Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

MATEMATIKA 2

RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.

Hradec Králové 2013 – 2018

Obsah

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OP VK „Inovace studijních oborů zajišťovaných katedrami PřF UHK“
Registrační číslo: CZ.1.07/2.2.00/28.0118

Předmluva z roku 2014

Tento soubor studijních textů vznikl v letech 2013 až 2014 jako podpora pro studenty předmětů Matematika 1 a Matematika 2 na Katedře fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Předměty jsou vyučovány v zimním, resp. letním semestru 1. ročníku NMgr. studia oboru Fyzikální měření a modelování. Studijní texty pokrývají hlavně diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných a metody řešení diferenciálních rovnic. Je v nich nejdříve shrnuta potřebná teorie; věty jsou uvedeny většinou bez důkazů. Student, který by se chtěl s teorií seznámit hlouběji, může využít existujících učebnic, např. série skript J. Kopáčka „Matematická analýza pro fyziky“ a „Příklady z matematiky pro fyziky“. Největší důraz je kladen na dostatek řešených příkladů, které mají studentovi pomoci pochopit aplikaci dané látky. U většiny témat jsou uvedeny také neřešené příklady k samostatnému procvičení; student si dále látku zopakuje i v domácích úkolech, které jsou ke stažení na stránkách předmětů `http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching.html`. Pokud ve studijních textech najdete chybu, uvítám, pokud mě na to upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

Při přípravě těchto skript jsem byl podporován projektem OP VK „Inovace studijních oborů zajišťovaných katedrami PřF UHK“, registrační číslo: CZ.1.07/2.2.00/28.0118. Dále děkuji i svým studentům za to, že mě upozornili na chyby v textech.

V Hradci Králové 18. 12. 2014 — Jiří Lipovský

Předmluva z roku 2018

Vzhledem k tomu, že řešení příkladů v původních textech byla většinou relativně stručná, rozhodl jsem se původní texty přepracovat a hlavně detailněji popsat postup řešení příkladů. Doufám, že přepracovaný text bude sloužit studentům lépe. Stále platí prosba o upozornění na chyby v textu, které se jistě po úpravách objeví.

V Hradci Králové, 28. 10. 2018 — Jiří Lipovský

verze 1.1

1 Homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

1.1 Teorie

Budeme se zabývat rovnicemi typu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

s reálnými konstantami $a_0, \ldots a_n$. Snadno vidíme, že jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ řešeními této diferenciální rovnice, je řešením také jejich lineární kombinace $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Označíme-li si operátor na levé straně rovnice jako $L(y)$, máme

$$L(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = C_1 L(y_1(x)) + C_2 L(y_2(x)) = 0\,.$$

Z toho plyne, že operátor L je lineární a že lineární kombinace řešení rovnice (1) je také jejím řešením. Dále můžeme nahlédnout, že je-li řešením funkce $y(x) = u(x) + iv(x)$, jsou řešeními i funkce $u(x)$ a $v(x)$.

Řekneme, že funkce $y_1(x), y_2(x) \ldots, y_n(x)$ jsou lineárně závislé na daném intervalu, pokud na tomto intervalu existují konstanty $c_1, c_2, \ldots c_n$, z nichž alespoň jedna je nenulová a pro něž platí

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots c_n y_n(x) = 0\,.$$

V opačném případě jsou tyto funkce lineárně nezávislé.

Pokud mají funkce $y_1(x), y_2(x) \ldots, y_n(x)$ derivace do řádu $n-1$ včetně, můžeme jejich lineární závislost nebo nezávislost určit z tzv. Wronského determinantu (wronskiánu)

$$W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Platí, že řešení homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty $y_1(x), y_2(x) \ldots, y_n(x)$ jsou na nějakém intervalu lineárně závislé, právě když je jejich wronskián na tomto intervalu nulový.

Pokud máme n řešení $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ rovnice (1), jejichž wronskián je nenulový (jsou lineárně nezávislé) pak soustavu $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ nazýváme *fundamentálním systémem* rovnice (1).

Nyní si řekneme, jak vypočítat řešení rovnice (1). Postupujeme tzv. Eulerovou metodou. Zvolíme substituci $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Víme, že každá derivace této funkce znamená vynásobení této funkce k. Po dosazení do rovnice (1) máme

$$\mathrm{e}^{kx}(a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0) = 0\,.$$

Polynom v závorce se nazývá *charakteristickým polynomem* rovnice (1), položíme-li ho roven nule, dostáváme tzv. *charakteristickou rovnici.*

Jsou-li kořeny charakteristického polynomu různé, tvoří funkce $\mathrm{e}^{k_1 x}, \mathrm{e}^{k_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{k_n x}$ fundamentální systém. Obecné řešení rovnice (1) je tedy

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{k_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{k_2 x} + \cdots + C_n \mathrm{e}^{k_n x} .$$

Pokud má charakteristický polynom komplexní kořen $a + ib$, pak rovnice (1) má řešení $y_1(x) = \mathrm{e}^{ax} \cos bx$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{ax} \sin bx$. Z Eulerova vzorce totiž vidíme

$$\mathrm{e}^{a+bi} = \mathrm{e}^{a}\, \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{a} \left(\cos b + i \sin b \right) .$$

Jak jsme výše uvedli, reálná i imaginární složka této funkce musí vyhovovat řešení rovnice (1). Poznamenejme, že jsme tak získali sice dvě nová řešení místo jednoho, musíme si však uvědomit, že zároveň je kořenem charakteristické rovnice také $a - bi$.

Nyní ještě zbývá rozebrat si, co se stane, pokud dva nebo více z kořenů charakteristické rovnice jsou stejné. Zjevně totiž výše uvedený postup nedává lineárně nezávislá řešení. Abychom našli fundamentální systém rovnice, musíme přidat řešení $\mathrm{e}^{kx}, x\mathrm{e}^{kx}, \ldots x^{r-1}\mathrm{e}^{kx}$ pro r-násobný kořen k charakteristického polynomu. Pokud je r-násobný kořen komplexní, je fundamentální systém

$$\mathrm{e}^{ax} \cos bx, x\mathrm{e}^{ax} \cos bx, \ldots, x^{r-1}\mathrm{e}^{ax} \cos bx, \mathrm{e}^{ax} \sin bx, x\mathrm{e}^{ax} \sin bx, x^{r-1}\mathrm{e}^{ax} \sin bx .$$

1.2 Příklady

Příklad 1.1. *Určete, zda funkce* e^{x} *a* e^{-x} *jsou lineárně závislé nebo nezávislé.*

Řešení: Spočteme wronskián těchto dvou funkcí

$$W_{\mathrm{e}^{x},\mathrm{e}^{-x}}(x) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = -\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} = -2 .$$

Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

Příklad 1.2. *Určete, zda funkce* $1, \sin^2 x$ *a* $\cos^2 x$ *jsou lineárně závislé nebo nezávislé.*

Řešení: Wronskián je:

$$W_{1,\sin^2 x,\cos^2 x}(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{pmatrix} =$$
$$-2\cos 2x \sin 2x + 2\cos 2x \sin 2x = 0 .$$

Funkce jsou lineárně závislé.

Příklad 1.3. *Řešte rovnici* $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 - 4k + 3 = 0$, jejími kořeny pak jsou čísla $k = 1$ a $k = 3$, neboť $(k-1)(k-3) = 0$. Jedná se o dva různé reálné kořeny. Řešením rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} .$$

Příklad 1.4. *Řešte rovnici* $y^{(3)} - 7y' - 6y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^3 - 7k - 6 = 0$. Abychom ji vyřešili, „tipneme" jeden z kořenů. Lehce zjistíme, že $k_1 = -1$. Podělením polynomu charakteristické rovnice polynomem $k + 1$ získáme

$$(k^3 - 7k - 6) : (k + 1) = k^2 - k - 6\,.$$

Dále tedy řešíme kvadratickou rovnici $k^2 - k - 6 = 0$. Kořeny této rovnice jsou $k_2 = -2$, $k_3 = 3$. Všechny tři kořeny charakteristické rovnice jsou různé, obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + C_3 \mathrm{e}^{3x}\,.$$

Příklad 1.5. *Řešte rovnici* $y^{(3)} - 3y'' - 6y' + 8y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^3 - 3k^2 - 6k + 8 = 0$. Její kořeny určíme obdobně jako v předchozím příkladě. Zkoušením celých čísel s malou absolutní hodnotou najdeme, že kořenem je $k_1 = 1$, podělením polynomu $k^3 - 3k^2 - 6k + 8$ polynomem $k - 1$ najdeme kvadratickou rovnici $k^2 - 2k - 8 = 0$, jejímiž kořeny jsou $k_2 = 4$, $k_3 = -2$. Všechny tři kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a různé, jde opět o první případ. Obecné řešení tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + C_3 \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Příklad 1.6. *Řešte rovnici* $y'' + 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 + 9 = 0$, její kořeny $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$. Protože jde o jednonásobné komplexní kořeny, jde o druhý uvedený případ s $a = 0$, $b = 3$. Obecné řešení tedy je

$$y(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\,.$$

Příklad 1.7. *Řešte rovnici* $y'' + 3y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 + 3k + 4 = 0$, její kořeny jsou $k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$. Opět se jedná o jednonásobné komplexní kořeny s $a = -\frac{3}{2}$ a $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x\,.$$

Příklad 1.8. *Řešte rovnici* $y'' + 2y' + 3y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 + 2k + 3 = 0$, její kořeny jsou $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} i$, tedy dva jednonásobné komplexní kořeny. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} \cos \sqrt{2} x + C_2 \mathrm{e}^{-x} \sin \sqrt{2} x\,.$$

Příklad 1.9. *Řešte rovnici* $y^{(3)} - 7y'' + 15y' - 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^3 - 7k^2 + 15k - 9 = 0$, její jeden kořen „tipneme", např. $k_1 = 1$ a podělením polynomů získáme kvadratickou rovnici $k^2 - 6k + 9$. Tj. její kořeny jsou $k_2 = k_3 = 3$. Dva kořeny jsou stejné, jedná se proto o třetí typ výsledku. K jednomu z řešení musíme přidat x. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + C_3x\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Příklad 1.10. *Řešte rovnici* $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^2 - 4k + 4 = 0$, její kořeny jsou $k_1 = k_2 = 2$. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Příklad 1.11. *Řešte rovnici* $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je $k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 = 0$, její kořeny jsou $k_1 = k_2 = i$, $k_3 = k_4 = -i$. Jedná se proto o dvojnásobné komplexní kořeny s $a = 0$, $b = 1$. Protože jsou kořeny dvojnásobné, přidáme ke kosinu a sinu také výrazy vynásobené x. Obecné řešení rovnice tedy je

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x\,.$$

1.3 Literatura

Jako další literaturu doporučujeme např. [7, 18, 13, 12].

1.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 1.12. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 5y^{(3)} + 11y'' - 11y' + 4y = 0$.

Příklad 1.13. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$.

Příklad 1.14. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 13y'' - 24y' + 36y = 0$.

Příklad 1.15. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 10y'' - 18y' + 9y = 0$.

Příklad 1.16. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Příklad 1.17. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 8y'' + 6y' - 9y = 0$.

Příklad 1.18. *Najděte obecné řešení rovnice* $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 13y'' - 36y' + 36y = 0$.

2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

2.1 Teorie

Nyní se budeme zabývat lineárními diferenciálními rovnicemi 1. řádu s netriviální pravou stranou, tedy $y' + g(x)y = f(x)$. Řešení této rovnice lze vyjádřit jako součet řešení y_h homogenní rovnice $y' + g(x)y = 0$ (toto řešení obsahuje jednu konstantu) a partikulárního řešení y_p. Partikulární řešení je jedna z funkcí, která řeší původní rovnici s pravou stranou. Ukážeme si dvě metody řešení této rovnice. První je variace konstanty, která funguje vždy, ale může být složitější. Druhá metoda funguje jen pro speciální pravou stranu a konstantní koeficienty na levé straně, může nám řešení ale zjednodušit.

Variace konstanty: Nejdříve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice (rovnice bez pravé strany) $y'+g(x)y = 0$. Toho dosáhneme separací proměnných (viz příslušnou sekci studijního textu [9]). Nalezené obecné řešení homogenní rovnice má u sebe konstantu. Druhým krokem bude variace této konstanty. Představíme si, že místo této konstanty je funkce $C(x)$ závislá na x a dosazením do původní rovnice tuto funkci vypočteme. Díky tomu, že jsme vyšli z řešení homogenní rovnice, výrazy s $C(x)$ bez derivace se nám po dosazení do rovnice odečtou. Zbyde nám člen s $C'(x)$ a člen bez funkce $C(x)$. Vypočteme $C'(x)$ a integrací určíme $C(x)$. Dosazením do výrazu pro $y(x)$ získáme rovnou obecné řešení původní rovnice. Člen s integrační konstantou získanou integrací $C'(x)$ je homogenní řešení, zbylý člen partikulární řešení.

Metoda neurčitých koeficientů: Nechť $g(x)$ je konstanta. Budeme uvažovat případ, kdy pravá strana je ve tvaru $\mathrm{e}^{\alpha x}[P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)]$, kde $P_1(x)$ a $P_2(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m a α a β jsou reálná čísla. Nechť číslo $\alpha + \beta i$ je s-násobným kořenem charakteristické rovnice pro rovnici bez pravé strany (zjevně může být v našem případě maximálně jednonásobným kořenem, tedy $s \in \{0, 1\}$). Pak partikulární řešení lze nalézt ve tvaru

$$y_\mathrm{p}(x) = x^s \mathrm{e}^{\alpha x}[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)]\,,$$

kde Q_1 a Q_2 jsou polynomy řádu m. Tvar polynomů Q_1 a Q_2 zjistíme dosazením do původní rovnice. Pozor, když je na pravé straně rovnice např. pouze kosinus, řešení je třeba hledat stále v uvedeném tvaru s kombinací sinu a kosinu.

2.2 Příklady

Příklad 2.1. *Řešte rovnici $xy' + 3y = x^2$.*

Řešení: Nejdříve vypočteme řešení homogenní rovnice $xy'+3y = 0$. Postupujeme metodou separace proměnných. Osamostatníme y' a napíšeme ho jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x}\,, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{3y}{x}\,. \end{aligned}$$

Vše s y dostaneme na levou stranu a vše s x na pravou.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zintegrujeme a osamostatníme y.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\,,\\ \ln y &= -3\ln x + \ln c\,,\\ y &= \frac{c}{x^3}\,.\end{aligned}$$

Tím jsme našli homogenní řešení. Nyní si představíme, že místo konstanty c máme funkci $c(x)$. Proto výraz $y(x) = \frac{c(x)}{x^3}$ spolu s jeho derivací $y'(x) = \frac{c'(x)}{x^3} - 3\frac{c(x)}{x^4}$ dosadíme do původní rovnice.

$$x\frac{c'(x)}{x^3} - 3\frac{c(x)}{x^4}x + 3\frac{c(x)}{x^3} = x^2\,,$$

Výrazy s $c(x)$ bez derivace se odečtou, proto můžeme osamostatnit $c'(x)$ a integrací vypočítat $c(x)$.

$$\begin{aligned}c'(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad c(x) &= \int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + C_2\,,\\ y(x) &= \frac{\frac{1}{5}x^5 + C_2}{x^3} = \frac{1}{5}x^2 + \frac{C_2}{x^3}\,.\end{aligned}$$

To je obecné řešení původní rovnice.

Příklad 2.2. *Řešte rovnici* $y = x(y' - x\cos x)$.

Řešení: Homogenní rovnice je v tomto případě $y = xy'$ (ignorujeme člen, který není násoben y ani y'). Řešíme ji separací proměnných jako v předchozím příkladu.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{y}{x}\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x}\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}\,,\end{aligned}$$

Poté, co jsme proměnné separovali, výraz na levé i pravé straně zintegrujeme a osamostatníme y.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\,,\\ \ln|y| &= \ln|x| + C_1\,,\\ y &= cx\,.\end{aligned}$$

Dále provedeme variaci konstanty. Uvažujeme funkci $y = c(x)x$, jejíž derivace je $y'(x) = c'(x)x + c(x)$. Tuto funkci a její derivaci dosadíme do původní rovnice a upravíme. Členy s $c(x)$ se odečtou, osamostatníme $c'(x)$ a následně tento výraz zintegrujeme. Za $c(x)$ dosadíme do výrazu pro y.

$$\begin{aligned} c(x)x = xc'(x)x + xc(x) - x^2 \cos x \,, \\ c'(x) = \cos x \,, \\ c(x) = \sin x + c_2 \,, \\ y(x) = (c_2 + \sin x)x \,. \end{aligned}$$

Toto je obecné řešení původní rovnice.

Příklad 2.3. *Řešte rovnici* $xy' + (x+1)y = 3x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

Řešení: Homogenní rovnice je $xy' + (x+1)y = 0$, řešíme ji opět separací proměnných.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x+1)y}{x} \,, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{(x+1)y}{x} \,, \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \,, \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \,, \\ \ln|y| &= -x - \ln x + c_1 \,, \\ y(x) &= \mathrm{e}^{-x} \frac{c}{x} \,, \end{aligned}$$

kde $c = \mathrm{e}^{c_1}$. Provedeme variaci konstanty, tedy uvažujeme funkci $y(x) = \frac{c(x)}{x} \mathrm{e}^{-x}$. Její derivace je

$$y'(x) = \frac{c'(x)}{x} \mathrm{e}^{-x} - \frac{c(x)}{x^2} \mathrm{e}^{-x} - \frac{c(x)}{x} \mathrm{e}^{-x} \,.$$

Dosazením do původní rovnice a nalezením funkce $c(x)$ dostáváme

$$\begin{aligned} c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{c(x)}{x}\mathrm{e}^{-x} + c\mathrm{e}^{-x} + \frac{c}{x}\mathrm{e}^{-x} = 3x^2\mathrm{e}^{-x} \,, \\ c'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad c(x) = x^3 + c_2 \,, \\ y(x) = \left(x^2 + \frac{c_2}{x}\right) \mathrm{e}^{-x} \,. \end{aligned}$$

Tím jsme nalezli obecné řešení.

Příklad 2.4. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Řešení: Tato rovnice není ve tvaru $y'+g(x)y = f(x)$, přesto ji uvedenou metodou můžeme řešit. Využijeme totiž „triku“, při kterém zaměníme proměnné. Budeme uvažovat funkci $x(y)$. Rovnici si upravíme do tvaru

$$\frac{3x - y^2}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1\,,$$

což odpovídá rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \frac{3x}{y} - y\,,\\ x'(y) &= \frac{3x}{y} - y\,. \end{aligned}$$

Najdeme tedy x jako funkci y. Homogenní rovnice je $x' = \frac{3x}{y}$ (vyloučíme člen, ve kterém nefiguruje x ani x'). Separujeme proměnné.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \frac{3x}{y}\,,\\ \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \frac{3}{y}\mathrm{d}y\,,\\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \int \frac{3}{y}\mathrm{d}y\,,\\ \ln|x| &= 3\ln|y| + c_1\,,\\ x &= cy^3\,. \end{aligned}$$

Pokračujeme variací konstanty ve výrazu $x(y) = c(y)y^3$. Derivace této funkce je $x'(y) = c'(y)y^3 + 3c(y)y^2$. Dosazením do nehomogenní rovnice $x'(y) = \frac{3x}{y} - y$ a integrací získáme $c(y)$. Dosazením do výrazu pro x pak vztah mezi x a y.

$$\begin{aligned} c'(y)y^3 + 3c(y)y^2 &= 3c(y)y^2 - y\,,\\ c'(y) &= -y^{-2}\,,\\ c(y) &= y^{-1} + c_2\,,\\ x(y) &= y^2 + c_2y^3\,. \end{aligned}$$

Takto jsme získali řešení původní rovnice v implicitním tvaru. Výraz pro y v explicitním tvaru bychom dostali vyřešením příslušné kubické rovnice.

Příklad 2.5. *Řešte rovnici* $y' + ay = \mathrm{e}^{mx}$.

Řešení: Tuto rovnici lze řešit oběma způsoby představenými v teoretické části, ukážeme si oba dva. Nejdříve najdeme řešení homogenní rovnice (tj. rovnice bez pravé strany) $y' + ay = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -ay\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -a\mathrm{d}x\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int a\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -ax + c_1\,,\\
y_{\mathrm{h}}(x) &= c\mathrm{e}^{-ax}\,.
\end{aligned}$$

Variace konstanty: Postupujeme variací konstanty, tedy uvažujeme funkci ve tvaru $y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-ax}$, jejíž derivace je $y(x) = c'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ac(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Výrazy dosadíme do původní rovnice.

$$\begin{aligned}
c'(x)\mathrm{e}^{ax} - ac(x)\mathrm{e}^{-ax} + ac(x)\mathrm{e}^{-ax} &= \mathrm{e}^{mx}\,,\\
c'(x) &= \mathrm{e}^{(a+m)x}
\end{aligned}$$

Pro $a \neq -m$ máme (integrál lze vypočítat substitucí)

$$\begin{aligned}
c(x) &= \frac{1}{a+m}\mathrm{e}^{(a+m)x} + c_2\,,\\
y(x) = \frac{1}{m+a}\mathrm{e}^{mx} &+ c_2\mathrm{e}^{-ax}\,, \quad a \neq -m\,.
\end{aligned}$$

Pro $a = -m$ pak máme

$$\begin{aligned}
c'(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad c(x) = x + c_2\,,\\
y(x) = x\mathrm{e}^{-ax} &+ c_2\mathrm{e}^{-ax}\,, \quad a = -m\,.
\end{aligned}$$

Metoda neurčitých koeficientů: Pravá strana má zadaný tvar s $\alpha = m$ a $\beta = 0$. Charakteristická rovnice pro rovnici bez pravé strany je $k + a = 0$, jejím kořenem je $k = a$. Pro $a \neq -m$ proto číslo $\alpha + \beta i$ není kořenem této rovnice, pro $a = -m$ je jejím jednonásobným kořenem. Polynomy P_1 a P_2 jsou konstanty, proto lze místo Q_1 a Q_2 také zvolit konstanty. Pro $a \neq -m$ máme

$$y_{\mathrm{p}} = A\mathrm{e}^{mx}\,.$$

Dosazením do původní rovnice máme

$$mA\mathrm{e}^{mx} + aA\mathrm{e}^{mx} = \mathrm{e}^{mx} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{m+a}\,.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{p}} &= \frac{1}{m+a}\mathrm{e}^{mx}\,,\\
y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} &= \frac{1}{m+a}\mathrm{e}^{mx} + c_2\mathrm{e}^{-ax}\,.
\end{aligned}$$

Pro $a = -m$ hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_{\mathrm{p}} = Bx\mathrm{e}^{-ax} .$$

Dosazením do původní rovnice získáme

$$B\mathrm{e}^{-ax} - aBx\mathrm{e}^{-ax} + aBx\mathrm{e}^{-ax} = \mathrm{e}^{-ax} ,$$

tedy $B = 1$. Proto

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}} &= x\mathrm{e}^{-ax} , \\ y(x) = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} &= x\mathrm{e}^{-ax} + c_2\mathrm{e}^{-ax} . \end{aligned}$$

Příklad 2.6. *Řešte rovnici* $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení: Homogenní rovnice je $y' + 2xy = 0$, řešíme ji separací proměnných.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2xy , \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -2x\mathrm{d}x , \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 2x\mathrm{d}x , \\ \ln|y| &= -x^2 + c_1 , \\ y &= c\mathrm{e}^{-x^2} . \end{aligned}$$

Při variaci konstanty uvažujeme funkci $y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, jejíž derivace je $y'(x) = c'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xc(x)\mathrm{e}^{-x^2}$. Dosazením do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} c'(x)\mathrm{e}^{-x^2} + c(x)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2xc(x)\mathrm{e}^{-x^2} &= 2x\mathrm{e}^{-x^2} , \\ c'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^2 + c_2 , \\ y(x) &= (x^2 + c_2)\mathrm{e}^{-x^2} . \end{aligned}$$

Příklad 2.7. *Řešte rovnici* $xy' + 2y = 3x$, $y(0) = 0$.

Řešení: Nyní máme rovnici s počáteční podmínkou. Nalezneme obecné řešení rovnice a poté dosadíme počáteční podmínku a určíme z ní příslušnou konstantu. Nejdříve nalezneme řešení homogenní rovnice $xy' + 2y = 0$.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{2y}{x} , \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2y}{x} , \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{2}{x}\mathrm{d}x , \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x , \\ \ln|y| &= -2\ln|x| + c_1 , \\ y &= \frac{c}{x^2} . \end{aligned}$$

Při variaci konstanty uvažujeme funkci $y(x) = \frac{c(x)}{x^2}$, jejíž derivace je $y'(x) = \frac{c'(x)}{x^2} - 2\frac{c(x)}{x^3}$. Dosadíme do původní rovnice.

$$\begin{aligned} x\frac{c'(x)}{x^2} + (-2)x\frac{c(x)}{x^3} + \frac{2c(x)}{x^2} &= 3x\,, \\ c'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^3 + c_2\,, \\ y(x) &= \frac{c_2}{x^2} + x\,. \end{aligned}$$

Dosazením do počáteční podmínky (tedy $x = 0$, $y = 0$) máme

$$c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x\,.$$

To je řešení zadané rovnice s počáteční podmínkou.

Příklad 2.8. *Řešte rovnici $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$.*

Řešení: Opět máme rovnici s počáteční podmínkou. Lze ji řešit oběma metodami, ukážeme si variaci konstanty. Nejdříve řešíme homogenní rovnici $y' + y\cos x = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y\cos x\,, \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\cos x\,\mathrm{d}x\,, \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \cos x\,\mathrm{d}x\,, \\ \ln|y| &= -\sin x + c_1\,, \\ y &= c\mathrm{e}^{-\sin x}\,. \end{aligned}$$

Pokračujeme variací konstanty. Uvažujeme funkci $y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}$, jejíž derivací je $y'(x) = c'(x)\mathrm{e}^{-\sin x} - c(x)\cos x\mathrm{e}^{-\sin x}$. Dosadíme ji do původní rovnice.

$$\begin{aligned} c'(x)\mathrm{e}^{-\sin x} + (-\cos x)c(x)\mathrm{e}^{-\sin x} + c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}\cos x &= \sin x\cos x\,, \\ c'(x) &= \sin x\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\,, \end{aligned}$$

Integrál nutný pro výpočet funkce c určíme pomocí substituce a následně per partes.

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \sin x\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \\ &= \left| \begin{matrix} u = t & v' = \mathrm{e}^t \\ u' = 1 & v = \mathrm{e}^t \end{matrix} \right| = t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t + c_2 = (\sin x - 1)\mathrm{e}^{\sin x} + c_2\,. \end{aligned}$$

Proto

$$y(x) = \sin x - 1 + c_2\mathrm{e}^{-\sin x}\,.$$

Z počáteční podmínky $y(0) = 1$ máme dosazením $x = 0$ a $y = 1$ do předchozí rovnice

$$1 = -1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 2\,.$$

Tedy

$$y(x) = \sin x - 1 + 2\mathrm{e}^{-\sin x}\,.$$

Příklad 2.9. *Řešte rovnici* $(1 - x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech. Nejdříve řešíme homogenní rovnici $(1 - x^2)y' + xy = 0$. Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{xy}{x^2 - 1}\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{xy}{x^2 - 1}\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + c_1\,,\\
y(x) &= c\sqrt{|x^2 - 1|}\,.
\end{aligned}$$

Integrál napravo jsme vypočetli substitucí. Řešení proto budeme uvažovat ve tvaru (pro výraz uvnitř odmocniny bereme v úvahu počáteční podmínku) $y(x) = c(x)\sqrt{1 - x^2}$. Derivace tohoto výrazu je $y'(x) = c'(x)\sqrt{1 - x^2} + c(x)\frac{1/2(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Po dosazení do původní diferenciální rovnice dostáváme

$$(1 - x^2)c'(x)\sqrt{1 - x^2} + (1 - x^2)c(x)\frac{1/2(-2x)}{\sqrt{1 - x^2}} + xc(x)\sqrt{1 - x^2} = 1\,,$$

tedy $c'(x) = (1 - x^2)^{-3/2}$. Funkci $c(x)$ určíme integrací (využijeme substituce).

$$\begin{aligned}
c(x) = \int \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{matrix} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left|\begin{matrix} u = \operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int \mathrm{d}u = u + c_1 = \\
&= \left|\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}}\right| = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + c_1\,.
\end{aligned}$$

Odsud

$$c(x) = x(1 - x^2)^{-1/2} + c_1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x + c_1\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Z počáteční podmínky ($x = 0$, $y = 1$) získáváme

$$1 = c_1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x + \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Příklad 2.10. *Řešte rovnici* $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$.

Řešení: Vyřešíme homogenní rovnici $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y\frac{\cos x}{\sin x}\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln|\sin x| + c_1\,,\\
y &= c\sin x\,.
\end{aligned}$$

Integrál napravo lze vypočíst substitucí za sinus. Dále pokračujeme variací konstanty, funkci $y(x) = c(x)\sin x$ a její derivaci $y(x) = c'(x)\sin x + c(x)\cos x$ dosadíme do původní rovnice. Integrací určíme $c(x)$ a odsud $y(x)$.

$$\begin{aligned}
c'(x)\sin x + c(x)\cos x - c(x)\cos x &= 2\sin x\,,\\
c(x) &= \int 2\,\mathrm{d}x = 2x + c_2\,,\\
y(x) &= (2x + c_2)\sin x\,.
\end{aligned}$$

Příklad 2.11. *Řešte rovnici* $y' + xy = x$.

Řešení: Řešíme homogenní rovnici $y' + xy = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -xy\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -x\,\mathrm{d}x\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int x\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + c_1\,,\\
y(x) &= c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Při variaci konstanty použijeme funkci $y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ a její derivaci $y(x) = c'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - xc(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
c'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - c(x)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + xc(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} &= x\,,\\
c'(x) &= x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Funkci $c(x)$ určíme integrací pomocí substituce.

$$c(x) = \int x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \frac{x^2}{2} \\ \mathrm{d}u = x\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + c_2\,.$$

Výsledek pak je

$$y(x) = 1 + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Příklad 2.12. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y-1}{x(x-1)}$.

Řešení: Řešíme homogenní rovnici $y' = \frac{y}{x(x-1)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x(x-1)}\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c_1\,,\\
y &= c\frac{x-1}{x}\,.
\end{aligned}$$

Při variaci konstanty použijeme funkci $y(x) = c(x)\frac{x-1}{x}$ a její derivaci

$$\begin{aligned}
y(x) = c'(x)\frac{x-1}{x} + c(x)\left(\frac{x-1}{x}\right)' &=\\
c'(x)\frac{x-1}{x} + c(x)\left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right) &= c'(x)\frac{x-1}{x} + \frac{c(x)}{x^2}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'(x)\frac{x-1}{x} + \frac{c(x)}{x^2} &= \frac{c(x)}{x^2} - \frac{1}{(x-1)x}\,,\\
c'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2}\,,\\
c(x) = -\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{x-1} + c_2\,.
\end{aligned}$$

Výsledné řešení tedy je

$$\begin{aligned}
y(x) = \left(\frac{1}{x-1} + c_2\right)\frac{x-1}{x} = \frac{1}{x} + c_2\frac{x-1}{x} &=\\
= 1 - \frac{x-1}{x} + c_2\frac{x-1}{x} &= 1 + c_3\frac{x-1}{x}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 2.13. *Řešte rovnici* $y' + 3y = \mathrm{e}^{2x}$.

Řešení: Tento příklad lze řešit oběma způsoby, uvedeme variaci konstant. Nejdříve řešíme homogenní rovnici $y' + 3y = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -3y\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -3\,\mathrm{d}x\,,\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 3\,\mathrm{d}x\,,\\ \ln|y| &= -3x + c_1\,,\\ y &= c\,\mathrm{e}^{-3x}\,.\end{aligned}$$

Provedeme variaci konstanty, uvažujeme funkci $y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-3x}$ s derivací $y(x) = c'(x)\mathrm{e}^{-3x} - 3c(x)\mathrm{e}^{-3x}$.

$$\begin{aligned}c'(x)\mathrm{e}^{-3x} + c(x)\mathrm{e}^{-3x}(-3) + 3c(x)\mathrm{e}^{-3x} &= \mathrm{e}^{2x}\,,\\ c'(x) &= \mathrm{e}^{5x}\,,\\ c(x) &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + c_2\,,\\ y(x) &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x}\,.\end{aligned}$$

Příklad 2.14. *Řešte rovnici $y' + y = \cos x$.*

Řešení: Tento příklad lze také řešit oběma způsoby. Homogenní rovnice je $y' + y = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\mathrm{d}x\,,\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 1\,\mathrm{d}x\,,\\ \ln|y| &= -x + c_1\,,\\ y &= c\mathrm{e}^{-x}\,.\end{aligned}$$

Provedeme variaci konstanty. Uvažujeme funkci $y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-x}$ s derivací $y(x) = c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned}y(x) &= c(x)\mathrm{e}^{-x}\,,\\ c'(x)\mathrm{e}^{-x} + c(x)\mathrm{e}^{-x}(-1) + c(x)\mathrm{e}^{-x} &= \cos x\,,\\ c'(x) &= \mathrm{e}^{x}\cos x\,.\end{aligned}$$

Integrujeme metodou per partes.

$$c(x) = \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u\ = \cos x & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = -\sin x & v = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \begin{vmatrix} u\ = \sin x & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = \cos x & v = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Odsud

$$c(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + c_2$$

a

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + c_2\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Příklad 2.15. *Řešte rovnici* $xy' - \frac{y}{x+1} = x$.

Řešení: Homogenní rovnice je $xy' = \frac{y}{x+1}$.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x(x+1)}\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x(x+1)}\,,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{1}{(x+1)x}\mathrm{d}x\,,\\
\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{1}{(x+1)x}\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x\,,\\
\ln|y| &= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c_1\,,\\
y &= c\frac{x}{x+1}\,.
\end{aligned}$$

Při variaci konstanty uvažujeme funkci $y(x) = c(x)\frac{x}{x+1}$, jejíž derivace je

$$y'(x) = c'(x)\frac{x}{x+1} + c(x)\frac{x+1-x}{(x+1)^2} = c'(x)\frac{x}{x+1} + \frac{c(x)}{(x+1)^2}\,.$$

Proto dostáváme po dosazení do původní rovnice

$$\begin{aligned}
y(x) &= c(x)\frac{x}{x+1}\,,\\
xc'(x)\frac{x}{x+1} + \frac{c(x)x}{(x+1)^2} - \frac{c(x)x}{(x+1)^2} &= x\,,\\
c'(x) &= \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}\,,\\
c(x) = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x &= x + \ln|x| + c_2\,,\\
y(x) &= \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + c_2)\,.
\end{aligned}$$

Příklad 2.16. *Řešte rovnici* $(2\mathrm{e}^y - x)y' = 1$.

Řešení: Použijeme triku, že hledáme řešení $x(y)$ jako funkce od y. Rovnici si přepíšeme.

$$\begin{aligned}
(2\mathrm{e}^y - x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1\,,\\
2\mathrm{e}^y - x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,,\\
x'(y) &= -x(y) + 2\mathrm{e}^y\,.
\end{aligned}$$

Odpovídající homogenní rovnice je $x' = -x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= -x\,,\\
\frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\,\mathrm{d}y\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\int \mathrm{d}y\,,\\
\ln|x| &= -y + c_1\,,\\
x &= c\mathrm{e}^{-y}\,.
\end{aligned}$$

Pokračujeme variací konstanty, použijeme funkci $x(y) = c(y)\mathrm{e}^{-y}$ s derivací $x(y) = c'(y)\mathrm{e}^{-y} - c(y)\mathrm{e}^{-y}$. Dosazením získáme

$$\begin{aligned}
c'(y)\mathrm{e}^{-y} - c(y)\mathrm{e}^{-y} &= -c(y)\mathrm{e}^{-y} + 2\mathrm{e}^y\,,\\
c(y) &= \int 2\mathrm{e}^{2y} = \mathrm{e}^{2y} + c_2\,,\\
x(y) &= c_2\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^y\,.
\end{aligned}$$

Máme tedy řešení původní rovnice v implicitním tvaru.

2.3 Rovnice, které lze převést na lineární

Nakonec se budeme zabývat rovnicemi, které lze vhodnou úpravou převést na lineární. Prvním příkladem je *Bernoulliho rovnice*

$$y' + a(x)y = b(x)y^n\,.$$

Nejdříve tuto rovnici vydělíme y^n a poté použijeme substituci $z = \frac{1}{y^{n-1}}$.

Příklad 2.17. *Řešte rovnici $y' + 2xy = 2x^3y^3$.*

Řešení: Zvolíme substituci $z = y^{-3+1} = y^{-2}$ s derivací $z' = -2y^{-3}y'$. Původní rovnice vydělená y^3 je

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = 2x^3$$

Tedy po dosazení substituce

$$-\frac{1}{2}z' + 2xz = 2x^3\,.$$

To je lineární diferenciální rovnice 1. řádu ve tvaru, který jsme na začátku sekce uvažovali. Homogenní rovnice je $-\frac{1}{2}z' + 2xz = 0$.

$$\begin{aligned} z' &= 4xz\,, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 4xz\,, \\ \frac{\mathrm{d}z}{z} &= 4x\,\mathrm{d}x\,, \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int 4x\,\mathrm{d}x\,, \\ \ln|z| &= 2x^2 + c_1\,, \\ z \ &= c\mathrm{e}^{2x^2}\,. \end{aligned}$$

Dále postupujeme variací konstanty. Uvažujeme funkci $z = c(x)\mathrm{e}^{2x^2}$ s derivací $z' = c'(x)\mathrm{e}^{2x^2} + c(x)4x\mathrm{e}^{2x^2}$. Dosazením máme

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}c'(x)\mathrm{e}^{2x^2} - 2c(x)x\mathrm{e}^{x^2} + 2c(x)x\mathrm{e}^{x^2} &= 2x^3\,, \\ c'(x) &= -4x^3\mathrm{e}^{-2x^2}\,, \end{aligned}$$

Funkci $c(x)$ vypočteme integrací, nejdříve substitucí a pak per partes.

$$\begin{aligned} c(x) = \int -4x^3\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{matrix} t = -2x^2 \\ \mathrm{d}t = -4x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \\ &= \left| \begin{matrix} u = t & v' = \mathrm{e}^t \\ u' = 1 & v \ = \mathrm{e}^t \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}(1-t)\mathrm{e}^t + c_2 = \frac{1}{2}(2x^2+1)\mathrm{e}^{-2x^2} + c_2\,, \end{aligned}$$

Odsud dostáváme

$$\begin{aligned} z(x) &= x^2 + \frac{1}{2} + c_2\mathrm{e}^{2x^2} = y^{-2}\,, \\ y(x) &= \pm\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + c_2\mathrm{e}^{2x^2}}}\,. \end{aligned}$$

Druhou rovnicí je *Ricattiho rovnice*

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)\,.$$

Jestliže známe jedno její partikulární řešení $y_1(x)$, lze ji substitucí $y = y_1 + z$ převést na Bernoulliho rovnici.

2.4 Literatura

K dalšímu studiu doporučujeme zdroje [7, 3, 12, 17, 2, 5], z některých z nich jsou čerpána zadání příkladů.

2.5 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 2.18. *Řešte rovnici* $x^2y' + 3 - 2xy = 0$.

Příklad 2.19. *Řešte rovnici* $y' + 2xy = 2x^3$.

Příklad 2.20. *Řešte rovnici* $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Příklad 2.21. *Řešte rovnici* $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.

Příklad 2.22. *Řešte rovnici* $xy' + (1-x)y = x\mathrm{e}^x$.

Příklad 2.23. *Řešte rovnici* $y' + (y - 2\sin x)\cos x = 0$.

Příklad 2.24. *Řešte rovnici* $y' - 2xy = x$ *s počáteční podmínkou* $y(0) = 1$.

Příklad 2.25. *Řešte rovnici* $(1+x^2)y' + xy = (1+x^2)^{5/2}$.

Příklad 2.26. *Řešte rovnici* $y' + y = \mathrm{e}^x$ *s počáteční podmínkou* $y(0) = 2$.

Příklad 2.27. *Řešte rovnici* $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ *s počáteční podmínkou* $y(0) = 3$.

Příklad 2.28. *Řešte rovnici* $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1$ *s počáteční podmínkou* $y(0) = 1$.

Příklad 2.29. *Řešte rovnici* $y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ *s počáteční podmínkou* $y(-1) = 2$.

Příklad 2.30. *Řešte rovnici* $y' + \frac{1}{1+x}y = 0$ *s počáteční podmínkou* $y(0) = 1$.

Příklad 2.31. *Řešte rovnici* $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$ *s počáteční podmínkou* $y(0) = 1$.

Příklad 2.32. *Řešte rovnici* $y' + y = 2x + 1$.

3 Diferenciální rovnice vyšších řádů, snižování řádu

Řád diferenciální rovnice je dán nejvyšší derivací neznámé funkce, která se v rovnici vyskytuje. V této sekci se budeme zabývat rovnicemi vyšších řádů, tedy těmi, ve kterých jsou alespoň druhé derivace. Snížení řádu je převedení této rovnice na rovnici nižšího řádu. Uvedeme si několik typů diferenciálních rovnic a jejich způsoby snížení řádu a řešení.

3.1 Typ 1: $y^{(n)} = f(x)$

Tento typ je jednoduchý, k nalezení funkce y stačí rovnici n-krát zintegrovat.

Příklad 3.1. *Řešte rovnici* $y''' = \mathrm{e}^{2x}$.

Řešení: Postupně integrujeme.

$$y'' = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = 2x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + c_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c_1\,,$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c_1\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = 2x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + c_1x + c_2 = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + c_1x + c_2\,,$$

$$\begin{aligned} y = \int \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + c_1x + c_2\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = 2x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{matrix}\right| &= \\ = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{t} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3 &= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.2. *Řešte rovnici* $y''' = \sin x$.

Řešení: Opět integrujeme.

$$\begin{aligned} y'' &= \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c_1\,, \\ y' &= \int (-\cos x + c_1)\,\mathrm{d}x = -\sin x + c_1x + c_2\,, \\ y &= \int (-\sin x + c_1x + c_2)\,\mathrm{d}x = \cos x + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3\,. \end{aligned}$$

3.2 Typ 2: $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$

Rovnici řešíme tak, že zavedeme substituci $z = y^{n-1}$ a dále musíme doufat, že se nám vzniklou rovnici $z' = f(x, z)$ podaří vyřešit.

Příklad 3.3. *Řešte rovnici* $xy''' + 3y'' = 0$.

Řešení:
$$z = y'' , \quad \Rightarrow \quad xz' + 3z = 0 .$$

Dostáváme rovnici řešitelnou pomocí separace proměnných. Obdržíme y'', čímž převedeme rovnici na typ 1. Dále dvakrát integrujeme.

$$\begin{aligned}
z' &= -\frac{3z}{x} , \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= -\frac{3z}{x} , \\
\frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\frac{3\,\mathrm{d}x}{x} , \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x} , \\
\ln|z| &= -3\ln|x| + \ln c_1 , \\
y'' = z &= \frac{c_1}{x^3} , \\
y' &= -\frac{c_1}{2x^2} + c_2 , \\
y &= \frac{c_1}{2x} + c_2 x + c_3 .
\end{aligned}$$

Příklad 3.4. *Řešte rovnici* $y''' + y'' = \mathrm{e}^x$.

Řešení: Provedeme substituci $z = y''$. Po substituci se jedná o lineární rovnici 1. řádu, kterou řešíme metodou variace konstanty.

$$z = y'' \quad \Rightarrow \quad z' + z = \mathrm{e}^x .$$

Homogenní rovnice je $z' + z = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= -z , \\
\frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\mathrm{d}x , \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\int \mathrm{d}x , \\
\ln|z| &= -x + \ln c , \\
z &= c\mathrm{e}^{-x} ,
\end{aligned}$$

Provedeme variaci konstanty; uvažujeme rovnici $z = c(x)\mathrm{e}^{-x}$, její derivace je

$z' = c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x}$. Po získání z dvakrát integrujeme.

$$\begin{aligned}
c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x} + c(x)\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^{x}\,,\\
c(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c_2\,,\\
y'' = z &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x}\,,\\
y' &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} - c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\,,\\
y(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x + c_4\,.
\end{aligned}$$

Příklad 3.5. *Řešte rovnici* $xy''' + 2y'' = 3x$.

Řešení: Po substituci $z = y''$ se jedná o lineární rovnici 1. řádu, kterou řešíme metodou variace konstanty.

$$z = y''\,, \quad \Rightarrow \quad xz' + 2z = 3x\,,$$

Homogenní rovnice je $xz' + 2z = 0$.

$$\begin{aligned}
z' &= -\frac{2z}{x}\,,\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2z}{x}\,,\\
\frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\frac{2}{x}\mathrm{d}x\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x\,,\\
z &= \frac{c}{x^2}\,.
\end{aligned}$$

Dále postupujeme variací konstanty. Uvažujeme funkci $z = \frac{c(x)}{x^2}$ s derivací $z' = \frac{c'(x)}{x^2} - 2\frac{c(x)}{x^2}$. K získání y dvakrát integrujeme.

$$\begin{aligned}
xc'(x)\frac{1}{x^2} + xc(x)\frac{-2}{x^3} + \frac{c(x)}{x^2} &= 3x\,,\\
c'(x) = 3x^2\,, \quad \Rightarrow \quad c(x) &= x^3 + c_2\,,\\
y''(x) = z \ &= x + \frac{c_2}{x^2}\,,\\
y'(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{c_2}{x} + c_3\,,\\
y(x) &= \frac{1}{6}x^3 - c_2\ln|x| + c_3x + c_4\,.
\end{aligned}$$

3.3 Typ 3: $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$

Tento typ řešíme substitucí $z = y^{(n-2)}$, získáme rovnici $z'' = f(z)$. Dále obě strany rovnice vynásobíme $2z'$, což je ekvivalentní úprava pro $z' \neq 0$. Dostáváme

$[(z')^2]' = 2[F(z)]'$, kde $F(z)$ je primitivní funkce k $f(z)$. O tom, že předchozí rovnice platí, se lze přesvědčit pomocí derivace vnitřní funkce

$$[(z')^2]' = 2z'z''\,, \quad 2[F(z)]' = 2f(z)z'\,.$$

Dále máme integrací

$$\begin{aligned} (z')^2 &= 2F(z) + c\,, \\ z' &= \pm\sqrt{2F(z) + c}\,. \end{aligned}$$

Tuto rovnici lze řešit separací proměnných.

Příklad 3.6. *Řešte rovnici $y''' + y' = 0$.*

Řešení: Provedeme substituci $z = y'$. Dostáváme

$$\begin{aligned} z'' + z &= 0\,, \\ 2z'z'' + 2zz' &= 0\,, \\ \left[(z')^2 + z^2\right]' &= 0\,, \\ (z')^2 + z^2 &= c\,, \\ z' &= \pm\sqrt{c - z^2}\,, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \pm\sqrt{c - z^2}\,, \\ \pm\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{c - z^2}} &= \mathrm{d}x\,, \\ \pm\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{c - z^2}} &= \int \mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

Integrál nalevo vypočteme substitucí

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{c - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - \frac{z}{\sqrt{c}}^2}} = \left| \begin{matrix} t = \frac{z}{\sqrt{c}} \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{c}} \end{matrix} \right| = \\ = \int \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2} = \arcsin t + c_3 = \arcsin \frac{z}{\sqrt{c}} + c_3\,. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\pm \arcsin \frac{z}{\sqrt{c}} = x + c_2\,,$$

Čemuž odpovídají řešení $z_1 = c_1 \sin(x + c_2)$ a $z_2 = c_1 \sin(-x + c_2)$. Lze nahlédnout, že vhodným zvolením konstant obě řešení na sebe přejdou. Proto uvažujeme

$$\begin{aligned} y' &= c_1 \sin(x + c_2)\,, \\ y(x) = \int c_1 \sin(x + c_2)\mathrm{d}x &= -c_1 \cos(x + c_2) + c_3 \end{aligned}$$

Příklad 3.7. *Řešte rovnici* $y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}$*, s počátečními podmínkami* $y(0) = 0$*,* $y'(0) = 1$*,* $y''(0) = 1$*.*

Řešení: Použijeme substituci $z = y'$ dostáváme následující rovnici s počátečními podmínkami.

$$z'' = \frac{1}{4\sqrt{z}}, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 1\,.$$

Postupujeme vynásobením rovnice $2z'$.

$$\begin{aligned} 2z'z'' &= \frac{z'}{2\sqrt{z}}\,, \\ \left[(z')^2\right]' &= \frac{z'}{2\sqrt{z}}\,. \end{aligned}$$

Nyní zintegrujeme obě strany rovnice od 0 do x.

$$(z')^2(x) - (z')^2(0) = \int_0^x \frac{z'(t)\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{z(t)}} = \int_0^x \left(\sqrt{z(t)}\right)'\mathrm{d}t = \sqrt{z(x)} - \sqrt{z(0)}\,.$$

Dosadíme počáteční podmínky $z(0) = 1$, $z'(0) = 1$ a máme

$$\left[z'(x)\right]^2 = \sqrt{z(x)}\,.$$

Po odmocnění zvolíme kladné znaménko, protože máme počáteční podmínku $z'(0) = 1$. Rovnici vyřešíme separací proměnných.

$$\begin{aligned} z'(x) = z^{\frac{1}{4}}(x), \quad z(0) &= 1\,, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= z^{\frac{1}{4}}\,, \\ z^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z &= \mathrm{d}x\,, \\ \int z^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z &= \int \mathrm{d}x\,, \\ \frac{4}{3}z^{\frac{3}{4}} &= x + c\,, \\ z(x) &= \left[\frac{3}{4}(x+c)\right]^{\frac{4}{3}}\,. \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky $z(0) = 1$ vypočítáme konstantu c.

$$1 = \left[\frac{3}{4}(x+c)\right]^{\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{3}\,,$$

Tedy

$$\begin{aligned} y'(x) = z(x) &= \left(\frac{3x}{4} + 1\right)^{\frac{4}{3}}\,, \\ y(x) = y(0) + \int_0^x \left(\frac{3t}{4} + 1\right)^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}t &= \frac{4}{7}\left[\left(\frac{3x}{4} + 1\right)^{\frac{7}{3}} - 1\right]\,, \end{aligned}$$

kde jsme použili počáteční podmínku $y(0) = 0$.

Příklad 3.8. *Řešte rovnici* $y''' = \mathrm{e}^{2y'}$ *s počáteční podmínkou* $y''(-1) = 1$, $y'(-1) = 0$, $y(-1) = 0$.

Řešení: Zavedeme substituci $z(x) = y'(x)$, dostáváme rovnici s počátečními podmínkami

$$z'' = \mathrm{e}^{2z}\,, \quad z'(-1) = 1, \quad z(-1) = 0\,.$$

Řešíme ji obdobně jako v předchozích příkladech. Vynásobíme $2z'$

$$\begin{aligned} 2z'z'' &= 2z'\mathrm{e}^{2z} \\ \left[(z')^2\right]' &= 2z'\mathrm{e}^{2z} = (\mathrm{e}^{2z})'\,, \\ \int \left[(z')^2\right]' \,\mathrm{d}x &= \int (\mathrm{e}^{2z})' \,\mathrm{d}x\,, \\ (z')^2 &= \mathrm{e}^{2z} + c_1\,. \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky $z'(-1) = 1$ dostáváme $c_1 = 0$.

$$\begin{aligned} z' &= \mathrm{e}^z\,, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^z\,, \\ \int \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z &= \int \mathrm{d}x\,, \\ -\mathrm{e}^{-z} &= x + c_2\,. \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky $z(-1) = 0$ určíme $c_2 = 0$. Proto máme

$$y'(x) = z(x) = -\ln(-x)\,, \quad x < 0\,,$$

Funkci y získáme integrací pomocí substituce a per partes.

$$\begin{aligned} y(x) = -\int \ln -x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = -x \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \ln t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = \ln t & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{t} & v\ = t \end{vmatrix} = \\ &= t\ln t - \int t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = t\ln t - t + c_3 = -x\ln(-x) + x + c_3\,. \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky $y(-1) = 0$ máme $c_3 = 1$, tedy řešením je

$$y(x) = -x(\ln(-x) - 1) + 1\,.$$

Příklad 3.9. *Řešte rovnici* $y'' = -\frac{1}{y^3}$ *s počáteční podmínkou* $y'(1) = 1$, $y(1) = 1$.

Řešení: Zde substituci zavádět nemusíme, řešíme vynásobením $2y'$ a nalezením primitivních funkcí.

$$
\begin{aligned}
2y'y'' &= -\frac{2y'}{y^3}\,, \\
(y'^2)' &= \left(\frac{1}{y^2}\right)'\,, \\
\int (y'^2)'\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{y^2}\right)'\,\mathrm{d}x\,, \\
y'^2 &= \frac{1}{y^2} + C_1\,.
\end{aligned}
$$

Z počátečních podmínek určíme, že $C_1 = 0$, tedy $y' = \frac{1}{y}$. Vzali jsme kladné znaménko odmocniny kvůli počátečním podmínkám $y'(1) = 1$, $y(1) = 1$ (kladné derivaci v jedničce musí odpovídat kladná funkční hodnota). Dále postupujeme separací proměnných.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{y}\,, \\
\int y\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x\,, \\
\frac{y^2}{2} &= x + C_2\,.
\end{aligned}
$$

Z počáteční podmínky $y(1) = 1$ dostáváme

$$
\frac{1}{2} = 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{2}\,.
$$

Řešení tedy je

$$
y = \sqrt{2x-1}\,, \quad x \geq \frac{1}{2}\,.
$$

3.4 Typ 4: $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, $1 \leq k \leq n$

Nyní se budeme věnovat snižování řádu diferenciální rovnice bez toho, aniž bychom ji dořešili. U tohoto typu použijeme substituci $y^{(k)} = z$ a převedeme rovnici na rovnici řádu $n-k$ ve tvaru $f(x, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

3.5 Typ 5: známe jedno řešení rovnice

Pokud známe jedno řešení $u(x)$, můžeme použít obdoby dělení polynomů. Rovnici n-tého řádu převedeme na rovnici $(n-1)$-ního řádu v nové proměnné. Položíme $y(x) = v(x)u(x)$ a dosadíme do rovnice. V rovnici se nebude vyskytovat $v(x)$, pouze jeho derivace. Proto zavedeme substituci $z(x) = v'(x)$ a dostáváme rovnici $(n-1)$-ního řádu pro proměnnou $z(x)$.

Příklad 3.10. *Snižte řád diferenciální rovnice* $(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0$, *známe-li jedno řešení* $u(x) = x^2 - 2$.

Řešení: Triviálně můžeme ověřit, že $x^2 - 2$ je opravdu řešením uvedené rovnice. Zavedeme funkci $v(x)$ vztahem

$$y(x) = v(x)(x^2 - 2)\,,$$

a vypočteme jeho derivace.

$$y'(x) = v'(x)(x^2 - 2) + v(x)2x\,,$$
$$y''(x) = v''(x)(x^2 - 2) + 4xv'(x) + 2v(x)\,.$$

Nyní dosadíme do zadané rovnice a výraz upravíme.

$$(2x - 3x^3)\left[v''(x)(x^2 - 2) + 4xv' + 2v\right] + \\ + 4v'(x)(x^2 - 2) + 8xv(x) + 6xv(x)(x^2 - 2)\,,$$

$$(2x - 3x^3)(x^2 - 2)v''(x) + (8x^2 - 12x^4 + 4x^2 - 8)v'(x) + \\ + (4x - 6x^3 + 8x + 6x^3 - 12x)v(x) = 0\,,$$

$$(-3x^5 + 8x^3 - 4x)v''(x) + (-12x^4 + 12x^2 - 8)v'(x) = 0\,.$$

Vidíme, že výraz s v bez derivace se odečetl. Proto zavedeme substituci $z = v'$ (Rovnice je typem 4) a dostáváme rovnici prvního řádu pro proměnnou z.

$$(-3x^5 + 8x^3 - 4x)z'(x) + (-12x^4 + 12x^2 - 8)z(x) = 0\,.$$

Tu můžeme řešit separací proměnných a integrací racionální funkce, to ale tady provádět nebudeme.

Příklad 3.11. *Snižte řád diferenciální rovnice $y'' + xy' - 2y = 0$ znáte-li řešení $u(x) = x^2 + 1$.*

Řešení: Čtenáři necháváme jako cvičení ověření, že funkce u je opravdu řešením rovnice. Zavedeme substituci $y(x) = v(x)(x^2 + 1)$, tato funkce má derivace

$$y'(x) = v'(x)(x^2 + 1) + v(x)2x\,,$$
$$y''(x) = v''(x)(x^2 + 1) + 4xv'(x) + 2v(x)\,.$$

Dosazením dostáváme rovnici

$$v''(x)(x^2+1)+v'(x)4x+2v(x)+v'(x)x(x^2+1)+2x^2v(x)-2v(x)(x^2+1) = 0\,,$$

tedy

$$v''(x)(x^2 + 1) + v'(x)(x^3 + 5x) = 0\,.$$

Po substituci $z(x) = v'(x)$ dostáváme rovnici prvního řádu.

$$z'(x)(x^2 + 1) + z(x)(x^3 + 5x) = 0\,.$$

Příklad 3.12. *Snižte řád diferenciální rovnice* $-(2x^2+3)y'' - 2y' + 4y = 0$ *znáte-li řešení* $u(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení: Zavedeme substituci ve tvaru $y(x) = v(x)(x^2+x+2)$, vypočteme derivace funkce y

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= v'(x)(x^2+x+2) + v(x)(2x+1)\,, \\
y''(x) &= v''(x)(x^2+x+2) + 2v'(x)(2x+1) + 2v(x)\,.
\end{aligned}
$$

Po dosazení máme

$$
\begin{aligned}
&-(2x^2+3)[2v(x) + (2x+1)2v'(x) + (x^2+x+2)v''(x)] - \\
&\qquad - 2[(2x+1)v(x) + (x^2+x+2)v'(x)] + 4(x^2+x+2)v(x) = 0\,,
\end{aligned}
$$

úprava dává

$$-(8x^3+6x^2+14x+10)v'(x) - (2x^2+3)(x^2+x+2)v''(x) = 0\,.$$

Substitucí $z(x) = v'(x)$ získáme rovnici prvního řádu

$$-(8x^3+6x^2+14x+10)z(x) - (2x^2+3)(x^2+x+2)z'(x) = 0\,.$$

3.6 Typ 6: $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, kde f je homogenní vzhledem k $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Homogenita funkce f znamená

$$f(x, \mu y, \mu y', \ldots, \mu y^{(n)}) = \mu^\alpha f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,.$$

Zavedeme funkci z vztahem $y' = zy$. Vypočteme

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$$

a obdobně pro další derivace. Tím v proměnné z dostaneme rovnici nižšího řádu.

Příklad 3.13. *Řešte rovnici* $x^2((y')^2 - 2yy'') = y^2$.

Řešení: Zavedeme substituci $y' = zy$ s $y'' = y(z^2+z')$.

$$
\begin{aligned}
x^2y^2(z^2 - 2z^2 - 2z') &= y^2\,, \\
x^2(-z^2 - 2z') &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Dostali jsme rovnici nižšího řádu. Pokud by se nám ji podařilo vyřešit, obdržíme řešení původní rovnice z rovnice $y' = zy$ separací proměnných.

3.7 Literatura

K dalšímu studiu lze použít např. [7, 3].

3.8 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 3.14. *Vyřešte diferenciální rovnici* $y^{(4)} = x$ *s počátečními podmínkami* $y'''(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 3$.

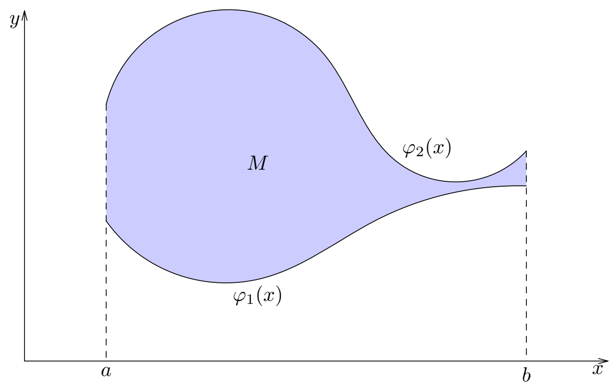
Příklad 3.15. *Vyřešte diferenciální rovnici* $x^2 y''' + 3 - 2xy'' = 0$.

Příklad 3.16. *Ověřte, že* $u(x) = x\mathrm{e}^x$ *je řešením diferenciální rovnice*

$$(x-2)y'' - 4(x-1)y' + 3xy = 0$$

a následně snižte řád diferenciální rovnice.

Příklad 3.17. *Vyřešte diferenciální rovnici* $y''' = \frac{3}{4}\sqrt{y'}$ *s počátečními podmínkami* $y''(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y(0) = \frac{4}{5}$.



Obrázek 1: Ilustrace výpočtu dvojného integrálu

4 Vícenásobný integrál

V této a následující sekci se budeme věnovat vícenásobnému integrálu, hlavně dvojnému integrálu.

4.1 Teorie

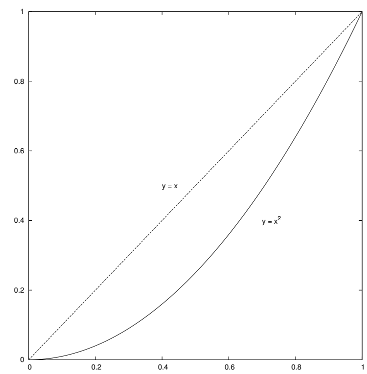
U dvojného integrálu je naším cílem vypočítat integrál z funkce dvou proměnných přes plochu ohraničenou zadanými křivkami. Obdobně u trojného integrálu počítáme integrál přes určitou oblast z funkce tří proměnných. Motivací pro nás může být u dvojného integrálu hmotnost desky s malou tloušťkou s hustotou, která může být proměnná v dané ploše (nemění se ale ve třetí proměnné). Dále můžeme vícenásobný integrál použít např. pro výpočet momentu setrvačnosti těles (zde integrujeme funkci, která roste se druhou mocninou vzdálenosti od osy otáčení).

Dvojný integrál značíme $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, někdy se můžeme setkat s komplikovanějším značením pomocí dvou integrálů $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Fubiniho věta nám umožní převést integrál přes tuto podmnožinu $\mathbb{R}^2$ (u trojného integrálu $\mathbb{R}^3$) na sled dvou (tří) jednorozměrných integrací

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Výraz uprostřed a výraz napravo jsou jen různými zápisy téhož. Dvojný integrál vypočteme tak, že nejdříve integrujeme podle proměnné y s proměnnými mezemi (obecně závislými na x) a poté integrujeme podle x. Postup lze obrátit – vnitřní integrál můžeme provést podle x a vnější podle y.

Na obrázku 1 je znázorněn příklad množiny M omezené funkcemi $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ a dále přímkami $x = a$ a $x = b$. Budeme uvažovat případ, že vnější integrál je přes x. Meze proměnné x určíme tak, že množinu M promítneme



Obrázek 2: Obrázek k příkladu 4.1

do osy x. Zjevně máme $a \leq x \leq b$. Určení mezí integrálu v proměnné y je obtížnější, protože často nebývají pevné (pevné jsou pouze v případě, když integrujeme přes obdélník). Meze v proměnné y jsou funkce $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$, které množinu omezují. Dolní mez je φ_1 a horní mez je φ_2. To určíme tak, že si zvolíme nějaké x_0 v intervalu (a, b) a určujeme, kde přímka $x = x_0$ protíná funkce omezující množinu M. Funkce, jejíž průsečík s touto přímkou má nižší y-ovou souřadnici, je dolní mezí, opačná funkce horní mezí. (Samozřejmě uvažujeme případ, kdy se funkce φ_1 a φ_2 neprotínají, v tom bychom rozdělili množinu M na dvě podoblasti). Obdobně funguje integrace nejdříve podle x (vnitřní integrál) a poté podle y (vnější integrál), pouze je zde role x a y prohozená. V některých příkladech se hodí lépe jedna z metod, v jiných druhá.

4.2 Příklady

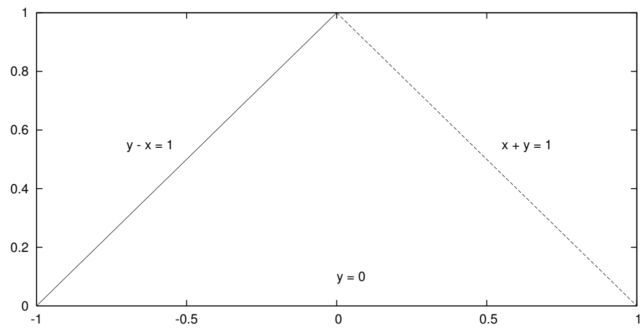
Příklad 4.1. *Vypočtěte integrál $\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je ohraničena shora funkcí $y = x$ a zdola funkcí $y = x^2$.*

Řešení: Nejdříve musíme určit meze jednotlivých proměnných. x jde od 0 do 1 a y jde při pevném x od x^2 do x (viz obr. 2). To vidíme z toho, že když zafixujeme x a zvyšujeme y (jdeme po svislé přímce $x = \text{konst.}$), se zvyšujícím se y nejdříve narazíme na křivku $y = x^2$ a poté na křivku $y = x$. Máme tedy meze integrálů $0 < x < 1$, $x^2 < y < x$ a můžeme vypočítat

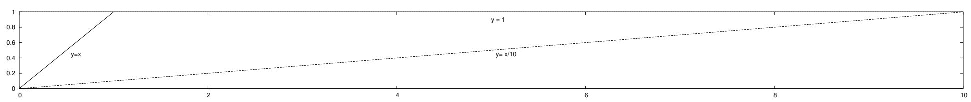
$$\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^x y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{24}\,.$$

Příklad 4.2. *Vypočtěte integrál $\int_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $y = 0$, $x + y = 1$ a $y - x = 1$.*



Obrázek 3: Obrázek k příkladu 4.2



Obrázek 4: Obrázek k příkladu 4.3

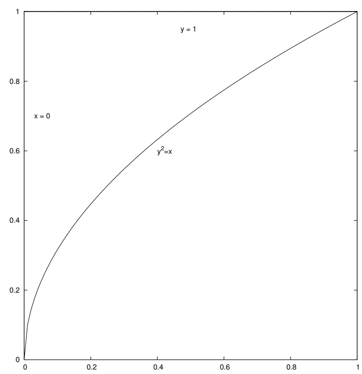
Řešení: Vnitřní integrál zvolíme přes x. Meze jsou například $0 < y < 1$, $y-1 < x < 1-y$. Nejdříve jsme určili meze pro y jako minimální a maximální y, kterého můžeme v rámci zadaného trojúhelníku dosáhnout. Poté jsme zafixovali y šli po vodorovné přímce $y =$ konst. směrem od menšího x k většímu. Nejdříve narazíme na přímku $x = y - 1$ a poté na $x = 1 - y$. Nyní můžeme vypočítat integrál

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{y-1}^{1-y} \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^3}{3} + y^2(1-y) - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1) \right] \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - 2y + 4y^2 - \frac{8}{3}y^3 \right) \mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}y - y^2 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{2}{3}y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Samozřejmě bychom mohli provádět i integraci nejdříve přes y a poté přes x, ale v tom případě bychom museli trojúhelník rozdělit na dva svislou čarou z jeho horního vrcholu, protože horní ohraničení oblasti je dáno dvěma různými křivkami. Počítali bychom tedy dva integrály.

Příklad 4.3. *Vypočtěte integrál* $\int_M \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána vztahy* $0 < y < 1$, $y < x < 10y$.

Řešení: Meze integrálu máme rovnou zadané, můžeme proto přikročit k jeho



Obrázek 5: Obrázek k příkladu 4.4

výpočtu.

$$\int_0^1 \left(\int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \begin{vmatrix} t = \sqrt{xy-y^2} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{y} & t(y) = 0 \\ x = \frac{t^2+y^2}{y} & \mathrm{d}x = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{y} & t(10y) = 3y \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{3y} \frac{2t^2}{y}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{y} \frac{(3y)^3}{3}\, \mathrm{d}y = 18 \int_0^1 y^2\, \mathrm{d}y = 18 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 6$$

Příklad 4.4. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y^2 = x$*,* $x = 0$ *a* $y = 1$*.*

Řešení: Meze jsou $0 < y < 1$, $0 < x < y^2$. Jako vnější proměnnou jsme zvolili y a určili její meze. Meze v proměnné x určíme tak, že při pevném y zvyšujeme x. Narazíme postupně na přímku $x = 0$ a parabolu $x = y^2$.

$$\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \begin{vmatrix} t = \frac{x}{y} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} & t(0) = 0 \\ & \mathrm{d}x = y\, \mathrm{d}t & t(y^2) = y \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 y \left(\int_0^y \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[y\mathrm{e}^t \right]_0^y \mathrm{d}y =$$

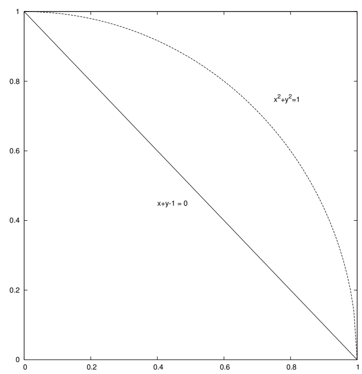
$$= \int_0^1 y(\mathrm{e}^y - 1)\, \mathrm{d}y = 1 - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\,,$$

neboť následující integrál můžeme vypočítat pomocí per partes.

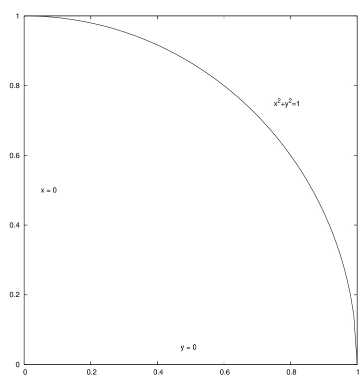
$$\int_0^1 y\mathrm{e}^y \mathrm{d}y = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^y & v\ = y \\ u\ = \mathrm{e}^y & v' = 1 \end{vmatrix} = [y\mathrm{e}^y]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^y\, \mathrm{d}y =$$

$$= [y\mathrm{e}^y]_0^1 - [\mathrm{e}^y]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1\,.$$

Příklad 4.5. *Vypočtěte integrál* $\int_M 2y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2 + y^2 = 1$ *a* $x + y - 1 = 0$*.*



Obrázek 6: Obrázek k příkladu 4.5



Obrázek 7: Obrázek k příkladu 4.6

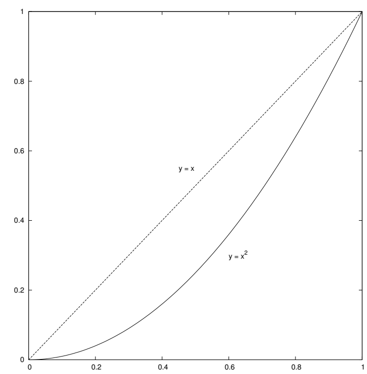
Řešení: Meze jsou $0 < x < 1$, $1 - x < y < \sqrt{1 - x^2}$. Za vnější proměnnou jsme zvolili x. Meze y jsme určili při pevném x díky tomu, že při zvyšujícím se y nejdříve narazíme na přímku $y = 1 - x$ a poté na křivku $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\int_M 2y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 2y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y^2 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 [1 - x^2 - (1-x)^2] \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 (x - x^2) \mathrm{d}x = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Příklad 4.6. *Vypočtěte integrál $\int_M x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je jednotkový čtvrtkruh v prvním kvadrantu.*

Řešení: Rovnice jednotkové kružnice je $x^2 + y^2 = 1$. Jako vnější proměnnou zvolíme x. Při pevném x a zvyšujícím se y nejdříve narazíme na $y = 0$, poté na



Obrázek 8: Obrázek k příkladu 4.8

kružnici. Meze jsou $0 < x < 1$, $0 < y < \sqrt{1-x^2}$.

$$\int_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -2x & t(0) = 1 \\ & \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t(1) = 0 \end{matrix} \right| = \int_1^0 \left(-\frac{1}{2} \right) t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Příklad 4.7. *Vypočtěte integrál $\int_M \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $y = 4$ a $x = 1$ a souřadnicovými osami.*

Řešení: Nyní integrujeme přes obdélník, situace je tedy jednoduchá. Meze obou proměnných jsou pevné: $0 < x < 1$, $0 < y < 4$.

$$\int_M \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\int_0^1 \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^4 y[\mathrm{e}^x]_0^1\,\mathrm{d}y = (\mathrm{e}-1)\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8(\mathrm{e}-1)\,.$$

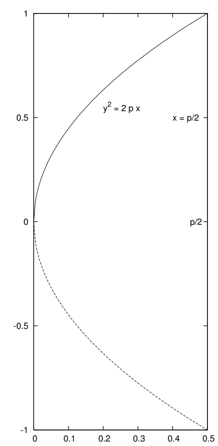
Příklad 4.8. *Vypočtěte integrál $\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $y = x$ a $y = x^2$.*

Řešení: Meze v proměnné x (vnější) dostaneme opět průmětem množiny M do osy x. Při zafixovaném x a rostoucím y nejdříve narazíme na parabolu $y = x^2$ a poté na přímku $y = x$. Meze jsou tedy $0 < x < 1$, $x^2 < y < x$.

$$\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{40}\,.$$

Příklad 4.9. *Vypočtěte integrál $\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $y^2 = 2px$ a $x = \frac{p}{2}$, $p > 0$.*



Obrázek 9: Obrázek k příkladu 4.9

Řešení: Jako vnější proměnnou zvolíme x, její meze jsou dané průmětem M do osy x. Při pevném x a rostoucím y potkáme nejdříve křivku $y = -\sqrt{2px}$ a poté teprve křivku $y = \sqrt{2px}$. Meze jsou $0 < x < \frac{p}{2}$, $-\sqrt{2px} < y < \sqrt{2px}$.

$$\int_M xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{p}{2}} x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{p}{2}} x \frac{(2px)^{\frac{3}{2}} + (2px)^{\frac{3}{2}}}{3} \,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}p^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}p^{\frac{3}{2}}}{3} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{2}{7} = \frac{p^5}{21}\,.$$

Příklad 4.10. *Vypočtěte integrál* $\int_M x^2 y \mathrm{e}^{xy} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* $M = [0,1] \times [0,2]$.

Řešení: Integrujeme přes obdélník, meze máme dány a jsou pro obě proměnné pevné. Nejdříve si spočítáme následující neurčitý integrál

$$\int \mathrm{e}^{xy} \,\mathrm{d}y = \left| \begin{matrix} t = xy & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = x \\ & \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \frac{1}{x} \int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy} + C\,.$$

Toho využijeme, abychom pomocí per partes vypočítali vnitřní integrál.

$$\int_M x^2 y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^2 y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^{xy} & v = y \\ u = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy} & v' = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 x^2 \left(\left[\frac{y}{x}\mathrm{e}^{xy}\right]_0^2 - \frac{1}{x}\int_0^2 \mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^2 \left(\frac{2}{x}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy}\right]_0^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[(2x-1)\mathrm{e}^{2x}+1\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2' = \mathrm{e}^{2x} & v_2 = 2x-1 \\ u_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} & v_2' = 2 \end{vmatrix} = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(2x-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 + [x]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} + 1 = 2\,.$$

Příklad 4.11. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2+y^2-1 \le 0$ *a* $x+y-1 \ge 0$.

Řešení: Můžeme opět využít obrázku 6. Meze jsou obdobně jako v příkladu 4.5 $0 \le x \le 1$, $1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

$$\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{3}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x)^3\right]\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int_0^1 (-2x)(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 1-x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -2x & t(0)=1 \\ & \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t(1)=0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_1^0 t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\frac{2}{5}[t^{\frac{5}{2}}]_0^1 -$$

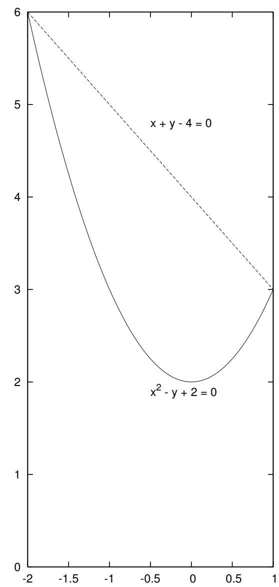
$$-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{20}$$

Příklad 4.12. *Vypočtěte integrál* $\int_M y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2-y+2=0$ *a* $x+y-4=0$.

Řešení: Nejdříve si vypočítáme průsečíky paraboly a přímky.

$$x^2-(4-x)+2 = 0\,,$$
$$(x+2)(x-1) = 0\,.$$

Průsečíky jsou tedy -2 a 1. Meze integrálu budou $-2 < x < 1$, $x^2+2 < y < 4-x$,



Obrázek 10: Obrázek k příkladu 4.12

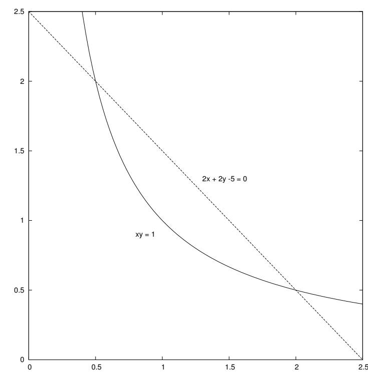
protože při pevném x z daného intervalu je křivka $y = x^2 + 2$ níže než $y = 4 - x$.

$$\int_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2+2}^{4-x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-2}^{1} \frac{(4-x)^2 - (x^2+2)^2}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-2}^{1} (-x^4 - 3x^2 - 8x + 12) \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x^2 + 12x \right]_{-2}^{1} = \frac{162}{5} \,.$$

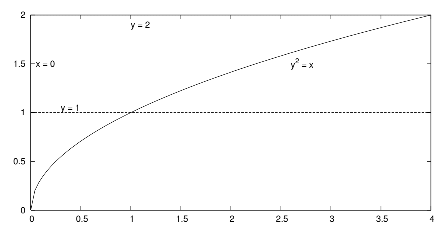
Příklad 4.13. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $xy = 1$ *a* $2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení: Nejdříve určíme průsečíky hyperboly a přímky.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \,,$$
$$(2x - 1)(x - 2) = 0 \,.$$



Obrázek 11: Obrázek k příkladu 4.13



Obrázek 12: Obrázek k příkladu 4.14

Meze jsou $\frac{1}{2} < x < 2$, $\frac{1}{x} < y < \frac{5}{2} - x$, protože hyperbola je níže.

$$\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2} \left[x \left(\frac{5}{2} - x \right)^2 - \frac{1}{x} \right] \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2} \left(\frac{25}{4}x - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{25}{8}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{165}{128} - \ln 2\,.$$

Příklad 4.14. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x = 0$*,* $y = 1$*,* $y = 2$ *a* $y^2 = x$*.*

Řešení: Vnitřní proměnnou zvolíme x, protože výraz pod integrálem bychom přes y nezintegrovali. Při pevném y a zvyšujícím se x nejdříve narazíme na

$x = 0$ (je více vlevo). Meze jsou $1 < y < 2$, $0 < x < y^2$.

$$\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} t = \frac{x}{y} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} \\ & \mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} =$$

$$= \int_1^2 y\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 y(\mathrm{e}^y - 1)\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^y & v\ = y \\ u\ = \mathrm{e}^y & v' = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [y\mathrm{e}^y]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y - \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \left[y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \frac{3}{2}\,.$$

4.3 Literatura

Teorii i další příklady lze nalézt např. v [8, 15, 6]. Příklady k této kapitole byly nejdříve zpracovány v původním studijním textu, poté podrobněji popsány v [10], odkud je přejímáme.

4.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 4.15. *Vypočtěte integrál* $\int_M (2x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána jako* $x \geq 0$*,* $y \geq 0$*,* $x + y \leq 3$*.*

Příklad 4.16. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y^2 = x$*,* $x = 0$*,* $y = 1$*.*

Příklad 4.17. *Vypočtěte integrál* $\int_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y = x^2$*,* $y^2 = x$*.*

Příklad 4.18. *Vypočtěte integrál* $\int_M x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y = x^2 - 2x + 1$*,* $y = x + 1$*.*

5 Substituce ve vícenásobném integrálu

5.1 Teorie

Věta 5.1. *Nechť M je množina a nechť ψ je prosté regulární zobrazení otevřené množiny $G \in \mathbb{R}_r$ do $\mathbb{R}_r$ takové, že $M \in \psi(G)$ a že $\psi^{-1}(M) = N$. Zobrazení ψ zobrazuje nové proměnné (u, v) na staré (x, y). Pak platí*

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_N f[x(u,v), y(u,v)]|\det J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,,$$

má-li alespoň jedna strana smysl. Zde $J \equiv \frac{\mathrm{D}\psi(u,v)}{\mathrm{D}(u,v)} \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ je Jacobiho matice zobrazení $\psi(x)$, tedy matice prvních parciálních derivací tohoto zobrazení.

Při substituci musíme provést tři věci.

1. Změnit meze integrálu, aby hranice integrované oblasti byly popsány v nových proměnných.
2. Provést substituci v integrované funkci, přepsat ji do nových proměnných.
3. Třetí (a možná nejdůležitější) změnou je přidání faktoru, který odpovídá determinantu Jacobiho matice. Protože jednotkový čtvereček (např. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$) má po substituci jinou velikost (např. $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$), je třeba do integrálu přidat faktor, který tuto změnu kompenzuje.

Jacobiho matici ve dvou proměnných vypočítáme podle vztahu

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Do integrálu dosadíme jeho absolutní hodnotu jejího determinantu.

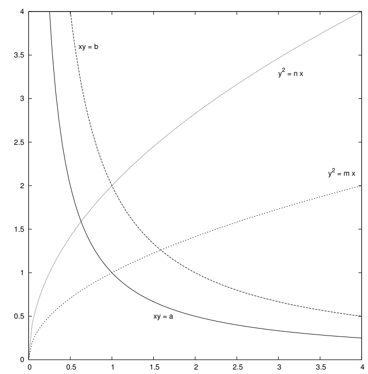
5.2 Řešené příklady

Příklad 5.2. *Určete obsah roviny omezené hyperbolami $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$ a parabolami $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $0 < m < n$.*

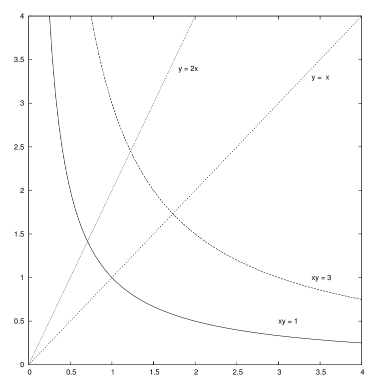
Řešení: Zvolíme si substituci $u = xy$, $v = y^2/x$. Tuto substituci volíme proto, aby nově zavedené proměnné měly jednodušší meze. Vidíme, že v nových proměnných u a v budeme integrovat přes obdélník: $a < u < b$, $m < v < n$. Rovnice křivek jsme si proto upravili tak, aby na jedné jejich straně byla konstanta a na druhé straně nová proměnná. Nyní musíme vyjádřit staré proměnné pomocí nových $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Např. vyjádřením y z první rovnice $y = u/x$, dosazením do druhé $v = u^2/x^3$ a úpravou dostáváme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}} = u^{2/3}v^{-1/3}$. Zpětným dosazením do rovnice pro y máme $y = u^{1/3}v^{1/3}$.

Vztahů pro x a y můžeme využít pro výpočet Jacobiho matice:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{pmatrix}.$$



Obrázek 13: Obrázek k příkladu 5.2



Obrázek 14: Obrázek k příkladu 5.3

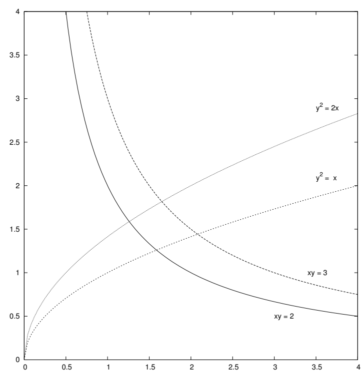
$$\det J = \frac{1}{3v}\,.$$

Nyní už můžeme využít věty o substituci a dosadit do vztahu výše. Protože počítáme obsah plochy, je integrovaná funkce jednička.

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\psi^{-1}(M)} \frac{1}{3v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_a^b \left(\int_m^n \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{3}\int_a^b (\ln n - \ln m)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{n}{m}\,.$$

Příklad 5.3. *Vypočtěte integrál* $\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *přes množinu* M *danou vztahy* $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}$ *a* $x \leq y \leq 2x$.

Řešení: Přepsáním výrazů ohraničujících množinu M tak, aby na levé resp. pravé straně nerovnic byly konstanty, získáváme $1 \leq xy \leq 3$, $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$. Tyto



Obrázek 15: Obrázek k příkladu 5.4

výrazy nás navádí na to, abychom využili substituce

$$u = xy\,, \quad v = \frac{y}{x}\,.$$

Nové proměnné se pohybují v mezích $1 \le u \le 3$, $1 \le v \le 2$. Opět např. vyjádříme y z první rovnice a dosadíme do druhé (případně můžeme taky levé a pravé strany rovnice vynásobit mezi sebou). Dostáváme

$$x = u^{1/2}v^{-1/2}\,, \quad y = u^{1/2}v^{1/2}\,.$$

Jacobiho matice pak je

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} \end{pmatrix}\,.$$

$$\det J = \frac{1}{2v}\,.$$

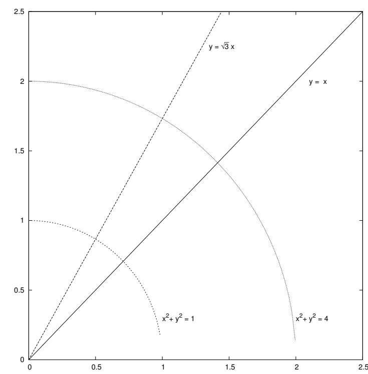
Integrál tedy vypočítáme následovně:

$$\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{u^2}{2v}\,\mathrm{d}v\right)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^3 \frac{1}{2}[\ln v]_1^2 = \frac{13}{3}\ln 2\,.$$

Příklad 5.4. *Pomocí substituce vypočtěte integrál* $\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde množina* M *je dána vztahy* $\frac{2}{x} \le y \le \frac{3}{x}$*,* $x \le y^2 \le 2x$*.*

Řešení: Vztahy ohraničující množinu M si přepíšeme tak, aby na krajních stranách byly konstanty: $2 \le xy \le 3$, $1 \le \frac{y^2}{x} \le 2$. Odsud vidíme, že nejlepší substituce je $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$, kde $2 \le u \le 3$ a $1 \le v \le 2$. Dále nalezneme inverzní vztahy $x = u^{2/3}v^{-1/3}$, $y = u^{1/3}v^{1/3}$. Jacobiho matice je

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{pmatrix}\,.$$



Obrázek 16: Obrázek k příkladu 5.5

$$\det J = \frac{1}{3v}\,.$$

S využitím vztahu $\frac{y^3}{x^3} = \frac{v^2}{u}$ integrál určíme jako:

$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^3 \left(\int_1^2 \frac{v^2}{u}\frac{1}{3v}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 [\ln u]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\,.$$

Příklad 5.5. *Pomocí substituce určete integrál* $\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána vztahy* $1 \le x^2+y^2 \le 4$*,* $x \le y \le \sqrt{3}x$

Řešení: Jak výraz v integrálu, tak části kružnic ohraničující množinu M navádějí na polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Množina M je v nich ohraničena vztahy $1 \le r \le 2$, $r\cos\varphi \le r\sin\varphi \le \sqrt{3}r\cos\varphi$, z čehož plyne $1 \le \operatorname{tg}\varphi \le \sqrt{3}$, a tedy $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Nyní vypočteme jakobián pro polární souřadnice, který se nám bude hodit i v dalších příkladech.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

$$\det J = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\,.$$

Ve výsledném integrálu se objeví jedno r za integrovanou funkci a jedno r z jacobiánu.

$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 [\varphi]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{7}{36}\pi\,.$$

Příklad 5.6. *Pomocí substituce ve vícenásobném integrálu odvoďte vztah pro obsah kruhu o poloměru* R*.*

Řešení: Zavedeme si polární souřadnice jako v minulém příkladu. Víme, že $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ a $\det J = r$. Potom je obsah kruhu roven integrálu:

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r \,\mathrm{d}r = 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^2 \,.$$

Příklad 5.7. *Určete integrál $\int_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je část kruhu o poloměru 1 a středu 0 v prvním kvadrantu.*

Řešení: Protože integrujeme přes čtvrtkruh, zvolíme opět polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, meze budou $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, jakobián je jako v předchozích příkladech r. V integrálu se objeví r^3: jedno za x, druhé za y a třetí z jacobiánu.

$$\int_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r\cos\varphi \, r\sin\varphi \, r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{4} \cos 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}$$

Využili jsme vztahu $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Příklad 5.8. *Vypočtěte integrál jedné proměnné $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x$.*

Řešení: Příklad na první pohled nesouvisí s vícenásobným integrálem, počítáme integrál funkce jedné proměnné. Krátkým zkoušením se můžeme přesvědčit, že jej standardními metodami nevypočítáme. Použijeme trik, který spočívá ve zdánlivém zesložitění převodem do dvou proměnných. Integrál ve dvou proměnných však můžeme substitucí snadno vypočítat a navíc nalezneme vztah k původnímu integrálu.

Uvažujeme integrál dvou proměnných $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Vypočteme ho substitucí polárních souřadnic.

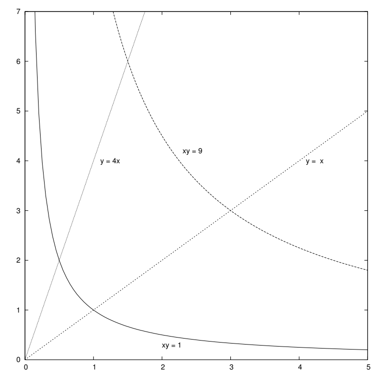
$$x = r\cos\varphi \,, \quad y = r\sin\varphi \,, \quad \det J = r \,.$$

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \begin{vmatrix} t = -r^2 & \mathrm{d}t = -2r\,\mathrm{d}r & t(0) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -2r & r\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t & t(\infty) = -\infty \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{-\infty} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi =$$
$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\mathrm{e}^t]_0^{-\infty} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} [\varphi]_0^{2\pi} = \pi \,.$$

Zároveň máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \,\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \right)^2 .$$



Obrázek 17: Obrázek k příkladu 5.10

Odsud dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,.$$

Vypočtený integrál z Gaussovy funkce je důležitý např. v teorii chyb.

Příklad 5.9. *Pomocí substituce vypočtěte* $\int_M (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je omezená křivkami* $x+y=0$*,* $x+y=1$*,* $2x-y=0$*,* $2x-y=3$*.*

Řešení: Zavedeme substituci $u = x+y$ a $v = 2x-y$, máme tedy $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 3$. Inverzní vztahy jsou $x = \frac{u+v}{3}$, $y = \frac{2u-v}{3}$. Jacobiho matice je:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\det J = -\frac{1}{3}\,.$$

Jakobián je $-1/3$, do integrálu ale dáváme absolutní hodnotu jacobiánu, tj. $1/3$.

$$\int_M (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 \int_0^1 u^2 \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 [v]_0^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Příklad 5.10. *Určete integrál* $\int_M \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je množina v 1. kvadrantu ohraničená hyperbolami* $xy = 1$*,* $xy = 9$ *a přímkami* $y = x$ *a* $y = 4x$*.*

Řešení: Ohraničení množiny M a výraz v integrálu navádí na substituci $u^2 = xy$, $v^2 = \frac{y}{x}$ (možná je i jiná volba). Hranice v nových proměnných budou $1 \le u \le 3$, $1 \le v \le 2$. Vydělením a vynásobením definičních vztahů pro u a v dostáváme $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$. Jacobiho matice pak je:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{pmatrix}, \quad \det J = \frac{2u}{v}\,.$$

Pro integrál dostáváme

$$\int_M \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_1^3 (u+v)\frac{2u}{v}\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}v =$$
$$= \int_1^2 \left[\frac{2u^3}{3} + 2v\frac{u^2}{2}\right]_1^3 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \left(\frac{52}{3v} + 8\right) \mathrm{d}v = \frac{52}{3}[\ln v]_1^2 + 8(2-1) =$$
$$= \frac{52}{3}\ln 2 + 8(2-1) = \frac{52}{3}\ln 2 + 8\,.$$

Příklad 5.11. *Určete integrál $\int_M \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je kruh o poloměru 2 se středem v počátku.*

Řešení: Použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\det J = r$.

$$\int_M \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r\sin r^2\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \begin{vmatrix} t = r^2 & \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = 2r & r\,\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}t}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^4 \sin t\,\mathrm{d}t = 2\pi\frac{1}{2}[-\cos t]_0^4 = \pi(1-\cos 4)\,.$$

Příklad 5.12. *Určete obsah elipsy o poloosách a a b.*

Řešení: Rovnice elipsy je $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ a lze ji parametrizovat $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, kde $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Jacobiho matice je

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det J = abr(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = abr\,.$$

Protože počítáme obsah plochy, je integrovanou funkcí jednička.

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = ab2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = ab\pi\,.$$

Příklad 5.13. *Přechodem k polárním souřadnicím určete plošný obsah části roviny, určené následujícími nerovnostmi, respektive hraničními křivkami:*

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\,, \quad x^2+y^2 \ge a^2\,, \quad a \ne 0\,.$$

Řešení: Použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\det J = r$. V nich hraniční křivky vypadají $r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, tj. $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ a $r^2 \ge a^2$. Rovnosti v prvním vztahu se pro $r = a$ dosahuje pro $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$, tj. $\varphi = \pi/6$. Meze v polárních souřadnicích tedy jsou $a \le r \le a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$. Pro integrál dostáváme

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a^2}{2}(2\cos 2\varphi - 1)\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \begin{vmatrix} t = 2\varphi \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}\varphi \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t\,\mathrm{d}t - \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}[\sin t]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{a^2}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)\,.$$

Příklad 5.14. *Kruhový válec o poloměru podstavy R výšce h s osou ve směru osy z je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g z}{p_0}}$. Určete hmotnost plynu ve válci.*

Řešení: Použijeme válcové souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Obdobně jako u polárních souřadnic je jakobián $\det J = r$. Hmotnost plynu vypočteme jako integrál z hustoty přes celý objem válce.

$$m = \int_V \rho \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\psi^{-1}(V)} \rho r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \int_0^h \rho_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z} \, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \frac{R^2}{2} \rho_0 \int_0^h \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z} \, \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2 p_0}{g} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}\right) .$$

Příklad 5.15. *Vypočítejte obsah množiny M, která je ohraničena lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.*

Řešení: Křivka je středově symetrická podle počátku, budeme počítat obsah části M v prvním kvadrantu a vynásobíme jej pak 4. Použijeme polární souřadnice, v nich dostáváme

$$0 \le r^4 \le r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2 \cos 2\varphi \,,$$

tj. $0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}$. Použili jsme vztah $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$. Aby tato nerovnost mohla být splněna, musí být $\cos 2\varphi$ kladný. Dostáváme tedy $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Průnik s prvním kvadrantem dává $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Obsah množiny M tedy je

$$S = \int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\psi^{-1}(M)} r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \begin{vmatrix} u = 2\varphi \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}\varphi \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, \mathrm{d}u = 1 \,.$$

5.3 Literatura

Problémy byly inspirovány publikacemi [8, 15, 1, 11], kde lze nalézt další příklady k řešení.

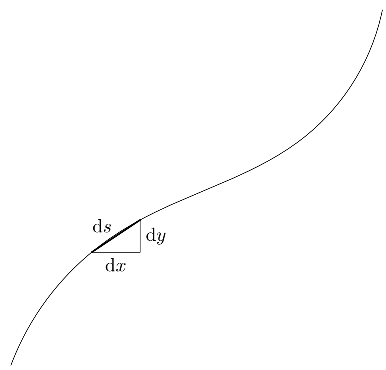
5.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 5.16. *Zvolte vhodnou transformaci souřadnic a určete plošný obsah části roviny omezené křivkami: $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x, y > 0$.*

Příklad 5.17. *Přechodem k válcovým souřadnicím určete objem tělesa ohraničeného plochami $z = xy$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$.*

Příklad 5.18. *Vypočítejte obsah množiny M, která je ohraničena lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.*
Návod: *Použijte polární souřadnice.*

Příklad 5.19. *Určete integrál* $\int_M \sin\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je kruh o poloměru 2 se středem v počátku.*



Obrázek 18: Ilustrace výpočtu elementu délky křivky

6 Křivkový integrál prvního druhu

6.1 Teorie

Cílem je určit integrál z funkce f přes křivku C. Předpokládejme, že C je křivka v rovině. Parametrizujeme si ji parametrem t, který běží od a (hodnota t v jednom z krajních bodů křivky) do b (hodnota t ve druhém krajním bodě). Získáme funkce $x(t)$ a $y(t)$, které společně popisují křivku. Potom integrál z f přes tuto křivku je roven

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Důvodem členu s odmocninou je to, že pro element délky křivky platí z Pythagorovy věty (viz obr. 18)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2\,,$$

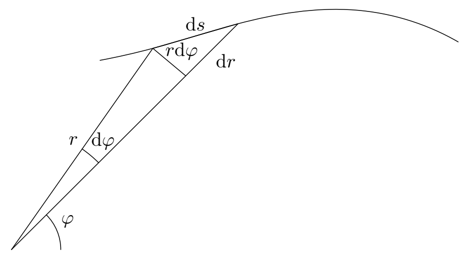
a tedy $\mathrm{d}s = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Pro křivku v prostoru do vztahu pro integrál přibude z':

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pokud je křivka zadaná v polárních souřadnicích jako $r = r(\varphi)$, vypočítá se integrál jako

$$\int_C f(r,\varphi)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(r(\varphi),\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$



Obrázek 19: Ilustrace výpočtu elementu délky křivky v polárních souřadnicích

Důvodem tohoto vztahu je vztah pro element délky (viz obr.19)

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}r^2 = \left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right] \mathrm{d}\varphi^2 \,.$$

6.2 Řešené příklady

Příklad 6.1. *Parametrizujte následující křivky:*

a) *úsečka AB, $A = [2, 5]$, $B = [-1, 3]$,*

b) *úsečka AB, $A = [-2, 2]$, $B = [1, 7]$,*

c) *dolní polokružnice $x^2 + y^2 = 9$,*

d) *levá část kružnice $x^2 + y^2 = 25$,*

e) *pravá část kružnice $(x - 3)^2 + y^2 = 16$,*

f) *pravá polovina elipsy $4x^2 + y^2 = 4$,*

g) *část elipsy v 1. kvadrantu $4x^2 + 9y^2 = 36$,*

h) *prostorová křivka $x^2 + y^2 + z^2 = 19$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y = \sqrt{3}$.*

Řešení:

a) Jde o parametrizaci úsečky, proto můžeme zvolit $x = a + bt$ a $y = c + dt$ a poté vypočítat parametry a, b, c, d. Úsečku budeme parametrizovat parametrem t, který jde od 0 do 1, přičemž bod $t = 0$ odpovídá bodu A a $t = 1$ odpovídá bodu B. Pro $t = 0$ dostáváme $a = 2$ a $c = 5$, pro $t = 1$ máme $-1 = a + b$, $3 = c + d$. Odsud $b = -3$, $d = -2$. Parametrizace tedy je $x = -3t + 2$, $y = -2t + 5$, $t \in [0, 1]$.

b) Obdobně jako v předchozím případě volíme $x = a + bt$ a $y = c + dt$ a t jdoucí od 0 do 1. Pro $t = 0$ dostaneme $a = -2$ a $c = 2$, pro $t = 1$ získáme $1 = a+b$, $7 = c+d$, dosud $b = 3$, $d = 5$. Parametrizace tedy je $x = -2+3t$, $y = 2 + 5t$, $t \in [0, 1]$.

c) Daná kružnice má střed v bodě $[0,0]$ a poloměr 3. Můžeme ji parametrizovat goniometrickými funkcemi. Z obrázku plyne, že $x = 3\cos t$ a $y = 3\sin t$. Zajímá nás dolní polovina kružnice, t musíme volit v intervalu $t \in [\pi, 2\pi]$.

d) Tato kružnice má střed v bodě $[0,0]$ a poloměr 5. Potřebná parametrizace v tomto případě je $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$. Abychom dostali levou polovinu kružnice, musíme volit $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

e) Tato kružnice má střed v bodě $[3,0]$ a poloměr 4. Obdobně jako v předchozích dvou případech parametrizujeme kružnici pomocí sinů a kosinů, k x však musíme přičíst kvůli poloze středu 3. Parametrizace tedy je $x = 3 + 4\cos t$, $y = 4\sin t$. Protože máme pravou část kružnice, bereme interval $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

f) Elipsu parametrizujeme podobně jako kružnici, kvůli rozdílnosti délek poloos musíme vzít různé konstanty před sinem a kosinem. Naše elipsa má hlavní poloosu 2 a vedlejší poloosu 1. Předpokládejme tvar $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Dosazením do rovnice elipsy získáváme $4a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = 4$. Aby tato rovnice identicky platila, musíme zvolit $a = 1$, $b = 2$. Poté dostaneme identitu $4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$. Parametrizace tedy je $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, abychom dostali pravou polovinu elipsy, volíme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

g) Postup je podobný jako v předchozím případě. Volbou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ dostáváme $4a^2\cos^2 t + 9b^2\sin^2 t = 36$, tedy je nutno volit $a = 3$, $b = 2$. Parametrizace je $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

h) Jedná se o čtvrtkružnici v prostoru. Vyjdeme nejdříve ze vztahu $y = \sqrt{3}$, dosazením a odečtením trojky od obou stran rovnice objevíme rovnici kružnice v rovině $x^2 + z^2 = 16$. Máme tedy parametrizaci $x = 4\cos t$, $y = \sqrt{3}$, $z = 4\sin t$; protože z pohledu souřadnic x a z bereme čtvrtkružnici v prvním kvadrantu, t patří do intervalu $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Příklad 6.2. *Vypočtěte* $\int_C \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$*, kde* C *je úsečka* AB*,* $A = [0,-2]$*,* $B = [4,0]$*.*

Řešení: Úsečku si parametrizujeme jako v předchozím příkladě, vyjde $x = 4t$, $y = 2t - 2$, $t \in [0,1]$. Podle vztahu v teorii vypočteme

$$\int_C \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4t - (2t-2)}\sqrt{4^2 + 2^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{t+1} = \sqrt{5}\ln 2\,.$$

Příklad 6.3. *Vypočtěte integrál* $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$*, kde* C *je obvod trojúhelníka* ABC *s vrcholy* $A = [0,0]$*,* $B = [1,0]$*,* $C = [0,1]$*.*

Křivku, přes kterou integrujeme, si rozdělíme do tří úseček, které parametrizujeme následovně (postup je popsán v prvním příkladě)

$$
\begin{aligned}
C_1 = AB: &\qquad x = t, \quad y = 0, \quad t \in [0,1]\,,\\
C_2 = BC: &\qquad x = -t + 1, \quad y = t, \quad t \in [0,1]\,,\\
C_3 = CA: &\qquad x = 0, \quad y = -t + 1, \quad t \in [0,1]\,.
\end{aligned}
$$

Výsledný integrál spočteme jako tři nezávislé integrály.

$$
\begin{aligned}
\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{C_3} (x+y)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^1 t\sqrt{1^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 1\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (-t+1)\sqrt{1}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \sqrt{2}\,[t]_0^1 + \left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + [t]_0^1 = 1 + \sqrt{2}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 6.4. *Vypočtěte* $\int_C y^2\,\mathrm{d}s$, *kde* C *je oblouk cykloidy* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

V tomto případě máme přímo zadanou parametrizaci křivky, můžeme proto dosadit do vztahu a vypočítat integrál.

$$
\begin{aligned}
\int_C y^2\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} a^3\sqrt{2}(1-\cos t)^{5/2}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} a^3(1-\cos t)^{5/2}\,\mathrm{d}t =
\end{aligned}
$$

$$
2\sqrt{2}a^3 2^{5/2}\int_0^{\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u = t/2 \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}u\end{matrix}\right| = 32a^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 u)^2(-\cos u)'\mathrm{d}u =
$$

$$
= \left|\begin{matrix} v = \cos u \\ \mathrm{d}v = -\sin u\mathrm{d}u\end{matrix}\right| = 32a^3\int_1^0 (-1)(1-2v^2+v^4)\,\mathrm{d}v = 32a^3\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{256}{15}a^3\,.
$$

Příklad 6.5. *Určete délku asteroidy* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Určujeme délku křivky, proto integrujeme jedničku.

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= 3a\int_0^{2\pi}|\cos t\sin t|\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u = \sin t \\ \mathrm{d}u = \cos t\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \\
&= 12a\int_0^{\pi/2} u\ \mathrm{d}u = 6a\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 6.6. *Určete délku oblouku kardiody parametrizované polárními souřadnicemi* $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Využijeme vztah pro polární souřadnice.

$$s = \int_C \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} 2t = \varphi \\ 2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi \end{array} \right| = 4a\int_0^{\pi/2} \cos t 2\,\mathrm{d}t = 8a\sin\frac{\pi}{2} = 8a\,.$$

Využili jsme vztahu $\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$, který plyne z $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$.

Příklad 6.7. *Určete délku jednoho závitu šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Použijeme vztah pro křivku ve 3D.

$$s = \int_C \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Příklad 6.8. *Určete $\int_C xy\,\mathrm{d}s$, kde C je elipsa $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$*

Nejdříve si parametrizujeme elipsu: $x = 3\cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_C xy\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} 3\cos t\sin t\sqrt{(-3\sin t)^2 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\sin t\sqrt{1+8\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \sin t \\ \mathrm{d}u \ = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1 3u\sqrt{1+8u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left| \begin{array}{c} v = 1+8u^2 \\ \mathrm{d}v \ = 16u \ \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int_1^9 \frac{3}{16}v^{1/2}\,\mathrm{d}v = \frac{3}{16}\frac{2}{3}[v^{3/2}]_1^9 = \frac{13}{4}\,.$$

Příklad 6.9. *Určete $\int_C \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kde C je parametrizovaná vztahy $x = \mathrm{e}^t\cos t$, $y = \mathrm{e}^t\cos t$*

6.3 Literatura

Jako další studium lze doporučit např. [8, 14].

6.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 6.10.

Parametrizujte následující křivky:

a) *úsečka AB, $A =[3, 6]$, $B = [-1, 2]$,*

b) *pravá část kružnice $x^2 + y^2 = 16$,* *c) horní polovina elipsy* $x^2 + 9y^2 = 9$.

Příklad 6.11. *Určete* $\int_C xy \,\mathrm{d}s$, *kde* C *je úsečka* AB, $A = [1, 1]$, $B = [2, 4]$.

Příklad 6.12. *Určete* $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} \,\mathrm{d}s$, *kde* C *je dána vztahy* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x = y$, $x \le 0$, $z \ge 0$.

Příklad 6.13. *Určete délku větve cykloidy* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Rada: *Můžete využít vztahu* $1 - \cos 2u = 2 \sin^2 u$.

Příklad 6.14. *Určete* $\int_C x \,\mathrm{d}s$, *kde* C *je graf funkce* x^2 *mezi body* $x \in [1, 2]$.

7 Parciální diferenciální rovnice

7.1 Rozdělení parciálních diferenciálních rovnic

Parciální diferenciální rovnice je rovnice, ve které se kromě funkcí více proměnných vyskytují také jejich parciální derivace. Obecnou parciální diferenciální rovnici 2. řádu lze za předpokladu záměnnosti druhých parciálních derivací zapsat ve tvaru

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + F = 0\,.$$

Podobnost této rovnice a rovnice kuželoseček

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

nás vede k následující klasifikaci parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu. Zavedeme si

$$\delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

a rozlišujeme

a) eliptické: $\delta > 0$: Laplaceova ($-\Delta u = 0$), Poissonova $-\Delta u = f$,

b) parabolické: $\delta = 0$: rovnice vedení tepla: $\partial_t u - \Delta u = 0$,

c) hyperbolické: $\delta < 0$: vlnová rovnice $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$, Schrödingerova rovnice $i\hbar\partial_t \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi$, Navierovy-Stokesovy rovnice.

7.2 Vlnová rovnice

Řešíme vlnovou rovnici na kruhové membráně

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\,,$$

kde jsme využili zápisu Laplaceova operátoru pomocí cylindrických souřadnic. Hledáme závislost funkce funkce u na vzdálenosti od středu r, úhlu θ a času t. Můžeme předpokládat, že proměnné jsou separovány $u(r,\theta,t) = T(t)\Theta(\theta)R(r)$. Po dosazení do vlnové rovnice a jejím vydělení $c^2 u(r,\theta,t)$ dostáváme

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)} = -\lambda^2\,. \tag{2}$$

Obě strany se musejí rovnat konstantě, protože levá strana nezávisí na r a θ a pravá strana nezávisí na t. Tuto konstantu zvolíme jako $-\lambda^2$. Pro T dostáváme rovnici harmonického oscilátoru $T''(t) + c^2\lambda^2 T(t) = 0$, která má obecné řešení

$$T(t) = A\cos(c\lambda t) + B\sin(c\lambda t)\,.$$

Z pravé části vlnové rovnice (2) máme

$$\lambda^2 r^2 + \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m^2 .$$

Opět využijeme toho, že levá část rovnice nezávisí na θ a pravá nezávisí na r, musí být tedy obě rovny konstantě, m^2. Protože proměnná $\Theta(\theta)$ je periodická s periodou 2π, musí být m celočíselná.

$$\Theta(\theta) = C\cos m\theta + D\sin m\theta\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Rovnice pro R se nazývá Besselova rovnice

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

a její řešení se nazývá Besselova funkce $J_\alpha(x)$. V našem případě máme

$$R(r) = J_m(\lambda_{mn} r)\,,$$

s $\lambda_{mn} = \alpha_{mn}/a$, kde α_{mn} je n-tý kladný kořen funkce $J_m(x)$ a a je poloměr kruhové membrány. Celá neznámá funkce u má tvar

$$u(r,\theta,t) = (A\cos c\lambda_{mn}t + B\sin c\lambda_{mn}t)J_m(\lambda_{mn}r)(C\cos m\theta + D\sin m\theta)\,.$$

7.3 Rovnice vedení tepla

Budeme zkoumat chování rovnice vedení tepla $\partial_t u = \alpha\partial_x^2 u$ na přímce s počáteční podmínkou $u(x,0) = f(x)$. Zajímá nás tedy přenos teploty na nekonečně dlouhé rovné tyči.

K výpočtu použijeme Fourierovu transformaci, kterou značíme stříškou a vypočteme podle vztahu

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro Fourierovu transformaci derivace platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{f}}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-i\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = i\xi\hat{f}\,,\end{aligned}$$

kde jsme derivaci „přehodili“ pomocí per partes.

Na rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

aplikujeme Fourierovu transformaci v proměnné x. Máme tedy

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^{\hat{2}} u}{\partial x^2}\,,$$
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \alpha (i\xi)^2 \hat{u}\,.$$

Tuto rovnici jako rovnici pro t umíme řešit separací proměnných, jejím řešením je exponenciála

$$\hat{u}(\xi, t) = F(\xi)\mathrm{e}^{-\alpha\xi^2 t}\,.$$

Z počáteční podmínky vidíme, že

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) = F(\xi) \quad \Rightarrow \quad F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Pro danou funkci $f(x)$ zjistíme řešení zpětnou Fourierovou transformací

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t)\mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Zkusíme vypočítat teplotní funkci u pro malý zdroj, tedy pro teplotu velkou v jednom bodě a nulovou v ostatních. Jako počáteční podmínku zvolíme δ-distribuci, která je nekonečná v bodě 0, nulová v ostatních bodech a integrál přes ni přes celá reálná čísla je 1 ($f(x) = \delta(x)$). Její Fourierova transformace je

$$F(\xi) = \hat{\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-i\xi 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Teplotní funkce $u(x, t)$ je

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t)\mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\xi^2 t}\mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t\left(\xi^2 + \frac{i\xi x}{\alpha t}\right)}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t\left(\xi + \frac{ix}{2\alpha t}\right)^2} \mathrm{e}^{\alpha t \frac{i^2 x^2}{4\alpha^2 t^2}}\, \mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}$$

Udělali jsme to, že jsme exponent exponenciály upravili na čtverec (a přičetli zase zbývající člen). Nyní si uvědomíme, že posuneme-li obor integrace, výsledek se nezmění, protože integrujeme od $-\infty$ do ∞.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{\alpha t}\xi)^2}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Nyní zavedeme substituci $v = \sqrt{\alpha t}\xi$, $\mathrm{d}v = \sqrt{\alpha t}\, \mathrm{d}\xi$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha t}}\mathrm{e}^{-v^2}\, \mathrm{d}v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}\,.$$

7.4 Literatura

Dále lze studovat např. [4, 16].

8 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování

Př. 1.12: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{\frac{3}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + C_4 e^{\frac{3}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)$.
Př. 1.13: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
Př. 1.14: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.
Př. 1.15: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
Př. 1.16: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{-2x}$.
Př. 1.17: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} + C_4 x e^{3x}$.
Př. 1.18: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
Př. 2.18: $y(x) = \frac{1}{x} + c_2 x^2$.
Př. 2.19: $y(x) = x^2 - 1 + c_2 e^{-x^2}$.
Př. 2.20: $y(x) = (x^2 + c_2) e^{-x^2}$.
Př. 2.21: $y(x) = x^3 + c_2 e^{x^2}$.
Př. 2.22: $y(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{c_2}{x}\right) e^x$.
Př. 2.23: $y(x) = 2(\sin x - 1) + c_2 e^{-\sin x}$.
Př. 2.24: $y(x) = \frac{3e^{x^2} - 1}{2}$.
Př. 2.25: $y(x) = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c_2\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Př. 2.26: $y(x) = \frac{1}{2}(e^x + 3e^{-x})$.
Př. 2.27: $y(x) = (x+3)e^{-x}$.
Př. 2.28: $y(x) = (\operatorname{arctg} x + 1)(1 + x^2)$.
Př. 2.29: $y(x) = 2e^{1+\frac{1}{x}}, \quad x \in (-\infty, 0)$.
Př. 2.30: $y(x) = (1+x)^{-1} \quad x > -1$.
Př. 2.31: $y(x) = (x+1)e^{-\sin x}$.
Př. 2.32: $y(x) = 2x - 1 + c_2 e^{-x}$.
Př. 3.14: $y(x) = \frac{x^5}{120} + \frac{x^2}{2} + x + 3$.
Př. 3.15: $y(x) = x(\ln|x| - 1) + c_1 x^4 + c_2 x + c_3$.
Př. 3.16: $x(x-2)z' - 2(x^2 - x + 2)z = 0$.
Př. 3.17: $y(x) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}x + 1\right)^5$.
Př. 4.15: $\frac{27}{2}$.
Př. 4.16: $\frac{1}{2}$.
Př. 4.17: $\frac{33}{140}$.
Př. 4.18: $\frac{729}{28}$.
Př. 5.16: $a^2 \ln \sqrt{2}$.
Př. 5.17: $\frac{1}{8}a^4$.
Př. 5.18: 1.
Př. 5.19: $\pi(1 - \cos 4)$.
Př. 6.10: a) $x = 3 - 4t$, $y = 6 - 4t$, $t \in [0, 1]$,
b) $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
c) $x = 3\cos t$, $y = \sin t$, $t \in [-0, \pi]$.
Př. 6.11: $4\sqrt{10}$.
Př. 6.12: 2π.

Př. 6.13: $8a$.
Př. 6.14: $\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}$.

Použitá a doporučená literatura

[1] Auroux, D. Substitution of the variables in double integration. MIT, Cambridge, USA, 2007. Dostupné z www: https://www.wiziq.com/tutorial/168706-Substitution-of-the-variables-in-double-integration

[2] Bárta, T., Pražák, D. Obyčejné diferenciální rovnice – sbírka úloh a řešených příkladů. MFF UK v Praze, Praha, 2007–2010. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/

[3] Brzezina, M., Veselý, J. Obyčejné (lineární) diferenciální rovnice a jejich systémy. FP TU v Liberci, Liberec, 2012. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/Brz_ves/difrov.pdf

[4] Drábek, P., Holubová, G. Parciální diferenciální rovnice. VŠB-TU Ostrava a ZČU v Plzni, 2011. Dostupné z www: http://mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice

[5] Fišer, J. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu. PřF UPOL, Olomouc. Dostupné z www: http://aix-slx.upol.cz/~fiser/M3/LDR2R.pdf

[6] Klaška, J. Dvojný integrál – Fubiniho věta. FSI VUT, Brno, 2006. Dostupné z www: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=350

[7] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2003. ISBN 80-86732-13-4.

[8] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky III. Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-95-2.

[9] Lipovský, J. Matematika 1. PřF UHK, Hradec Králové, 2013–2018. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/km1dr.pdf

[10] Lipovský, J. Matematika k základům fyziky 2. PřF UHK, Hradec Králové, 2018. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/kmzf2.pdf

[11] Math24: Change of Variables in Double Integrals. Dostupné z www: https://www.math24.net/change-variables-double-integrals/

[12] Míková, L. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. Bakalářská práce. PřF MU v Brně, Brno, 2007. Dostupné z www: https://is.muni.cz/th/tm4l8/Bakalarska_prace.pdf

[13] Nováková, E., Hyánková, M., Průcha, L. Obyčejné diferenciální rovnice – studijní text pro cvičení v předmětu „Matematika – 2“. FEL ČVUT, Praha. Dostupné z www: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/prucha/xm2/difrov/dfru.pdf

[14] ŠIBRAVA, Z. Příklady k Matematice 3 – Křivkové integrály. FSV ČVUT, Praha. Dostupné z www: http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/kriv_int.pdf

[15] ŠIBRAVA, Z. Příklady k Matematice 3 – Vícenásobné integrály. FSV ČVUT, Praha. Dostupné z www: http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf

[16] Vibrations of a circular membrane – článek na anglické Wikipedii. Dostupné z www: http://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane

[17] VLČEK, J. Matematika II – Diferenciální rovnice. VŠB – TU Ostrava, Ostrava. Dostupné z www: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/difrov.html

[18] ZEMÁNEK, P. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty a jejich aplikace. Bakalářská práce. PřF MU v Brně, Brno, 2005. Dostupné z www: https://is.muni.cz/th/fz1wr/bakalarska_prace.pdf?so=nx