeme vztah pro dimenzi 3.

$$\begin{aligned}
\partial_x f = \partial_y f = \partial_z f &= 1 \,, \\
\partial_h f = \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \sin\theta + \cos\theta &= (\cos\varphi + \sin\varphi) \sin\theta + \cos\theta \,.
\end{aligned}$$

Příklad 2.16. *Vypočtěte derivaci funkce* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ *ve směru* $h = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *v bodě* $a = (1,2,-1)$.

Řešení: Využijeme vztah pro dimenzi 3, derivaci vypočítáme jako skalární součin gradientu f

$$\nabla f|_a = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)|_a = (2x, 2y, -2z)|_{((1,2,-1))} = (2,4,2)$$

a směrového vektoru.

$$\partial_h f = h \cdot \nabla f = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (2,4,2) = \frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

2.4 Totální diferenciál

Definice 2.17. *Funkce* f *má v bodě* a *totální diferenciál, pokud existuje lineární zobrazení* $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, *pro které platí*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)[h]}{\|h\|} = 0\,.$$

Jinými slovy platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)[h] + \omega(h)\,, \quad \text{kde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Zatímco parciální derivace charakterizuje změnu funkce pouze v určitém směru, totální diferenciál nám něco říká o chování funkce pro všechny malé přírůstky h. Jeho interpretace je nahrazení funkce tečnou rovinou ke grafu funkce v daném bodě. Pokud má funkce v nějakém bodě spojité parciální derivace, pak tam má diferenciál. Platí následující věta.

Věta 2.18. *Nechť má funkce* $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ *v bodě* a *totální diferenciál. Pak je v bodě* a *spojitá, má v něm parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných a platí* $\mathrm{d}f(a)[h] = \sum_{i=1}^r h_i \partial_{x_i} f$.

Příklad 2.19. *Najděte totální diferenciál funkce* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *v bodě* (x_0, y_0).

Řešení: Nejdříve vypočteme parciální derivace podle obou proměnných v bodě (x_0, y_0).

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0\,, \quad \partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0\,.$$

Pokud totální diferenciál existuje, má tedy tvar $2x_0h_1 + 2y_0h_2$. Najdeme tedy funkci ω a vypočteme příslušnou limitu.

$$\omega(h) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \mathrm{d}f(x_0, y_0)[h] =$$
$$= (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2 = h_1^2 + h_2^2\,.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \|h\| = 0\,.$$

Totálním diferenciálem funkce f v bodě (x_0, y_0) tedy je $2x_0h_1 + 2y_0h_2$.

Příklad 2.20. *Určete, zda funkce* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *má v počátku totální diferenciál.*

Řešení: Protože funkci nelze v počátku derivovat (nemá tam smysl), vypočítáme derivace přímo z definice

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0\,,$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0\,.$$

Totální diferenciál tedy je

$$\mathrm{d}f(0,0)[h] = \partial_x f(0,0)h_1 + \partial_y f(0,0)h_2 = 0h_1 + 0h_2 = 0\,.$$

Nyní ověříme, jestli tento kandidát je skutečně diferenciálem.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathrm{d}f(0,0)[h]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} \neq 0\,.$$

Limita neexistuje, protože po přímkách $h_2 = kh_1$ dostáváme různé výsledky. Protože limita neexistuje, neexistuje ani totální diferenciál v tomto bodě.

Příklad 2.21. *Zjistěte, kde je funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$ definovaná, spojitá, kde má parciální derivace 1. řádu a kde totální diferenciál.*

Řešení: Funkce je definovaná na polorovině $x + y > 0$, protože logaritmus je definovaný pro kladné argumenty. V celé této polorovině je spojitá a má parciální derivace 1. řádu

$$\partial_x f = \partial_y f = \frac{1}{x+y}\,,$$

které jsou zjevně spojité v celé polorovině. Protože jsou parciální derivace spojité, má funkce totální diferenciál.

2.5 Taylorův rozvoj

Obdobně jako v jedné proměnné můžeme ve více proměnných vyjádřit hladkou funkci Taylorovým rozvojem. Má-li funkce f jako funkce n proměnných spojité parciální derivace až do řádu $(k+1)$ včetně na okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_n)$, platí na jeho okolí

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^j f(a) + R_{k+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!} \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{k+1} f(a + \delta(x-a))\,,$$

$\delta \in (0,1)$. Taylorův rozvoj nám pomáhá přibližně určit hodnotu funkce v okolí daného bodu.

2.6 Literatura

Podrobnější vysvětlení některých pojmů a další příklady lze nalézt např. v [12, 14, 6, 17, 10, 29].

2.7 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 2.22. *Ukažte, že pro funkci* $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ *platí:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

a přitom limita funkce dvou proměnných $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *neexistuje.*

Příklad 2.23. *Ukažte, že pro funkci* $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$ *naopak neexistují obě postupné limity* $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ *a* $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$*, zatímco* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Příklad 2.24. *Vypočtěte*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}\,.$$

Příklad 2.25. *Vypočtěte*

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}\,.$$

Příklad 2.26. *Spočtěte druhé parciální derivace a dokažte záměnnost druhých smíšených parciálních derivací.*

a) $f(x,y) = 4x^3 + 2x^2y + 7y^3$.

b) $f(x,y) = x\sin(x+y)$.

Příklad 2.27. *Určete derivaci funkce* $f(x,y) = x^3 + y^3$ *v bodě* $(1,0)$ *ve směru* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Příklad 2.28. *Určete derivaci funkce* $f(x,y,z) = x^2 + yz$ *v bodě* $(1,1,2)$ *ve směru* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Příklad 2.29. *Určete derivaci funkce* $f(x,y) = x\cos(x+y)$ *v bodě* $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *ve směru* $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}},\right)$.

Příklad 2.30. *Najděte totální diferenciál funkce* $f(x, y) = x^3 + y^3$ *v bodě* $(1, 1)$*, pokud existuje.*

Příklad 2.31. *Zjistěte, kde je následující funkce definovaná, spojitá, kde má parciální derivace 1. řádu, kde totální diferenciál a kde spojité 1. parciální derivace.*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3 Diferenciální operátory vektorové analýzy

V této sekci se budeme zabývat diferenciálními operátory, které zobrazují skalární či vektorové pole na skalární či vektorové pole. Slovo diferenciální naznačuje, že se v jejich definicích vyskytují (parciální) derivace. Nejprve si zavedeme skalární a vektorové pole a poté se budeme věnovat jednotlivým operátorům. Uvažujeme vždy trojrozměrný prostor.

3.1 Skalární a vektorový součin

Nejdříve si zopakujeme definici skalárního a vektorového součinu dvou vektorů v $\mathbb{R}^3$, kterou znáte ze střední školy. Pro dva vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je skalární součin definován jako

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

a vektorový součin jako

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\,.$$

Jak už názvy napovídají, výsledkem skalárního součinu je skalár, tedy reálné číslo, a výsledkem vektorového součinu je vektor. Formuli pro vektorový součin si lze zapamatovat tak, že ve vztahu pro i-tou složku chybí i-té složky vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a s kladným znaménkem je vždy člen se složkou a následující po i-té.

3.2 Skalární a vektorové pole

Funkci tří proměnných $\varphi(x, y, z)$ nazýváme skalárním polem, plochy $\varphi(x, y, z) =$ konst. nazýváme hladinami tohoto pole. Vektorovou funkci

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

nazveme vektorovým polem. Vektor $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ nazveme polohovým vektorem. Jeho velikost značíme r a z Pythagorovy věty můžeme snadno vypočítat, že $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Siločárou vektorového pole nazveme křivku, jejíž tečna má v každém bodě směr tohoto pole.

Příkladem skalárního pole je například potenciál (např. elektrický, gravitační) – tj. každému bodu prostoru tato funkce přiřadí jedno reálné číslo. Příkladem vektorového pole je libovolné silové pole, např. to, které každému bodu prostoru přiřadí tíhovou sílu, která působí na daný hmotný bod.

Derivací vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ závislého na proměnné t nazveme limitu

$$\mathbf{a}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{a}(t+h) - \mathbf{a}(t)}{h} = a_1'(t)\mathbf{e}_x + a_2'(t)\mathbf{e}_y + a_3'(t)\mathbf{e}_z\,,$$

kde $\mathbf{e}_x$ je jednotkový vektor ve směru osy x, atd. Tedy derivace vektoru $\mathbf{a}(t)$ má složky $\mathbf{a}'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t))$.

Věta 3.1. *Pro derivaci platí následující vztahy*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' \,, \quad (k\ \mathbf{a})' = k\ \mathbf{a}' \,,$$
$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})' = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}' + \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} \,, \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})' = \mathbf{a}\times\mathbf{b}' + \mathbf{a}'\times\mathbf{b} \,.$$

Příklad 3.2. *Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, který se pohybuje po kružnici* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.

Řešení: Derivujeme po složkách

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}(t)' = ((\cos t)', (\sin t)', 0') = (-\sin t, \cos t, 0) \,,$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}(t)' = (-(\sin t)', (\cos t)', 0') = (-\cos t, -\sin t, 0) = -\mathbf{r}(t) \,.$$

3.3 Gradient

Gradient skalárního pole $\varphi(x, y, z)$ je vektorové pole, pro které platí

$$\operatorname{grad}\varphi(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \,.$$

Symbolu $\nabla = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial_x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial_y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial_z}$ se říká „nabla“ a uvidíme ho i u dalších vektorových operací.

Následující větu známe z diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Věta 3.3. *Přírůstek hodnoty skalárního pole φ při posunutí o malý vektor* $\mathrm{d}\mathbf{r}$ *se vypočítá jako* $\mathrm{d}\varphi = \operatorname{grad}\varphi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

Z uvedené věty plyne, že gradient skalárního pole je kolmý k jeho hladině, v každém bodě má směr největšího růstu tohoto pole. Gradient se ve vztazích chová podobně jako derivace, platí pro něj následující věta.

Věta 3.4. *Pro gradient platí*

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi \,, \quad \operatorname{grad}(k\ \varphi) = k\ \operatorname{grad}\varphi \,,$$
$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi \,, \quad \operatorname{grad} f(\varphi) = f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi \,.$$

kde φ, ψ jsou skalární pole, f funkce a k konstanta.

Příklad 3.5. *Vypočtěte gradient skalárního pole* $\varphi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| = r$.

Řešení: Gradient vypočteme po složkách.

$$\partial_x\varphi = \partial_x\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \,.$$
$$\partial_y\varphi = \frac{y}{r} \,, \quad \partial_z\varphi = \frac{z}{r} \,.$$

Tedy

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0 \,.$$

Výsledkem je jednotkový vektor ve směru $\mathbf{r}$.

Příklad 3.6. *Vypočtěte gradient skalárního pole* $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$.

Řešení: Příklad vypočteme dvěma metodami. Nejdříve po složkách.

$$\begin{aligned}
\partial_x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \\
\partial_y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \\
\partial_z \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \\
\nabla \frac{1}{r} &= \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.
\end{aligned}$$

Druhou možností je výpočet pomocí vztahu pro gradient funkce od pole (poslední vztah ve Větě 3.4).

$$\nabla \frac{1}{r} = \nabla r^{-1} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Využili jsme tady výsledku předchozího příkladu.

Příklad 3.7. *Vypočtěte gradient skalárního pole* $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r}$*, kde* $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$ *jsou konstantní vektory.*

Řešení: Nejdříve využijeme vztahu pro gradient součinu dvou skalárních funkcí (Věta 3.4, vztah vlevo dole), konkrétně $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$ a $\frac{1}{r}$.

$$\nabla \frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r} = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\nabla[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})]\,.$$

Druhý člen si vypočteme ve složkách. Víme, že $\mathbf{r}\times\mathbf{a} = (ya_3 - za_2, za_1 - xa_3, xa_2 - ya_1)$, odsud

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = b_1(ya_3 - za_2) + b_2(za_1 - xa_3) + b_3(xa_2 - ya_1)\,.$$

Proto

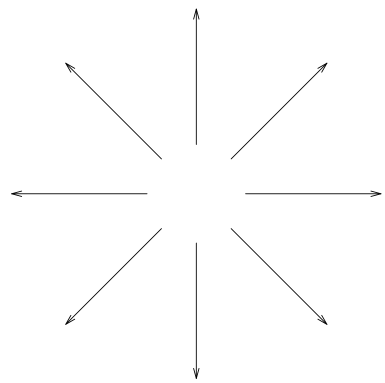
$$\begin{aligned}
\partial_x[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})] = \partial_x[b_1(ya_3 - za_2) + b_2(za_1 - xa_3) + b_3(xa_2 - ya_1)] = \\
= a_2b_3 - a_3b_2 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x\,.
\end{aligned}$$

Tím jsme dostali x-ovou složku vektorového součinu $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Pro ostatní složky je výpočet obdobný a dostáváme

$$\nabla[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})] = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\,.$$

Výsledek $\nabla\frac{1}{r}$ vezmeme z minulého příkladu. Takže nakonec máme

$$\nabla \frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r} = -\frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{r}\,.$$



Obrázek 2: Příklad zřídlového pole

3.4 Divergence

Divergence vektorového pole je skalární pole, pro které platí

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \,.$$

Pomocí operátoru nabla lze divergenci vektorového pole $\mathbf{a}$ popsat jako skalární součin nably s tímto polem $\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$. Divergence udává zřídlovost vektorového pole. Budeme-li uvažovat např. vektorové pole dané gradientem teploty, kladná divergence tohoto pole znamená, že v tomto bodě teplo vzniká, záporná divergence, že zaniká. Ilustrace zřídlového pole je na obr. 2.

Věta 3.8. *Pro divergenci platí:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b} \,, \\ \operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) &= \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} \,. \end{aligned}$$

Důkaz: První vztah je triviální, dokážeme si druhý.

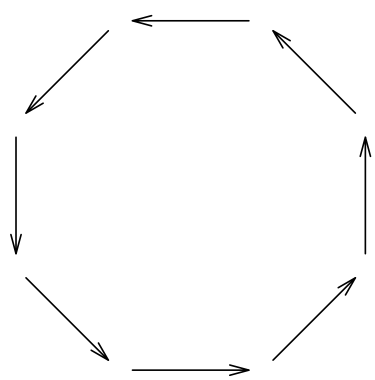
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_z) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z + \varphi \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} \,. \end{aligned}$$

Příklad 3.9. *Vypočtěte divergenci pole* $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Řešení: Vyjdeme z definice. Dostáváme

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \,.$$

Příklad 3.10. *Vypočítejte divergenci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$.



Obrázek 3: Příklad vírového pole

Řešení: Využijeme vztahu $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{a}$. S využitím minulého příkladu a příkladu 3.6 (pro výpočet $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$) dostáváme

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}\,.$$

Příklad 3.11. *Vypočtěte divergenci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v minulém příkladu, využijeme opět vztahu pro divergenci součinu skalárního a vektorového pole. Dále vypočteme gradient $\frac{1}{r^3}$ pomocí posledního vztahu ve Větě 3.4 a využijeme výsledku příkladu 3.9. Snadno nahlédneme, že $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = -3 \frac{1}{r^4} \nabla r \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = -3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^5} + \frac{3}{r^3} = 0\,.$$

Pole je tedy nezřídlové.

3.5 Rotace

Rotací vektorového pole $\mathbf{a}(x, y, z)$ je vektorové pole

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{a}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\,.\end{aligned}$$

Body, ve kterých je rotace nenulová, se označují jako víry a příslušné pole jako vírové. Pole, které má ve všech bodech nulovou rotaci, je nevírové. Ilustrace vírového pole je na obr. 3.

Pomocí operátoru nabla rotaci zapisujeme jako $\operatorname{rot} \mathbf{a}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{a}(x, y, z)$.

Věta 3.12. *Platí*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b}\,, \\ \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) &= \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\operatorname{grad}\varphi\,, \\ \operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.13. *Vypočtěte rotaci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$.

Řešení: Vyjdeme z definice. Pro první složku dostáváme

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0\,.$$

Obdobně i pro další složky, tedy $\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Příklad 3.14. *Vypočtěte rotaci pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Řešení: Opět vypočteme první složku.

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r} = -\frac{z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{y}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{zy}{r^3} + \frac{zy}{r^3} = 0\,.$$

Obdobně pro ostatní složky, tedy $\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

3.6 Laplaceův operátor

Naposledy si představíme Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Působí na skalární pole a výsledkem je opět skalární pole. Může také působit na vektorové pole, z něhož „vyrobí“ vektorové pole. Laplaceův operátor je důležitý např. v elektřině, kvantové teorii, popisu vlnění a difuze. Pomocí operátoru nabla lze vyjádřit jako divergence gradientu

$$\begin{aligned} &\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \\ &= \left(\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \end{aligned}$$

Věta 3.15. *Pro Laplaceův operátor platí následující vztahy.*

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi+\psi) &= \Delta\varphi + \Delta\psi\,, \\ \Delta(\varphi\psi) &= \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi + 2(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\,, \\ \Delta(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \Delta\mathbf{a} + \Delta\mathbf{b}\,, \\ \Delta(k\mathbf{a}) &= k\ \Delta\mathbf{a} \end{aligned}$$

pro k konstantní.

Věta 3.16. *Dále platí*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi &= \Delta\varphi\,, \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}\,, \\
\Delta\operatorname{grad}\varphi &= \operatorname{grad}\Delta\varphi\,, \\
\Delta\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \operatorname{rot}\Delta\mathbf{a}\,, \\
\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi &= \mathbf{0}\,, \\
\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 3.17. *Aplikujte Laplaceův operátor na skalární pole* $\varphi(x, y, z) = r$.

Řešení: Vypočtěme první a druhou derivaci pole podle x.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{x}{r}\,, \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\,, \\
\Delta\varphi = \frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3} &= \frac{2}{r}\,.
\end{aligned}
$$

Protože derivace podle ostatních proměnných se vypočtou obdobně (pouze x^2 je zaměněno za y^2 či z^2), můžeme vyjádřit Laplaceův operátor.

Příklad 3.18. *Určete Laplace skalárního pole* $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{r}$.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladě.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}\,, \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5}\,, \\
\Delta\varphi = -\frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že toto pole je nevírové.

Příklad 3.19. *Aplikujte Laplaceův operátor na vektorové pole* $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{r} = (x, y, z)$.

Řešení: Vypočteme první složku.

$$
(\Delta\mathbf{a})_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0\,.
$$

Obdobně pro ostatní složky. Tedy $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Příklad 3.20. *Dokažte identitu* $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{0}$.

Řešení: Identitu si rozepíšeme ve složkách.

$$\nabla \times \nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y\partial z}\right).$$

Protože jsou díky spojitosti φ a jejích derivací parciální derivace záměnné, je výraz roven nulovému vektoru.

3.7 Literatura

Koncepce této sekce a většina příkladů byly inspirovány studijním textem [8], kde lze nalézt více podrobností k tématu. Dále doporučujeme např. anglický text [2] nebo českou přednášku [5].

3.8 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 3.21. *Vypočtěte rychlost a zrychlení, má-li polohový vektor tvar* $\mathbf{r} = (t^3, t^2 \sin t, \cos t)$.

Příklad 3.22. *Vypočtěte gradient funkce* $\varphi(r) = \frac{\cos r}{r}$, *kde* $r = |\mathbf{r}|$ *je absolutní hodnota polohového vektoru.*

Příklad 3.23. *Vypočtěte gradient funkce* $\varphi(\mathbf{r}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|$.

Příklad 3.24. *Vypočtěte divergenci funkce* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \times \mathbf{r}$.

Příklad 3.25. *Vypočtěte rotaci funkce* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Příklad 3.26. *Aplikujte Laplaceův operátor na vektorové pole* $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

4 Lokální extrémy funkcí více proměnných

Úloha na extrém funkce více proměnných má mnoho fyzikálních aplikací. Ta nejzákladnější je hledání vrcholu kopce či nejnižšího bodu údolí, známe-li závislost nadmořské výšky na poloze. Závislosti fyzikálních veličin jsou jsou dány funkcemi více proměnných a v mnoha případech hledáme extrém těchto veličin (např. minimalizujeme energii systému). V této sekci si popíšeme, jak najít lokální extrémy funkcí více proměnných.

4.1 Teorie

Definice 4.1. *Řekneme,že bod $A \in \mathbb{R}^n$ je stacionárním bodem funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$.*

Ekvivalentní podmínkou pro stacionární bod je, že totální diferenciál je nulový $\mathrm{d}f(A) = 0$.

Věta 4.2. *Nechť na nějaké otevřené množině má funkce f všude parciální derivace prvního řádu. Pak nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému na této množině je stacionární bod.*

To, zda je v daném stacionárním bodu extrém a zda jde o maximum nebo minimum, zjistíme z druhého diferenciálu funkce f v daném bodu A, který značíme $\mathrm{d}^2 f(A)$.

Věta 4.3. *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je aspoň dvakrát spojitě diferencovatelná na okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$. Pak je-li*

1. *$\mathrm{d}^2 f(A) > 0$, funkce má v bodě A ostré lokální minimum,*
2. *$\mathrm{d}^2 f(A) < 0$, funkce má v bodě A ostré lokální maximum.*

Omezíme se nyní na dvě proměnné. Druhý diferenciál lze vyjádřit jako součin

$$\mathrm{d}^2 f(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

To, zda je druhý diferenciál pozitivně nebo negativně definitní, lze vyjádřit z tzv. Sylvestrova kritéria. Označme $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$ a $D_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$. Protože máme funkci dvakrát spojitě diferencovatelnou, jsou druhé smíšené parciální derivace záměnné.

Věta 4.4. *Při označení výše platí pro stacionární bod A funkce f:*

1. *Je-li $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$, pak má f v bodě A ostré lokální minimum,*
2. *Je-li $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$, pak má f v bodě A ostré lokální maximum,*

3. Je-li $D_2 < 0$, pak funkce f v bodě A nemá extrém, jedná se o tzv. sedlový bod.

Pro $D_2 = 0$ nelze o existenci a charakteru extrému rozhodnout, někdy můžeme extrém určit tak, že se podíváme na hodnoty funkce f v okolí stacionárního bodu.

Při určování lokálních extrémů postupujeme tedy následovně. Nejdříve najdeme pomocí Věty 4.2 stacionární body (tedy body podezřelé z extrémů). Poté v každém z těchto bodů určíme čísla D_1 a D_2 a podle Věty 4.4 určíme, zda jde o minimum, maximum či zda zde extrém není. Pokud jde o funkci více než dvou proměnných, určují se znaménka minorů matice druhých derivací, tj. částečných determinantů.

4.2 Příklady

Příklad 4.5. *Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2$*

Řešení: Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 6y\,.$$

Parciální derivace položíme rovny nule a vyřešíme soustavu rovnic. Z rovnice $-3x+6y = 0$ vyjádříme $x = 2y$ a dosadíme do rovnice $3x^2 - 3y = 0$. Dostáváme $y(4y-1) = 0$. Odsud $y = 0$ nebo $y = 1/4$. Dopočítáme x a získáváme stacionární body $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$.

Matice parciálních derivací je

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivé stacionární body máme

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pro bod A_1 dostáváme $D_2 = -9 < 0$, extrém tedy neexistuje. Pro bod A_2 máme $D_1 = 3 > 0$, $D_2 = 9 > 0$, máme tedy ostré lokální minimum.

Příklad 4.6. *Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 30$.*

Řešení: Vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$4x^3 - 4y = 0\,, \quad 4y^3 - 4x = 0\,.$$

Odsud $y = x^3$ a z toho $x(x^8 - 1) = 0$. x může tedy nabývat hodnot 0, 1 a -1. Dopočítáme y a získáváme body $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [1, 1]$ a $A_3 = [-1, -1]$. Určíme matici parciálních derivací

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivé stacionární body máme

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad Q(A_3) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Pro bod A_1 dostáváme $D_2 = -16 < 0$, máme tedy sedlový bod. Pro body A_2 a A_3 máme $D_2 = 128 > 0$, $D_1 = 12 > 0$, jedná se o lokální minima.

Příklad 4.7. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$

Řešení: Vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$2x(y^2 - 1) = 0, \quad 2y(x^2 - 1) = 0.$$

Odsud $x = 0$ nebo $y = 1$ nebo $y = -1$. Z druhé rovnice dopočítáme druhou proměnnou a získáváme následující stacionární body: $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [1, 1]$, $A_3 = [-1, 1]$, $A_4 = [1, -1]$ a $A_5 = [-1, -1]$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y^2 - 1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivé stacionární body máme

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$
$$Q(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro bod A_1 dostáváme $D_2 = 4 > 0$, $D_1 = -2 < 0$, jde o lokální maximum. Pro ostatní body máme $D_2 = -16 < 0$, není v nich tedy extrém.

Příklad 4.8. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = y \ln(x^2 + y)$

Řešení: Definiční obor funkce je $x^2 + y > 0$. Vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$\frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0.$$

Musíme tedy rozebrat dva případy $x = 0$ a $y = 0$. V prvním případě máme

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln y = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Pro $y = 0$ dostáváme

$$\ln x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Máme tedy tři stacionární body $A_1 = [0, \frac{1}{e}]$, $A_2 = [1, 0]$, $A_3 = [-1, 0]$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y^2 - 2yx^2}{(x^2+y)^2} & \frac{2x^3}{(x^2+y)^2} \\ \frac{2x^3}{(x^2+y)^2} & \frac{1}{x^2+y} + \frac{x^2}{(x^2+y)^2} \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivé stacionární body máme

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro bod A_1 dostáváme $D_2 = 2e > 0$, $D_1 = 2 > 0$, lokální minimum. Pro oba ostatní body máme $D_2 = -4 < 0$, nejsou zde extrémy.

Příklad 4.9. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^3 + y^3$.

Řešení: Položíme parciální derivace rovny nule.

$$3x^2 = 0, \quad 3y^2 = 0.$$

Řešením soustavy je stacionární bod $A = [0, 0]$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy $D_1 = D_2 = 0$, nemůžeme tedy o lokálním extrému nic říct. Lokální extrém musíme tedy zjistit z chování funkce na okolí bodu A. Jsou-li jak x, tak y záporné, je hodnota funkce f záporná. Naopak pro malé kladné x a y je hodnota funkce f kladná. Lokální extrém tedy neexistuje.

4.3 Literatura

Zadání některých příkladů byla převzata z [14, 20, 11, 6, 30, 27]. Tyto zdroje lze použít také k dalšímu studiu.

4.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 4.10. *Nalezněte lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = 3xy - x + 2y.$$

Příklad 4.11. *Nalezněte lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = x^2 - xy + 3x + y + 3.$$

Příklad 4.12. *Nalezněte lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - 2x - 3y + 5y^2 + 3.$$

Příklad 4.13. *Nalezněte lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 4x + \frac{9}{2}y^2 - 15y.$$

Příklad 4.14. *Nalezněte lokální extrémy funkce*

$$f(x,y) = (x^2 + 4x)y + y^2\,.$$

Příklad 4.15. *Nalezněte lokální extrémy funkce*

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 20y\,.$$

5 Vázané extrémy

5.1 Teorie

Naším cílem je najít extrémy funkce více proměnných na množině, která je zadána vazbou nebo vazbami. Motivací může být například nejvyšší místo železnice klikatící se hornatým terénem. Kopce jsou zadány funkcí f, trasa železnice pak množinou M, která je určena jako množina, na níž jsou funkce g_j nulové. Další využití si ukážeme na příkladech v následující sekci. Pro výpočet extrémů využijeme následující větu.

Věta 5.1. *Mějme f, g_1, $\dots g_s$ funkce proměnných x_1, $\dots$, x_r pro $s < r$. Nechť množina M je dána jako $M = \{x \in \mathbb{R}^r : g_1(x) = 0, \dots, g_s(x) = 0\}$. Nechť funkce $f, g_1, \dots, g_s$ mají spojité parciální derivace na otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^r$ a matice $(\partial_j g_i)$, $j = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, s$ má všude v D maximální možnou hodnost, tj. s. Potom platí:*

1. *Má-li f v $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, pak existují taková čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, že*

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j(a)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r\,,$$
$$g_k(a) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s\,.$$

2. *Platí-li vztahy v předchozím bodu a mají-li $f, g_1, \dots, g_s$ v a diferenciál druhého řádu, označme*

$$K = f + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j g_j\,.$$

Potom má f ostré lokální maximum (minimum) vzhledem k množině M v bodech získaných v předchozím bodu, pokud druhý diferenciál d^2K je negativně (pozitivně) definitní v těchto bodech za podmínky $\mathrm{d}g_j = 0$.

Při výpočtu tedy postupujeme následovně. Nejdříve si napíšeme $K = f + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j g_j$, kde koeficientům λ_j říkáme Lagrangeovy multiplikátory. Potom vypočteme jeho první parciální derivace podle všech proměnných a položíme je rovny nule. Přidáme rovnice pro vazby $g_1 = 0, \dots, g_s = 0$. Máme tak $r + s$ rovnic pro $r + s$ neznámých $x_1, \dots, x_r, \lambda_1, \dots, \lambda_s$. Z těchto rovnic vypočteme souřadnice tzv. *stacionárních bodů*, tj. bodů podezřelých z extrému.

Nyní následuje bod 2. Vypočteme si druhý diferenciál K, např. pro dvě proměnné a jednu vazbu podle vzorce

$$\mathrm{d}^2K = (\partial_{xx}K)h^2 + (\partial_{yy}K)k^2 + (\partial_{xy}K)hk + (\partial_{yx}K)hk\,, \tag{4}$$

kde h je malé posunutí ve směru osy x a k malé posunutí ve směru osy y. Do druhého diferenciálu K pak musíme dosadit konkrétní stacionární body, případně jim odpovídající hodnoty Lagrangeových multiplikátorů. Malá posunutí

h a k však musejí vyhovovat konkrétní vazbě. To zajistí podmínka, že první diferenciál g je roven nule.

$$\mathrm{d}g = (\partial_x g)h + (\partial_y g)k = 0\,. \tag{5}$$

Z této podmínky si vyjádříme jedno z posunutí pomocí druhého, např. vyjádříme k pomocí h, a dosadíme jej do druhého diferenciálu K. Je-li výsledek záporný, jde o maximum, je-li kladný, jedná se o minimum.

V případě většího počtu proměnných a více vazeb je postup obdobný, viz např. příklad 5.4.

Někdy můžeme použít druhého způsobu, jak určit, jestli jde o maximum nebo minimum. Tento postup využívá lokálních extrémů. Platí následující věta.

Věta 5.2. *Má-li Lagrangeova funkce $K = f + \sum_i \lambda_i g_i$ v některém ze svých stacionárních bodů při odpovídající hodnotě Lagrangeových multiplikátorů lokální extrém, pak má funkce f v tomto bodě vázaný extrém stejného typu vzhledem v vazbě g. Pozor, neexistence extrému Lagrangeovy funkce neznamená, že neexistuje vázaný extrém.*

Postup je tedy následující. Sestrojíme Lagrangeovu funkci v daném stacionárním bodě a vypočteme její druhé parciální derivace a určíme tzv. Hessovu matici, pro dvě proměnné tedy

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx}K & \partial_{xy}K \\ \partial_{xy}K & \partial_{yy}K \end{pmatrix}.$$

Při určení minima nebo maxima postupujeme stejně jako ve sekci o lokálních extrémech, tj. extrém určíme na základě znamének subdeterminantů. Vyjde-li nám sedlový bod, nemůžeme touto metodou o extrému nic říct, musíme použít předchozí metody.

5.2 Příklady

Příklad 5.3. *Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině dané $g(x, y) = x + y - 1 = 0$.*

Řešení: Jedná se o funkci dvou proměnných s jednou vazbou, budeme tedy používat jeden Lagrangeův multiplikátor. Určíme nejdříve funkci $K = xy + \lambda(x + y - 1)$ a její parciální derivace podle proměnných x a y.

$$\partial_x K \ = y + \lambda = 0\,, \quad \partial_y K \ = x + \lambda = 0\,.$$

Tyto derivace položíme rovny nule. Dostaneme dvě rovnice, které spolu s rovnicí $g(x, y) = x + y - 1 = 0$ tvoří soustavu tří rovnic o třech neznámých. Z této soustavy vypočteme body podezřelé z extrému, podle bodu 1) Věty 5.1.

$$y = -\lambda, \quad x = -\lambda \quad \Rightarrow \quad -2\lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}\,.$$

Z prvních dvou rovnic jsme vyjádřili x a y a dosadili je do vazby. Dosazením λ do vztahů pro x a y máme $x = y = \frac{1}{2}$. Jediným bodem podezřelým z extrému je tedy bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Dále musíme určit první diferenciál g v tomto bodě (viz rovnici (5)) a položit ho roven nule.

$$\partial_x g = \partial_y g = 1, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}g = h + k = 0$$

Zde h je malé posunutí v proměnné x a k malé posunutí v proměnné y. Nyní vypočteme druhé parciální derivace funkce K a její druhý diferenciál podle rovnice (4)

$$\begin{aligned} \partial^2_{xx}K &= \partial^2_{yy}K &= 0\,, \quad \partial^2_{xy}K &= \partial^2_{yx}K &= 1\,, \\ & & \mathrm{d}^2K &= 2hk = -2h^2 < 0\,. \end{aligned}$$

Ve druhé rovnici jsme dosadili za k z rovnice $h + k = 0$. Druhý diferenciál je pro všechny h záporný, jedná se tedy o lokální maximum.

Kdybychom postupovali metodou Hessovy matice, dostali bychom $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tj. $D_2 < 0$ a sedlový bod. Touto metodou nejde o extrému nic říct.

Příklad 5.4. *Najděte extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině M dané vztahy $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $g_2(x, y, z) = x + y + z = 0$.*

Řešení: Ukážeme si řešení příkladu s funkcí tří proměnných a dvěma vazbami. Čerpáme z příkladu H na str. 132 v [14], proto budeme stručnější, detaily může čtenář nalézt v Kopáčkovi. Funkce K je rovna $K = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$. Pro body podezřelé z extrému (stacionární body) platí:

$$\begin{aligned} \partial_x K &= yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0\,, \\ \partial_y K &= xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0\,, \\ \partial_z K &= xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0\,, \\ g_1 &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,, \\ g_2 &= x + y + z = 0\,. \end{aligned}$$

Máme tedy soustavu pěti rovnic o pěti neznámých.

Jejím vyřešením nalezneme body

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\,, \quad & B_1 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\,, \\ A_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\,, \quad & B_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\,, \\ A_3 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\,, \quad & B_3 &= \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\,. \end{aligned}$$

Body A odpovídají $\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, body B odpovídají $\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Nyní si napíšeme formu druhého diferenciálu funkce K

$$\mathrm{d}^2K(h,k,l) = 2[\lambda_1(h^2+k^2+l^2) + zhk + yhl + xkl]\,.$$

První diferenciály vazeb dávají:

$$2(xh+yk+zl) = 0\,, \quad h+k+l = 0\,.$$

Odsud vypočteme dvě proměnné pomocí třetí a dosadíme do formy pro druhý diferenciál K. Provedeme si to podrobně pouze pro bod A_1. Zde má soustava rovnic z prvních diferenciálů vazeb tvar:

$$h+k-2l = 0\,, \quad h+k+l = 0\,.$$

Odsud vypočteme např. k a l pomocí h. Dostáváme $k=-h$, $l=0$. Po dosazení do druhého diferenciálu K dostáváme

$$\mathrm{d}^2K(h,k,l) = 2\left(\frac{2h^2}{2\sqrt{6}} + \frac{2h^2}{\sqrt{6}}\right) = h^2\sqrt{6}\,.$$

V A_1 je tedy ostré lokální minimum vůči M. Obdobně můžeme ukázat, že ve všech bodech A je ostré lokální minimum, v bodech B ostré lokální maximum.

Příklad 5.5. *Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = 6-4x-3y$ na množině dané $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$.*

Řešení: Napíšeme si funkci K a vypočteme její derivace

$$\begin{aligned}
K &= 6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1)\,,\\
\partial_x K &= -4+2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\lambda}\,,\\
\partial_y K &= -3+2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Dosadíme do vazby $x^2+y^2=1$ a dostáváme

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(4+\frac{9}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{5}{2}\,.$$

Dostáváme dva stacionární body $A = \left[\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right]$, $B = \left[-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right]$.

Nyní musíme ověřit, že jde o lokální extrém, a určit, zda jde o maximum či minimum. První diferenciál vazby musí být nulový.

$$\mathrm{d}g = 2xh + 2yk = 0\,.$$

Dále vypočteme druhé parciální derivace $K_{xx} = K_{yy} = 2\lambda$, $K_{xy} = K_{yx} = 0$ a určíme druhý diferenciál funkce K.

$$\mathrm{d}^2K = 2\lambda(h^2+k^2)\,.$$

Nyní musíme jak $\mathrm{d}g$, tak d^2K vyjádřit v bodech A a B.

Začneme bodem A.

$$
\begin{aligned}
4h + 3k = 0 \quad \Rightarrow \quad k &= -\frac{4}{3}h\,, \\
\mathrm{d}^2K &= 2\frac{5}{2}(h^2+k^2) = 2\frac{5}{2}h^2\left[1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right] > 0\,.
\end{aligned}
$$

Jde tedy o minimum.

Obdobně pro bod B.

$$
\begin{aligned}
-4h - 3k = 0 \quad \Rightarrow \quad k &= -\frac{4}{3}h\,, \\
\mathrm{d}^2K &= 2\left(-\frac{5}{2}\right)(h^2+k^2) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)h^2\left[1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right] < 0\,.
\end{aligned}
$$

Jde o maximum.

Následují slovní úlohy. U nich už nebudeme ověřovat, zda je bod podezřelý z extrému skutečně maximem nebo minimem; to je zřejmé z fyzikální úvahy.

Příklad 5.6. *Určete kvádr, který má při daném povrchu největší objem.*

Řešení: Objem kvádru máme maximalizovat, bude pro nás tedy funkcí f, vazbu určíme ze vztahu pro povrch kvádru.

$$
\begin{aligned}
f = V &= abc\,, \\
g = 2(ab+bc+ac) &- S\,.
\end{aligned}
$$

Dále pokračujeme postupem popsaným v předchozím textu, test toho, co je maximem, už provádět nemusíme.

$$
\begin{aligned}
K &= abc + 2\lambda(ab+bc+ac) - \lambda S\,. \\
\partial_a K &= bc + 2\lambda(b+c) = 0\,, && (6) \\
\partial_b K &= ac + 2\lambda(a+c) = 0\,, && (7) \\
\partial_c K &= ba + 2\lambda(b+a) = 0\,, && (8) \\
2(ab+bc+ac) &= S\,. && (9)
\end{aligned}
$$

Soustavu těchto čtyř rovnic vyřešíme tak, že od sebe jednotlivé rovnice odečteme.

$$
\begin{aligned}
(6)-(7): &\qquad (b-a)(c+2\lambda) = 0\,, \\
(8)-(7): &\qquad (b-c)(a+2\lambda) = 0\,, \\
(8): &\qquad ba + 2\lambda(b+a) = 0\,, \\
(9): &\qquad 2(ab+bc+ac) = S\,.
\end{aligned}
$$

Abychom splnili první dvě rovnice, máme čtyři možnosti, podle toho, která dvojice závorek je nulová.

1.
$$a = b = c \quad \Rightarrow \quad \text{z rce (9)} : S = 6a^2 \quad \Rightarrow \quad a = b = c = \sqrt{\frac{S}{6}}\,,$$

2.
$$\begin{aligned} b = a = -2\lambda \quad &\Rightarrow \quad \text{z rce (8)} : a^2 + 2\left(-\tfrac{a}{2}\right)2a = 0 \\ &\Rightarrow \quad a = b = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0\,, \end{aligned}$$

3.
$$b = c = -2\lambda \quad \Rightarrow \quad V = 0\,,$$

4.
$$c = -2\lambda = a \quad \Rightarrow \quad V = 0\,.$$

Body 2 až 4 dávají nulový objem, proto jedinou možností maxima je první možnost, tedy krychle.

Příklad 5.7. *Určete poloměr a výšku válce, který má při daném povrchu maximální objem.*

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladě.

$$\begin{aligned} f = V &= \pi r^2 h\,, \\ g = 2\pi r(r+h) - S &= 0\,. \\ K &= \pi r^2 h + 2\lambda\pi r(r+h) - \lambda S\,, \\ \partial_r K &= 2\pi r h + 4\pi r\lambda + 2\pi h\lambda = 0\,, \\ \partial_h K &= \pi r^2 + 2\pi r\lambda = 0\,. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme $\pi r(r+2\lambda) = 0$, odsud buď $r = 0$ nebo $r = -2\lambda$. První možnost dává nulový objem, a tedy nás nezajímá. Z parciální derivace podle r máme
$$rh + 2r\lambda + h\lambda = 0\,,$$
po dosazení za r pak máme
$$-2\lambda h - 4\lambda^2 + h\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad h = -4\lambda = 2r\,.$$

V rovnici jsme vyloučili možnost $\lambda = 0$, která by také vedla k nulovému objemu. Výška tedy musí být stejná jako průměr podstavy. Její velikost zjistíme z vazby.

$$S = 2\pi r 3r \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}\,.$$

5.3 Literatura

Zadání příkladů jsou inspirována [14, 10, 27], v těchto zdrojích lze nalézt i další příklady.

5.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 5.8. *Určete vázané extrémy funkce* $f(x,y) = xy - x + y - 1$ *s vazbou* $g(x,y) = x + y - 1 = 0$.

Příklad 5.9. *Určete vázané extrémy funkce* $f(x,y,z) = z^2 + x^2 + y^2$ *s vazbami* $g_1(x,y,z) = x + y - 3z + 7 = 0$, $g_2(x,y,z) = x - y + z - 3 = 0$.

Příklad 5.10. *Najděte vázané extrémy funkce* $f(x,y,z) = xyz$ *s vazbami* $g_1(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$, $g_2(x,y,z) = x + y - z = 0$.

Příklad 5.11. *Najděte vázané extrémy funkce* $f(x,y) = x+2y$ *s vazbou* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Příklad 5.12. *Najděte vázané extrémy funkce* $f(x,y) = x + y + z$ *s vazbou* $g(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Příklad 5.13. *Určete vzdálenost paraboly* $y = x^2$ *od přímky* $x - y - 2 = 0$. *Rovnice nemusíte exaktně dopočítávat, můžete je vyřešit numericky.*

Příklad 5.14. *Najděte bod na jednotkové kružnici, který je nejblíže bodu* $[3,1]$.

Příklad 5.15. *Najděte body na křivce* $x^2y = 2$, *které jsou nejblíže počátku.*

Příklad 5.16. *Najděte obdélník s daným obvodem* $2p$, *který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s největším objemem.*

6 Diferenciální rovnice – separace proměnných

6.1 Teorie

Diferenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých se vyskytuje neznámá funkce a její derivace. Naším cílem je tuto funkci určit. K řešení těchto rovnic byly vytvořeny různé metody, jednou z nejjednodušších a nejstandardnějších je separace proměnných.

Budeme se zabývat rovnicí

$$y' = f(x)g(y)$$

na otevřené množině $\Omega = (a, b) \times (c, d)$. Lze snadno nahlédnout, že tato rovnice má triviální řešení $y(x) = y_0 =$ konst. takové, že $g(y_0) = 0$. Vyloučíme-li toto řešení, lze psát

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)g(y)\,, \\ \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= f(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Obě proměnné jsme separovali, na jednu stranu rovnice jsme dali vše s x, na druhou stranu rovnice vše s y, formálně včetně diferenciálů. Poté jsme obě strany rovnice zintegrovali. Vyřešením integrálů můžeme nalézt řešení diferenciální rovnice. Přesněji řečeno, obdržíme rovnici, ve které se vyskytuje pouze neznámá funkce a proměnná, ne však derivace neznámé funkce. Pokud máme štěstí, můžeme z ní přímo vyjádřit tuto neznámou funkci (řešení v tzv. explicitním tvaru); pokud se neznámá funkce vyskytuje v rovnici ve složitém výrazu, musíme se spokojit pouze se zmíněnou rovnicí. Pak říkáme, že řešení je v implicitním tvaru.

Lze hledat tzv. maximální řešení, tedy řešení, které je definované na maximálním možném intervalu (viz např. [14, 1]). V tomto textu budeme hledat pouze řešení lokální. Máme-li dvě různá řešení (např. triviální řešení a řešení nalezené separací proměnných), můžeme řešení „sešívat“. Pokud obě řešení mají v jednom bodu stejnou funkční hodnotu, můžeme definovat spojité řešení, které nalevo od tohoto bodu má tvar jednoho řešení a napravo druhého.

6.2 Příklady

Příklad 6.1. *Najděte řešení rovnice* $y' = -y \operatorname{cotg} x$

Řešení: Triviální řešení je $y = 0$. Obecně triviální řešení určíme tak, že položíme funkci g rovnou nule. Má-li funkce g kořen y_0, je $y(x) = y_0$ triviálním řešením. Nyní najdeme ostatní řešení. Derivaci napíšeme pomocí diferenciálů.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y \operatorname{cotg} x\,.$$

Separujeme proměnné vydělením y a vynásobením $\mathrm{d}x$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rovnici integrujeme.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po integraci (vpravo použijeme substituci $t = \sin x$) dostáváme

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln C_1\,.$$

Nesmíme zapomenout na integrační konstantu, kterou jsme zapsali ve tvaru $\ln C_1$. Integrační konstantu stačí psát jen na jednu stranu rovnice, protože integrační konstanty obou integrálů dají po odečtení jinou (jednu) konstantu. Rovnici lze upravit na

$$\ln|y\sin x| = \ln C_1\,.$$

Po odlogaritmování (obě strany rovnice napíšeme jako argumenty exponenciály) dostáváme

$$y\sin x = \pm C_1\,.$$

Obecné řešení lze tedy zapsat ve tvaru (záporně vzatá konstanta je stále konstanta, následující zápis proto zahrnuje obě znaménka předchozí rovnice)

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}\,.$$

Tento tvar zahrnuje i triviální řešení.

Příklad 6.2. *Najděte řešení rovnice* $(x-1)y' + y^2 = 0$ *s počáteční podmínkou* $y(2) = -1$.

Řešení: Triviální řešení je $y = 0$. Vyloučíme-li toto řešení, můžeme upravit rovnici do tvaru

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2\,,$$

což vede po vydělení y^2, $(x-1)$, vynásobení $\mathrm{d}x$ a zintegrování k

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\,.$$

Po integraci dostáváme

$$-\frac{1}{y} = -\ln|x-1| + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\ln|x-1| - C}\,.$$

Zaměříme se na $x > 1$, což odpovídá intervalu, ve kterém je definovaná počáteční podmínka. Nyní dosadíme počáteční podmínku, z čehož zjistíme konstantu C.

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C} \quad \Rightarrow \quad C = 1\,.$$

Hledané řešení pro $x > 1$ tedy je

$$y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}.$$

Pro $x < 1$ dostáváme řešení

$$y(x) = \frac{1}{\ln(1-x) - C_2}$$

a nalezené řešení v pravé části můžeme sešívat v $x = 1$ s tímto řešení nebo s triviálním řešením.

Příklad 6.3. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice* $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

Řešení: Triviální řešení je $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vyloučíme-li toho řešení, můžeme psát po úpravě

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos y}{\sin y}\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Obě strany zintegrujeme (vlevo použijeme substituci za sinus, vpravo za kosinus)

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Po integrování máme

$$\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin y \cos x| = \ln C.$$

Tedy po odlogaritmování

$$\sin y = \pm\frac{C}{\cos x} = \frac{C_1}{\cos x}.$$

Využili jsme toho, že znaménka $\pm$ můžeme odstranit předefinováním konstanty. Odsud $y(x) = \arcsin\frac{C}{\cos x}$. Řešení máme na intervalech $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ tedy intervalech, na kterých je kosinus nenulový. Opět můžeme „sešívat“ tato řešení s triviálními řešeními.

Příklad 6.4. *Najděte řešení rovnice* $y' \sin x = y \cos x$.

Řešení: Triviální řešení je $y = 0$. Rovnici upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Separujeme proměnné a integrujeme (vpravo s použitím substituce za sinus).

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

Dostáváme

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C\,,$$

Tedy máme

$$\ln\left|\frac{y}{\sin x}\right| = \ln C\,,$$
$$\frac{y}{\sin x} = \pm C$$

Řešením je tedy

$$y = C_1 \sin x\,.$$

Daný zápis zahrnuje i triviální řešení.

Příklad 6.5. *Najděte řešení rovnice* $x^2y' - y^2 = 1$*.*

Řešení: Triviální řešení není. Rovnice se dá přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+y^2}{x^2}\,,$$

Což po úpravě vede na

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Po integraci dostáváme

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{x} + C\,,$$

Tedy

$$y = \operatorname{tg}\left(C - \frac{1}{x}\right)\,.$$

Příklad 6.6. *Najděte řešení rovnice* $2xyy' = x + 2$*.*

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Můžeme psát

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+2}{2x}$$

Po separaci proměnných dostáváme

$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\,,$$

po integraci pak

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x}{2} + \ln|x| + C\,,$$

Výsledek je

$$y = \pm\sqrt{x + 2\ln|x| + C}\,.$$

Příklad 6.7. *Řešte rovnici* $(xy^2 + x) + (y - x^2y)y' = 0$*.*

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Rovnice lze upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x(y^2+1)}{y(1-x^2)}\,.$$

Po separaci proměnných zintegrování obou stran dostáváme

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\,,$$

což vede při použití substituce za jmenovatele obou zlomků a vynásobení rovnice dvěma k

$$\ln|x^2-1| = \ln|y^2+1| - \ln C\,.$$

Tedy

$$\ln\left|\frac{x^2-1}{y^2+1}\right| = -\ln C$$

a obdobně jako v minulých příkladech

$$1+y^2 = C(x^2-1)\,.$$

Osamostatněním y máme

$$y = \pm\sqrt{C(x^2-1)-1}\,.$$

Příklad 6.8. *Řešte rovnici* $xyy' = 1-x^2$.

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Rovnici lze upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-x^2}{xy}\,.$$

Separací proměnných dostáváme

$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x\,.$$

Integrace je jednoduchá.

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Odsud osamostatníme y.

$$y = \pm\sqrt{2\ln|x| - x^2 + C_1}\,.$$

Příklad 6.9. *Řešte rovnici* $xy + (x+1)y' = 0$.

Řešení: Triviální řešení je $y = 0$. Rovnici lze upravit na

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{xy}{x+1}\,.$$

Separací proměnných dostáváme

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = -\int 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

integrací pak

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C\,.$$

Tedy máme

$$\left|\frac{y}{x+1}\right| = C\mathrm{e}^{-x}$$

A obdobně jako v minulých příkladech

$$y = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Tento zápis zahrnuje i triviální řešení.

Příklad 6.10. *Řešte rovnici* $\sqrt{y^2+1} = xyy'$.

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}\,,$$

Separací proměnných dostáváme

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

což řešíme substitucí za vnitřek odmocniny nalevo a tabulkovým integrálem napravo. Dostáváme

$$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C\,.$$

Osamostatněním y pak máme

$$y = \pm\sqrt{(C+\ln|x|)^2 - 1}\,.$$

6.3 Rovnice typu $y' = f(ax+by+c)$

Tato rovnice lze převést na rovnici se separovanými proměnnými substitucí $z(x) = ax + by + c$. Odsud dostáváme $y' = \frac{z'-a}{b}$. Dosadíme-li tento výraz zpět do původní rovnice, dostaneme rovnici

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{a+bf(z)} = \mathrm{d}x\,,$$

kterou vyřešíme integrací.

Příklad 6.11. *Vyřešte rovnici* $y' = y - 3x + 5$

Řešení: Zřejmě použijeme $f(z) = z = y - 3x + 5$, odsud $z' = y' - 3$, tj. Po dosazení za y a y' dostáváme z původní rovnice $z' = z - 3$. Tu řešíme separací proměnných.

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}z}{z-3} &= \int \mathrm{d}x \,, \\ \ln|z-3| &= x + \ln C \,. \end{aligned}$$

Nyní aplikujeme na obě strany rovnice exponenciálu

$$|z-3| = C\,\mathrm{e}^x$$

Absolutní hodnotu můžeme odstranit, protože případná změna znaménka se „schová“ do konstanty. Máme

$$z(x) = C\,\mathrm{e}^x + 3 \,.$$

Zpětným dosazením do vztahu mezi y a z získáváme

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^x + 3x - 2 \,.$$

Příklad 6.12. *Vyřešte rovnici* $y' = -(x-y)^2$

Řešení: Zvolíme $z = x - y$, $z' = 1 - y'$, $f(z) = -z^2$. Po substituci obdržíme

$$1 - z' = -z^2 \,.$$

Separací proměnných dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} &= \int \mathrm{d}x \,, \\ \operatorname{arctg} z &= x + C \,, \\ z &= \operatorname{tg}(x + C) \end{aligned}$$

a po substituci máme

$$y(x) = x - \operatorname{tg}(x + C) \,.$$

6.4 Homogenní rovnice

Jako homogenní rovnici označíme rovnici ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Řeší se substitucí $z = \frac{y}{x}$, tj. $y = zx$, $y' = z'x + z$, čímž se převede na separovatelnou rovnici.

Příklad 6.13. *Vyřešte rovnici* $(2xy - x^2)y' = 3y^2 - 2xy$

Řešení: Rovnici si přepíšeme do tvaru

$$y' = \frac{3y^2 - 2xy}{2xy - x^2} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} - 1} \,,$$

je tedy homogenní. Dosazením substitučních vztahů máme

$$
\begin{aligned}
z'x + z &= \frac{3z^2 - 2z}{2z - 1}\,, \\
x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{z^2 - z}{2z - 1}\,.
\end{aligned}
$$

Separací proměnných získáme

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2z - 1}{z^2 - z}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \\
\ln|z^2 - z| &= \ln|x| + \ln C\,, \\
z^2 - z &= Cx\,, \\
y^2 - xy - Cx^3 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Řešení jsme tedy našli v explicitním tvaru.

Příklad 6.14. *Řešte rovnici* $xy' - y - \sqrt{x^2 - y^2} = 0$ *s počáteční podmínkou* $y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení: Rovnici upravíme na tvar $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2}$. Po zavedení substituce a separace proměnných dostáváme

$$
z'x + z = z + \sqrt{1 - z^2}\,.
$$

Odečteme z a separujeme proměnné.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - z^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \\
\arcsin z &= \ln|x| + C\,, \\
y &= x\sin(\ln|x| + C)\,.
\end{aligned}
$$

Nyní vypočítáme konstantu z počátečních podmínek.

$$
\frac{1}{2} = \sin C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{6}\,.
$$

Výsledné řešení tedy je

$$
y(x) = x\sin\left(\ln|x| + \frac{\pi}{6}\right).
$$

6.5 Literatura

Teorie je vyložena v [12], další řešené i neřešené příklady lze nalézt v [14, 1, 25, 3, 9, 22, 7, 28, 16]. Část této sekce byla převzata ze studijního textu [18], kde byl upraven a doplněn původní studijní text k Matematice 1.

6.6 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 6.15. *Řešte rovnici* $y' \operatorname{tg} x - y = a$.

Příklad 6.16. *Řešte rovnici* $y' \operatorname{cotg} x + y = 2$ *s počáteční podmínkou* $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Příklad 6.17. *Řešte rovnici* $y' \sin x \cos x - y = 0$.

Příklad 6.18. *Řešte rovnici* $(xy^2 + x) + (y - x^2 y)y' = 0$.

Příklad 6.19. *Řešte rovnici* $xyy' = 1 - x^2$.

Příklad 6.20. *Řešte rovnici* $y' = y + 2x - 3$.

Příklad 6.21. *Řešte rovnici* $x^2 y' = y^2 + xy$.

Příklad 6.22. *Řešte rovnici* $xy' - y = 2\sqrt{xy}$.

7 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování

Př. 1.23: Postupně dokažte, že jsou splněny všechny body definice vektorového prostoru.

Př. 1.24: Lineárně závislé: $0 = 3u + v - w$.

Př. 1.25: $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Báze má 6 prvků, dimenze je tedy 6.

Př. 1.26: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Př. 1.27: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Př. 1.28: Inverze neexistuje, řádky nebo sloupce jsou lineárně závislé.

Př. 1.29: 5.

Př. 1.30: -6.

Př. 1.31: 0, 2, 4.

Př. 1.32: Vlastní čísla $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, vlastní vektory odpovídající těmto vlastním číslům postupně $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Př. 1.33: -1, 1, 1.

Př. 1.34: 0, 1, 2.

Př. 1.35: 1, 1, 2.

Př. 2.22: Při pevném nenulovém x je $\lim_{y\to 0} f(x, y) = 0$, limita samých nul je nula. Neexistenci limity dvou proměnných lze ověřit např. pomocí přímek $y = kx$, pro $k = 1$ dostaneme výsledek 1, pro ostatní 0.

Př. 2.23: Postupné limity neexistují,protože neexistuje limita $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Limitu funkce dvou proměnných dostaneme z věty o limitě součinu funkce omezené a funkce jdoucí k nule.

Př. 2.24: Neexistuje, lze ověřit přímkami $y = kx$.

Př. 2.25: a.

Př. 2.26: a) $\partial_{xx} f = 24x + 4y$, $\partial_{yy} f = 42y$, $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 4x$,
b) $\partial_{xx} f = 2\cos(x + y) - x\sin(x + y)$, $\partial_{yy} f = -x\sin(x + y)$, $\partial_{xy} f = \cos(x + y) - x\sin(x + y)$.

Př. 2.27: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Př. 2.28: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Př. 2.29: $-\frac{3\sqrt{5}\pi}{10}$.

Př. 2.30: $3h_1 + 3h_2$.

Př. 2.31: $D(f) = \mathbb{R}^2$, všude spojitá, všude diferenciál a tudíž všude 1. parciální derivace, jež jsou nespojité pouze v počátku.

Př. 3.21: $\mathbf{v} = (3t^2, 2t\sin(t) + t^2\cos(t), -\sin(t))$, $\mathbf{a} = (6t, (2 - t^2)\sin(t) + 4t\cos(t), -\cos(t))$.

Př. 3.22: $\frac{-r\sin r - \cos r}{r^3}\mathbf{r}$.

Př. 3.23: $\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{r}|}$.

Př. 3.24: 0.
Př. 3.25: 0.
Př. 3.26: 0.
Př. 4.10: Stacionární bod $A = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$ – extrém neexistuje.
Př. 4.11: Stacionární bod $A = [1, 5]$ – extrém neexistuje.
Př. 4.12: Stacionární bod $A = [1, 0]$ – ostré lok. minimum.
Př. 4.13: Stacionární bod $A = [12, 7]$ – ostré lok. minimum.
Př. 4.14: Stacionární body $A_1 = [0, 0]$ – extrém neexistuje, $A_2 = [-4, 0]$ – extrém neexistuje, $A_3 = [-2, 2]$ – ostré lok. minimum.
Př. 4.15: Stacionární body $A_1 = [2, 4]$ – ostré lok. minimum, $A_2 = [2, -5]$ – extrém neexistuje, $A_3 = [-3, 4]$ – extrém neexistuje, $A_4 = [-3, -5]$ – ostré lok. maximum.
Př. 5.8: Maximum $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
Př. 5.9: Minimum $A = [0, -1, 2]$.
Př. 5.10: Maximum $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
Př. 5.11: Minimum $A = \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$, maximum $B = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$.
Př. 5.12: Maximum $A = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, minimum $B = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.
Př. 5.13: Body na křivkách, které jsou si nejblíž, jsou $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right]$. Vzdálenost je $\frac{7}{8}\sqrt{2}$.
Př. 5.14: $\left[\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$.
Př. 5.15: $A = \left[\sqrt{2}, 1\right]$, $B = [-\sqrt{2}, 1]$.
Př. 5.16: $b = \frac{p}{3}$, $a = \frac{2}{3}p$.
Př. 6.15: $y = -a + C \sin x$.
Př. 6.16: $y = 2 - 4 \cos x$.
Př. 6.17: $y = C \operatorname{tg} x$.
Př. 6.18: $y = \pm\sqrt{C(x^2 - 1) - 1}$.
Př. 6.19: $y = \pm\sqrt{2 \ln |x| - x^2 + C_1}$.
Př. 6.20: $y = 1 - 2x + C\mathrm{e}^x$.
Př. 6.21: $y = -\frac{x}{\ln x + C}$.
Př. 6.22: $y = x(\ln x + C)^2$.

Použitá a doporučená literatura

[1] Bárta, T. Separace proměnných. UK v Praze, Praha. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/Kapitola-SeparaceProm/separ.html

[2] Binegar, B. Identities of Vector Analysis. Oklahoma State University. Dostupné z www: https://math.okstate.edu/people/binegar/4013-U98/4013-l15.pdf

[3] Černý, R., Pokorný, M. Matematická analýza pro fyziky II. UK v Praze, Praha, 2017. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rcerny/skripta_MAF2.pdf

[4] Děmidovič, B. P. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Havlíčkův Brod, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[5] Fyzikální korespondenční seminář: Diferenciální operátory ve fyzice. Dostupné z www: 1. část: https://www.youtube.com/watch?v=QlivFNOugs8, 2. část: https://www.youtube.com/watch?v=vTOCkLwwYz8

[6] Hamhalter, J., Tišer, J. Diferenciální počet funkcí více proměnných. FEL ČVUT, Praha, 2005 Dostupné z www: http://math.feld.cvut.cz/tiser/difpocet.htm

[7] Hekrdla, J. Obyčejné diferenciální rovnice. FEL ČVUT, 2008. Dostupné z www: http://math.feld.cvut.cz/hekrdla/Teaching/X01MA2/Prednasky/ODR.pdf

[8] Hrivňák, D. Diferenciální operátory vektorové analýzy. Ostravská univerzita, Ostrava, 2002. Dostupné z www: http://artemis.osu.cz/uvma3/UVMA3_1.pdf

[9] Jarešová, M., Vybíral, B. Diferenciální rovnic. Studijní text FO. Dostupné z www: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difro.pdf

[10] Klaška J. Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných. FSI VUT v Brně, Brno, 2006. Dostupné z www: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=364

[11] Klaška, J. Lokální extrémy – řešené příklady . VUT v Brně, 2006. Dostupné z www: mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=317

[12] Kopáček, J. Matematická analýza pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2003. ISBN 80-86732-10-X.

[13] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky I. Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-90-1.

[14] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2003. ISBN 80-86732-13-4.

[15] Krejčiřík, D. Lineární algebra. FJFI ČVUT, Praha, 2017. Dostupné z www: http://gemma.ujf.cas.cz/~krejcirik/other/la.pdf

[16] Kreml, P. Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu. VŠB - TU Ostrava. Dostupné z www: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_8_1.pdf

[17] Kuben, J., Mayerová, Š., Račková, P., Šarmanová, P. Diferenciální počet funkcí více proměnných. VŠB-TU Ostrava a ZČU v Plzni, 2012 Dostupné z www: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf

[18] Lipovský, J. Matematika k základům fyziky 2. Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, 2018. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/kmzf2.pdf

[19] Marvan, M. Vektorové prostory. Slezská univerzita v Opavě, Opava, 2001. Dostupné z www: http://www.slu.cz/math/cz/knihovna/docs/algebra1/9.-vektorove-prostory

[20] Mařík, R. Inženýrská matematika, lokální extrémy funkcí dvou proměnných. MU v Brně, 2006. Dostupné z www: https://www.math.muni.cz/~pribylova/lokalniextremy2-cz.pdf

[21] Motl, L., Zahradník M. Pěstujeme lineární algebru. 3. vyd. Praha, Karolinum, 2002. 348 s. ISBN 8024604213. Dostupné z www: http://matematika.cuni.cz/zahradnik-pla.html

[22] Obyčejné diferenciální rovnice. FEL ČVUT. Dostupné z www: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/kalous/laa/prednasky/difrov.pdf

[23] Olšák, P. Lineární algebra. ČVUT v Praze, Praha, 2000–2007. Dostupné z www: http://petr.olsak.net/ftp/olsak/linal/linal.pdf

[24] Pospíšil, V. Lineární algebra. Dostupné z www: www.mff.cz/data/LA_VP.pps

[25] Říhová, H. Diferenciální rovnice I. řádu. FBMI ČVUT, Praha. Dostupné z www: http://dagles.klenot.cz/rihova/difrce1.pdf

[26] Souček, V. Lineární algebra pro fyziky. Dostupné z www: http://matematika.cuni.cz/soucek-laf.html

[27] Šibrava, Z. Příklady k matematice 2. FSV ČVUT v Praze. Dostupné z www: http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/funkce.pdf

[28] Tomiczek, P. Sbírka příkladů z matematické analýzy II. ZCU v Plzni. Dostupné z www: `http://home.zcu.cz/~tomiczek/Data/sbirkaprikladukMA2.pdf`

[29] Úvod do vyšší matematiky 2. Příklady a cvičení. Ostravská univerzita Dostupné z www: `http://artemis.osu.cz/uvma2/prikl/`

[30] Volný, P. Matematika II - Funkce více proměnných. VŠB – TU Ostrava, 2006. Dostupné z www: `http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fceviceprom.html`