Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

MATEMATIKA K ZÁKLADŮM FYZIKY 1

RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.

Hradec Králové 2019

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Tento materiál vznikl v rámci realizace projektu
Strategický rozvoj Univerzity Hradec Králové, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002427.

Obsah

Předmluva

Tento studijní text je určen zejména studentům předmětu Matematika k základům fyziky 1 vyučovaného v prvním ročníku kombinovaného studia oboru Fyzikálně-technická měření a výpočetní technika na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové.

Předmět se zabývá se zejména diferenciálním počtem funkce jedné proměnné. Velká část znění vět je převzata z [6], zadání příkladů jsou vlastní nebo převzaté z různých zdrojů (hlavně [2]) či jimi inspirované. Řešení příkladů je vlastní. Na konci každé sekce je uvedena doporučená literatura a příklady k samostatnému procvičování.

Budu rád, když tento text bude sloužit mým studentům, ale nejen jim. V případě, že v textu objevíte chybu, překlep či nejasnost, sdělte mi ji prosím na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

V Černvíře, 31. 12. 2019

Jiří Lipovský

verze 1.3

1 Výroková logika, množiny, kartézský součin, relace, zobrazení

1.1 Výroková logika

Definice 1.1. Výrok *je tvrzení, u něhož má smysl se zabývat otázkou, je-li pravdivé.*

Příklad 1.2. *Určete, zda je daná věta výrokem:*

a) *„Rudolf II. vládl ve 13. století.“*

b) „$1 < 10$“

c) *„Přestaň!“*

d) *„Kdo vyhrál olympijské hry v ledním hokeji v roce 2014?“*

e) *„Ať se máme všichni dobře!“*

Řešení: a), b) výroky jsou, c), d) a e) nejsou.

U výroku můžeme posuzovat jeho pravdivost nebo nepravdivost. Pokud není dosud zřejmé, zda je výrok pravdivý či nepravdivý, mluvíme o *hypotéze.* („Rakovina je virového původu.“) Pro operace s výroky používáme logické spojky:

$\neg$	není pravda, že (negace)
$\wedge$	a (konjunkce)
$\vee$	nebo (disjunkce)
$\Rightarrow$	jestliže, pak (implikace)
$\Leftrightarrow$	právě když (ekvivalence)

Výroky s těmito spojkami pak nazýváme složené.

Příklad 1.3. *Určete druh složených výroků, jež vyjadřují matematické zápisy.*

a) $-1 < 2 < 5$,

b) $\frac{1}{2} \leq 0{,}5$.

Řešení:

a) Jde o konjunkci, protože se jedná o spojení výroků $-1 < 2$ a $2 < 5$, které musí platit oba zároveň.

b) Jde o disjunkci, výrok tvrdí, že platí rovnost nebo že číslo nalevo je menší než číslo napravo.

Nyní uvedeme pravdivostní tabulku základních složených výroků. Budeme uvažovat dva výroky p a q. Pokud je výrok pravdivý, přiřadíme mu jedničku, pokud je nepravdivý, nulu. Vlevo napíšeme všechny možné (čtyři) kombinace pravdivosti dvou výroků; do dalších sloupců pak píšeme pravdivost pro složené výroky.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Zastavme se u implikace. Upozorňujeme, že když je první výrok nepravdivý, implikace je vždy pravdivá. Má to logiku v tom, že pokud první výrok neplatí, nemusíme splnit druhý výrok a nikdo nás tedy nemůže obvinit ze lži.

Pro negace složených výroků platí.

$$\begin{aligned}
\neg(p \wedge q) &= \neg p \vee \neg q\,,\\
\neg(p \vee q) &= \neg p \wedge \neg q\,,\\
\neg(p \Rightarrow q) &= p \wedge \neg q\,,\\
\neg(p \Leftrightarrow q) &= (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)\,.
\end{aligned}$$

Příklad 1.4. *Určete pravdivostní hodnoty výroku $A \Rightarrow (A \vee B)$.*

Řešení: Ve výroku se vyskytují dva výroky A a B, sestavíme proto tabulku, která má $2^2 = 4$ řádky. U výroku A píšeme v první polovině řádků (tedy prvních dvou) jedničky a ve druhé polovině (dalších dvou) řádků nuly. U druhého výroku budou jedničky v první a třetí čtvrtině řádků (tedy prvním a třetím řádku) a nuly v druhé a čtvrté čtvrtině řádků (tedy druhém a čtvrtém řádku). Tak dostaneme všechny možné kombinace pravdivostí obou výroků. Do sloupců poté napíšeme části složeného výroku a vyhodnotíme jejich pravdivost podle pravdivostní tabulky výše. Dostáváme tabulku

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Do sloupce $A \vee B$ doplníme hodnoty pro disjunkci, tedy postupně 1, 1, 1, 0 (disjunkce je nepravdivá pouze v případě, kdy oba výroky jsou nepravdivé).

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	1	
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	

Do posledního sloupce vyplňujeme pravdivostní hodnoty implikace $A \Rightarrow (A \vee B)$. V prvním řádku je výrok A pravdivý (vizte první sloupec), výrok

$A \vee B$ také pravdivý (třetí sloupec), implikace je tedy pravdivá, do prvního řádku posledního sloupce napíšeme jedničku. Ve druhém řádku je výrok A pravdivý a výrok $A \vee B$ také pravdivý, implikace je tedy také pravdivá. V posledních dvou řádcích je výrok A nepravdivý, a proto je implikace pravdivá (z nepravdivého výroku plyne cokoliv). Dostáváme proto tabulku

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Zkoumaný výrok je vždy pravdivý, říkáme mu *tautologie*.

Příklad 1.5. *Určete pravdivostní hodnoty výroku* $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu. Tabulku vyplníme následovně.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Příklad 1.6. *Určete pravdivostní hodnoty výroku*

$$V = [(A \wedge B) \wedge C] \Leftrightarrow [A \wedge (B \wedge C)] .$$

Řešení: Nyní máme tři základní výroky A, B a C. Proto tabulka bude mít $2^3 = 8$ řádků. V první polovině řádků pro výrok A píšeme jedničky (tj. v prvních čtyřech řádcích), ve druhé polovině řádků (5. až 8. řádek) nuly. U výroku B napíšeme jedničky do první a třetí čtvrtiny řádků (řádky 1, 2, 5 a 6) a nuly do druhé a čtvrté čtvrtiny řádků (řádky 3, 4, 7 a 8). U výroku C postupně střídáme jedničky a nuly, protože osmina řádků odpovídá jednomu řádku. Vyhodnotíme pravdivost jednotlivých výroků, z nichž se zadaný výrok skládá, a výsledky napíšeme do tabulky.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	V
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Výrok je tedy tautologie. Konkrétně se tomuto výroku říká asociativní zákon pro konjunkci.

Příklad 1.7. *Určete pravdivostní hodnoty výroku* $V = [\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Řešení: Vyplníme tabulku pro dva základní výroky.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	V
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Dostáváme opět tautologii, tento výrok se nazývá De Morganův zákon.

Příklad 1.8. *Určete pravdivostní hodnoty výroku*

$$V = [A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)] .$$

Řešení: Vyplníme tabulku pro tři výroky.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	V
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Také jde o tautologii, výrok se nazývá distributivním zákonem.

Příklad 1.9. *Určete pravdivostní hodnoty výroku*

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \wedge (C \Rightarrow A)] .$$

Řešení: Vyplníme tabulku pro tři výroky. Označíme si $V_1 = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$ a $V_2 = (A \vee B) \wedge (C \Rightarrow A)$.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Leftrightarrow C$	V_1	$A \vee B$	$C \Rightarrow A$	V_2	$V_1 \Rightarrow V_2$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0

Dále zavedeme následující *kvantifikátory*.

$\forall$	pro každé
$\exists$	existuje
$\exists!$	existuje právě jedno

Jejich negace je vyjádřena následovně.

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall x : V(x)) &= \exists x : \neg V(x)\,, \\
\neg(\exists x : V(x)) &= \forall x : \neg V(x)\,, \\
\neg(\exists! x : V(x)) &= (\forall x : \neg V(x)) \vee (\exists \text{ alespoň dvě } x : V(x))\,,
\end{aligned}
$$

kde $V(x)$ je výrok.

Příklad 1.10. *Negujte výroky:*

a) Všichni žáci naší třídy prospěli.

b) Alespoň jeden účastník Tour de France má žlutý trikot.

c) Žádný můj pes není agresivní.

d) Právě jeden z nás dnes vyhraje.

e) Tropické teploty budou trvat nejvýše čtyři dny.

Řešení:

a) Alespoň jeden z žáků naší třídy neprospěl. (Pozor, negací není „Žádný z žáků naší třídy neprospěl.“; abychom usvědčili autora původního výroku ze lži, stačí nám najít jednoho žáka, který neprospěl.)

b) Žádný účastník Tour de France nemá žlutý trikot.

c) Alespoň jeden můj pes je agresivní.

d) Dnes nevyhraje nikdo z nás nebo vyhrají alespoň dva z nás.

e) Tropické teploty budou trvat více než čtyři dny.

Příklad 1.11. *Negujte výroky*

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 0$,

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta^* : f(x) \in U_\varepsilon$,
*(*Vysvětlení*: Výrazy U_δ^* a U_ε jsou množiny závisející na parametrech δ, resp. ε, f je funkce proměnné x.)*

Řešení:

a) $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 + x \leq 0$,

b) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in U_\delta^* : f(x) \notin U_\varepsilon$,

1.2 Množiny

Definice 1.12. Množina *je soubor libovolných navzájem různých objektů, jenž je chápán jako jeden celek. Každému z těchto objektů říkáme* prvek množiny. *Značíme $a \in A$ (a je prvkem množiny A), $a \notin A$ (a není prvkem množiny A). Prázdnou množinu značíme $\emptyset$.*

Rozlišujeme následující typy vztahů mezi množinami. (Zde U je množina všech prvků.)

	značení	zápis pomocí výroků
inkluze	$A \subset B$	$\forall x \in U : x \in A \Rightarrow x \in B$
rovnost množin	$A = B$	$\forall x \in U : x \in A \Leftrightarrow x \in B$
ostrá inkluze	$A \subsetneq B$	$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B$
sjednocení množin	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$
průnik množin	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$
rozdíl množin	$A \backslash B$, $A - B$	$A \backslash B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$
doplněk množiny	$A' = U \backslash A$	

Jednotlivé vztahy jsou graficky znázorněny na obr. 1. Tyto grafy se nazývají Vennovy diagramy.

Příklad 1.13. *Pomocí Vennových diagramů dokažte* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Řešení: Viz obr. 2. Výsledná množina je v obou případech znázorněna vodorovným šrafováním. Vidíme, že výsledek vlevo i vpravo je stejná množina.

Příklad 1.14. *Pomocí Vennových diagramů zjednodušte* $[C \cup (A \cap C)] \cup [A \cup [B \cap (A \cup B)]]$.

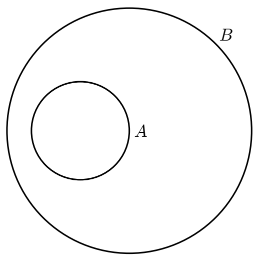
Řešení: Viz obr. 3. Na levém obrázku (obr. 3a) je šikmým šrafováním znázorněna množina $C \cup (A \cap C)$, která je totožná s množinou C. Na pravém obrázku (obr. 3b) je šikmým šrafováním množina $A \cup [B \cap (A \cup B)]$, která je totožná s množinou $A \cup B$. Sjednocení obou množin je $A \cup B \cup C$.

Příklad 1.15. *Pomocí Vennových diagramů dokažte* $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

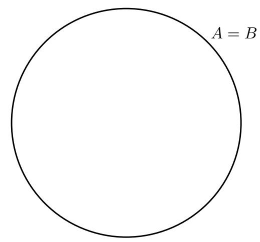
Řešení: Viz obr. 4. Na levém obrázku 4a je znázorněn průnik $A \cap B$, nešrafovaná část je tedy $(A \cap B)'$. Na pravém obrázku 4b je vodorovně vyšrafována množina A' a svisle množina B'. Množina, která je vyšrafována alespoň jedním způsobem, je $A' \cup B'$. Vidíme, že obě zadané množiny se rovnají.

Příklad 1.16. *Pomocí Vennových diagramů dokažte* $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$.

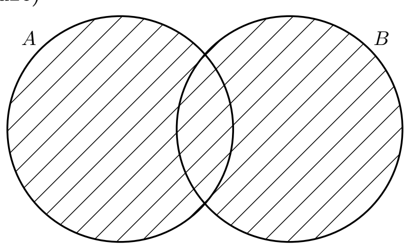
Řešení: Viz obr. 5. Na levém obrázku 5a je šikmým šrafováním znázorněna množina $A \cup B$ a vodorovným šrafováním množina $C \backslash (A \cup B)$. Na pravém obrázku 5b je vodorovným šrafováním vyznačena množina $C \backslash B$ a svislým $C \backslash A$, oběma typy šrafování zároveň je znázorněna množina $(C \backslash A) \cap (C \backslash B)$. Zadané množiny se rovnají.



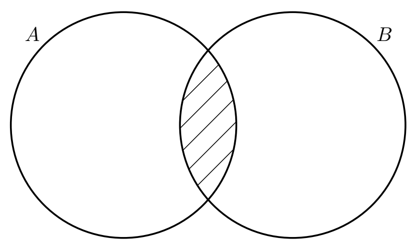
(a) Inkluze množin (konkrétně ostrá inkluze)



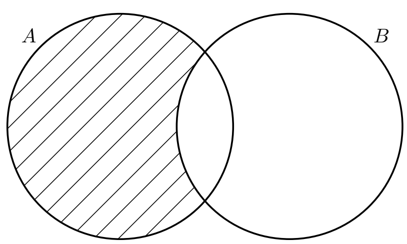
(b) Rovnost množin



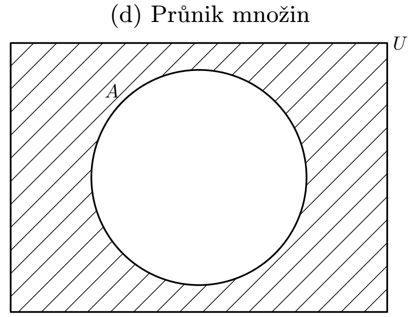
(c) Sjednocení množin



(d) Průnik množin

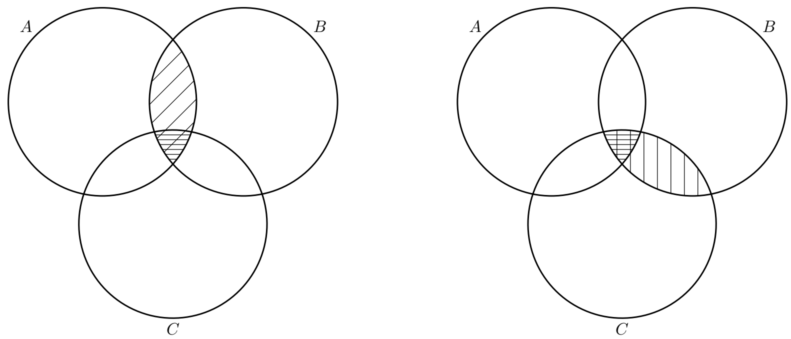


(e) Rozdíl množin



(f) Doplněk množiny

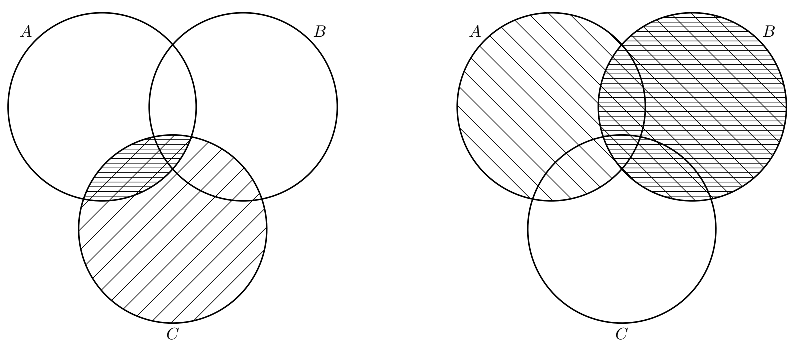
Obrázek 1: Vennovy diagramy: definice množinových pojmů



(a) Šikmé šrafování: $A \cap B$,
vodorovné šrafování: $(A \cap B) \cap C$.

(b) Svislé šrafování: $B \cap C$,
vodorovné šrafování: $A \cap (B \cap C)$.

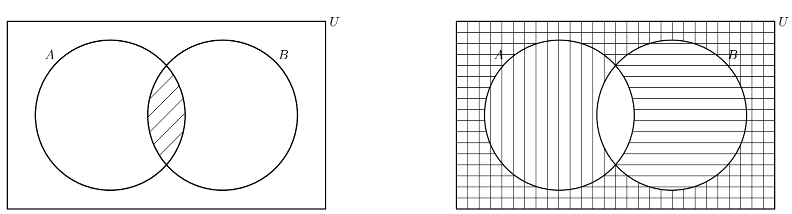
Obrázek 2: Vennovy diagramy k příkladu 1.13



(a) Vodorovné šrafování: $A \cap C$,
šikmé šrafování: $C \cup (A \cap C)$.

(b) Vodorovné šrafování: $B \cap (A \cup B)$,
šikmé šrafování: $A \cup [B \cap (A \cup B)]$.

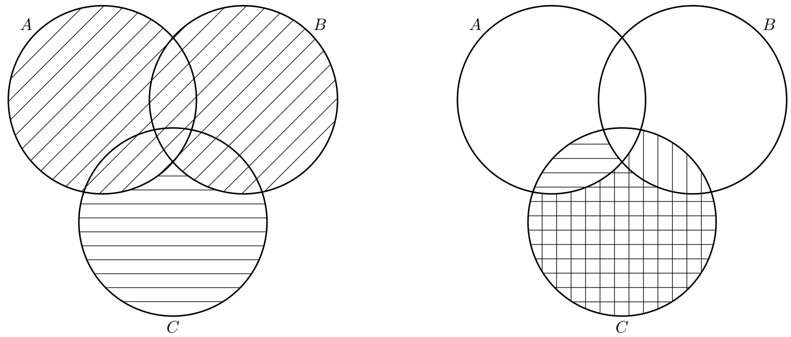
Obrázek 3: Vennovy diagramy k příkladu 1.14



(a) Šikmé šrafování: $A \cap B$,
bez šrafování: $(A \cap B)'$.

(b) Vodorovné šrafování: A',
svislé šrafování: B'.

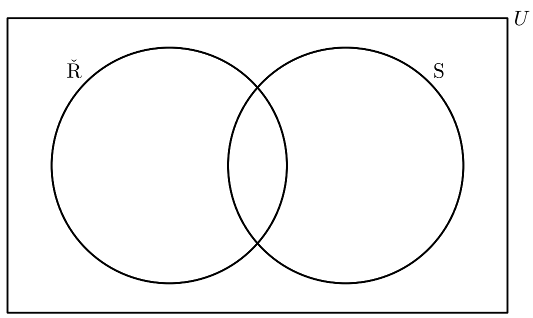
Obrázek 4: Vennovy diagramy k příkladu 1.15



(a) Šikmé šrafování: $A \cup B$,
vodorovné šrafování: $C \backslash (A \cup B)$.

(b) Vodorovné šrafování: $C \backslash B$,
svislé šrafování: $C \backslash A$.

Obrázek 5: Vennovy diagramy k příkladu 1.16



Obrázek 6: Vennův diagram pro příklad 1.17

Příklad 1.17. *Malá firma má 25 zaměstnanců, z toho 12 má řidičský průkaz a 8 má svářečský průkaz. 10 zaměstnanců nevlastní ani jeden z průkazů. Kolik zaměstnanců má řidičský a svářečský průkaz zároveň?*

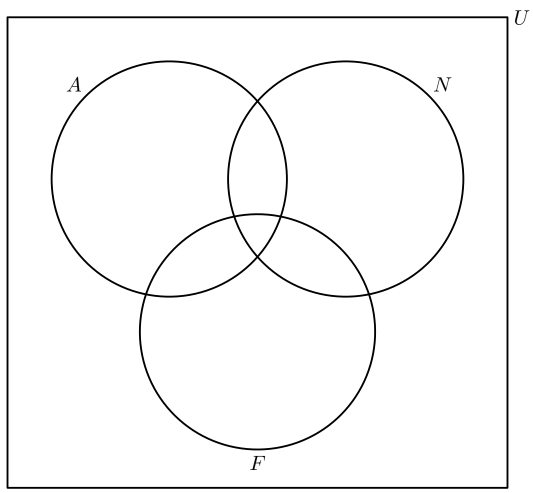
Řešení: Můžeme použít Vennův diagram na obr. 6. Množina $\check{R}$ označuje zaměstnance s řidičským průkazem, množina S se svářečským průkazem. Množina U je množinou všech zaměstnanců.

Shrneme si zadané údaje. Velikost množiny U je $|U| = 25$, pro množiny $\check{R}$ a S máme $|\check{R}| = 12$ a $|S| = 8$. Nakonec máme zadán i počet zaměstnanců bez průkazu $|U \backslash (\check{R} \cup S)| = 10$. Odsud máme $|\check{R} \cup S| = 25 - 10 = 15$. Odsud dostáváme

$$|S \backslash \check{R}| = |(\check{R} \cup S) \backslash \check{R}| = 15 - 12 = 3\,,$$
$$|\check{R} \backslash S| = |(\check{R} \cup S) \backslash S| = 15 - 8 = 7\,.$$

Konečně

$$|\check{R} \cap S| = |(\check{R} \cup S) \backslash [(\check{R} \backslash S) \cup (S \backslash \check{R})]| = 15 - 7 - 3 = 5\,.$$



Obrázek 7: Vennův diagram pro příklad 1.18

Oba průkazy zároveň má tedy 5 zaměstnanců.

Příklad 1.18. *Ve třídě je 30 žáků. 20 z nich hovoří anglicky, 11 německy a 10 francouzsky. Angličtinu a němčinu zároveň ovládá 5 žáků, angličtinu a francouzštinu 6 žáků a němčinu a francouzštinu 3 žáci. 2 žáci se domluví všemi třemi jazyky. Určete, kolik žáků neovládá ani jeden ze zmíněných jazyků.*

Řešení: Množinu všech žáků si označíme U, množinu anglicky mluvících A, německy mluvících N a francouzsky mluvících F (viz obr. 7).

Naším cílem je určit počet prvků množiny $|U \setminus (A \cup N \cup F)|$. Jako první odhad na počet prvků množiny $|A \cup N \cup F|$ můžeme sečíst počty prvků jednotlivých množin ($|A| + |N| + |F|$). Tím ale započítáme prvky v jejich průnicích vícekrát. Můžeme to částečně opravit tím, že od výrazu odečteme počty prvků průniků množin A, N a F. Výraz $|A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F|$ započítá správně žáky hovořící pouze jedním jazykem i žáky hovořící právě dvěma jazyky (např. žáci hovořící anglicky a německy, kteří neumí francouzsky, jsou dvakrát přičteni – v množinách A a N – a jednou odečteni – v množině $A \cap N$). Daným výrazem je špatně spočtena pouze skupina žáků hovořících všemi třemi jazyky. Ti jsou třikrát přičteni a třikrát odečteni. Proto k výrazu přidáme $|A \cap N \cap F|$ a dostáváme rovnost

$$|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F|\,.$$

Dosazením máme

$$|A \cup N \cup F| = 20 + 11 + 10 - 5 - 6 - 3 + 2 = 29\,.$$

Počet prvků hledané množiny tedy je

$$|U \setminus (A \cup N \cup F)| = |U| - |A \cup N \cup F| = 30 - 29 = 1\,.$$

Pouze jeden žák neumí ani jeden ze zmíněných jazyků.

1.3 Kartézský součin

Definice 1.19. *Nechť jsou dány množiny A a B. Kartézský součin těchto množin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic (x_1, x_2) prvků $x_1 \in A$, $x_2 \in B$. Kartézským součinem množin M_1, M_2, $\ldots M_n$ rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2, \ldots$, $x_n \in M_n$, a značíme ji $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$. Počet prvků kartézského součinu množin A a B je dán vztahem $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Obdobně $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|$.*

Příklad 1.20. *Najděte kartézský součin množin $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{b, c, d\}$.*

Řešení: Postupujeme podle definice, tedy napíšeme množinu všech uspořádaných dvojic prvků, z nichž první je z množiny A a druhý z množiny B.

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\} .$$

1.4 Zobrazení

Definice 1.21. *Přiřadíme-li každému prvku $x \in A$ právě jeden prvek $y \in B$, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x, y) \in A \times B$, která se nazývá* zobrazení *množiny A do množiny B. Prvek x je* vzor *prvku y a prvek y je* obraz *prvku x. Množina A je* definiční obor *zobrazení F a značí se $D(F)$. Množina všech obrazů F se nazývá obor hodnot zobrazení F, značí se $H(F)$ a platí $H(F) \subset B$. Speciálně mluvíme o*

a) Pokud $A = B$, je F zobrazením A do sebe.

b) Pokud $B = H(F)$, mluvíme o zobrazení množiny A na *množinu B.*

c) Jestliže v zobrazení F je každý prvek $y \in H(F)$ obrazem právě jednoho prvku $x \in A = D(F)$, pak je F prosté zobrazení. *Pak existuje inverzní zobrazení F^{-1} s $D(F^{-1}) = H(F)$, $H(F^{-1}) = D(F)$, $x = F^{-1}y$.*

Dále můžeme definovat skládání zobrazení. *Nechť jsou dána zobrazení $G : A \to B$, $F : B_1 \to C$, $H(G) \subset B_1$. Pak můžeme každému prvku $x \in A$ přiřadit prvek $y \in C$ předpisem $y = F(G(x))$. Složené zobrazení značíme $F \circ G$.*

Příklad 1.22. *Každému celému číslu přiřadíme jeho absolutní hodnotu. Určete, zda jde o prosté zobrazení.*

Řešení: O prosté zobrazení se nejedná. Například číslům -1 a 1 je přiřazeno stejné číslo 1. Dvěma různým vzorům je tedy přiřazen jeden obraz.

Příklad 1.23. *Každému přirozenému číslu přiřadíme jeho druhou mocninu. Určete, zda jde o prosté zobrazení.*

Řešení: V tomto případě jde o prosté zobrazení. Druhé mocniny přirozených čísel se zvyšujícími se hodnotami těchto čísel rostou. Nenastane tedy, aby dvě různá přirozená čísla měla stejnou druhou mocninu.

1.5 Literatura

Teorii lze nalézt např. v [9], příklady k procvičení jsou např. v [10]. Výrokovou logiku i výklad množin lze nalézt v [8]. Seznam tautologií najdete na stránce [3]. Použít můžete také detailnější výuková videa [4].

1.6 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 1.24. *Určete, zda jde o výroky.*

a) *Derivace funkce.*

b) $4 \cdot 6 \geq 8$.

c) *Řešte rovnici* $\sin x = 0$ *v oboru reálných čísel.*

d) *Na Marsu existuje život.*

e) *Je pět hodin.*

f) *Hurá!*

Příklad 1.25. *Dokažte, že následující výrok je tautologie (stále pravdivý výrok)*

a)
$$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)\,,$$

b)
$$[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]\,,$$

c)
$$[(A \vee B) \vee C] \Leftrightarrow [A \vee (B \vee C)]\,,$$

d)
$$[\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow [\neg A \vee \neg B]\,.$$

Příklad 1.26. *Určete, kdy je výrok pravdivý.*

$$[(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee C)] \wedge [(A \Leftrightarrow B) \vee (B \wedge C)]\,.$$

Příklad 1.27. *Negujte výrok*

$$\forall (x \in M) \exists (y \in N) : [(A(x,y) \Rightarrow B(x)) \wedge \forall (z \in K) : (C(x,y,z) \vee D(x,z))]\,.$$

Příklad 1.28. *V obchodních podmínkách banky se objevila pasáž:*
„Poplatek za vedení karty
a) Vedení hlavní karty (měsíčně) – 29 Kč v případě, že celkový bezhotovostní objem zaúčtovaných plateb danou debetní kartou vydanou k mKontu (do objemu se počítají všechny hlavní debetní karty vydané na jméno majitele účtu) v daném měsíci bude nižší než 1 500 Kč nebo držitel debetní karty není vlastníkem

úvěrového produktu u mBank (půjčka, hypotéka, kreditní karta nebo povolené přečerpání)...“.

Banka tím chtěla říct, že poplatek za debetní kartu neplatíte v případě, že s ní utratíte v daném měsíci 1 500 Kč a více nebo vlastníte kreditní kartu (případně jiný úvěrový produkt). Navrhněte malou změnu těchto obchodních podmínek, aby tuto skutečnost vystihovaly.

Příklad 1.29. *Pomocí Vennových diagramů ověřte, že*

a)
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,,$$

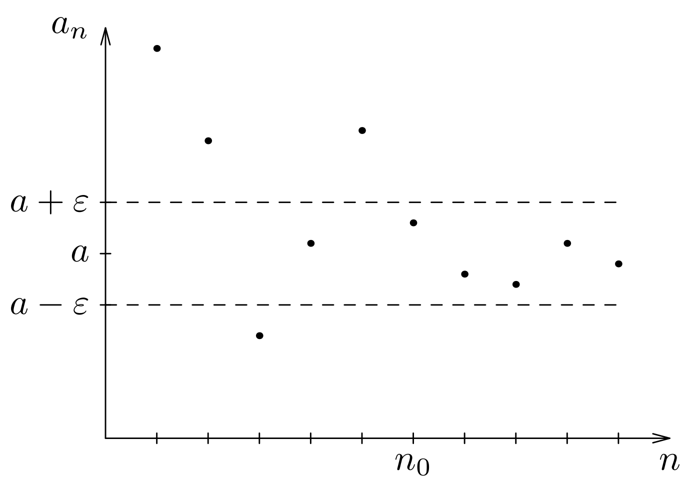
b)
$$(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B\,.$$

Příklad 1.30. *Určete kartézský součin $A \times B$ množin $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.*

Příklad 1.31. *Určete, zda jde o prosté zobrazení.*

a) Každému občanu x naší republiky přiřadíme jedno celé číslo y, udávající jeho věk (počet let).

b) Každý z návštěvníků kina odložil svůj kabát v šatně, takže každý kabát y je přiřazen právě jednomu návštěvníkovi x.



Obrázek 8: Ilustrace definice vlastní limity posloupnosti

2 Posloupnost a její limita

V této sekci se budeme věnovat posloupnosti reálných nebo komplexních čísel.

2.1 Teorie

Definice 2.1. *Posloupností reálných (komplexních) čísel rozumíme zobrazení množiny přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *do množiny reálných (komplexních) čísel* $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$*. Číslo přiřazené přirozenému číslu* n *značíme* a_n *a nazýváme jej* n*-tým členem posloupnosti. Značíme* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vidíme tedy, že posloupnost je druhem funkce (vizte následující sekci), pouze definovanou v (nekonečně mnoha) bodech. Jednou z důležitých vlastností posloupnosti je, zda existuje číslo, ke kterému se členy posloupnosti blíží.

Definice 2.2. *Číslo* a *nazýváme vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, jestliže platí:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*. Říkáme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je* konvergentní *a má limitu* a*. Nemá-li vlastní limitu, pak je* divergentní*.*

Definice výše je plná kvantifikátorů a může být pro čtenáře, který operace s nimi nemá zažité, nepřehledná. Definici proto ilustruje obr. 8. Předpokládejme, že tvrdíme, že posloupnost a_n má limitu a. Přijde „nepřítel“ a zadá nám malé kladné ε. My musíme najít nějaké n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ všechny členy posloupnosti a_n (tedy stále nekonečně mnoho členů) budou uvnitř intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Nepřítel prohodí, že to jím zadané ε bylo pořád příliš velké, a zadá nám menší ε. Logicky se nyní do intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ vejde méně členů.

Našim cílem je opět najít nějaké n_0 (obecně jiné než v předchozím případě), pro které všechny členy a_n s indexy $n \geq n_0$ patří do uvedeného intervalu. Když se nám takové n_0 podaří nalézt pro libovolně malé kladné ε, dokázali jsme, že limitou posloupnosti a_n je a. Poznamenejme, že z toho, že limita posloupnosti a_n je a, nutně neplyne, že by některý z jejích členů byl roven a.

Následující věta dává návod na výpočet limity posloupnosti komplexních čísel.

Věta 2.3. *Posloupnost komplexních čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $c_n = a_n + ib_n$, konverguje, právě tehdy když konvergují posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Její limita je $c = a + bi$, kde a a b jsou limity příslušných posloupností.*

Bolzanova-Cauchyho podmínka nám dává kritérium, které je pro reálné nebo komplexní posloupnosti ekvivalentní konvergenci posloupnosti. Stačí dokázat, že pro dané ε existuje n_0 takové, že libovolné dva členy posloupnosti s indexy většími nebo rovny n_0 si jsou ε-ově blízko.

Věta 2.4. *(Bolzanova-Cauchyho podmínka)*
Posloupnost reálných (komplexních) čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \,.$$

Bolzanova-Cauchyho podmínka vlastně říká, že v prostoru reálných (komplexních) čísel „nejsou díry“ (správně matematicky: je to úplný prostor). Kdybychom naopak uvažovali např. posloupnost racionálních čísel splňujících uvedenou podmínku, mohlo by se stát, že bychom její limitu jako racionální číslo nenašli.

Nyní se budeme věnovat situaci, kdy posloupnost „utíká do nekonečna“.

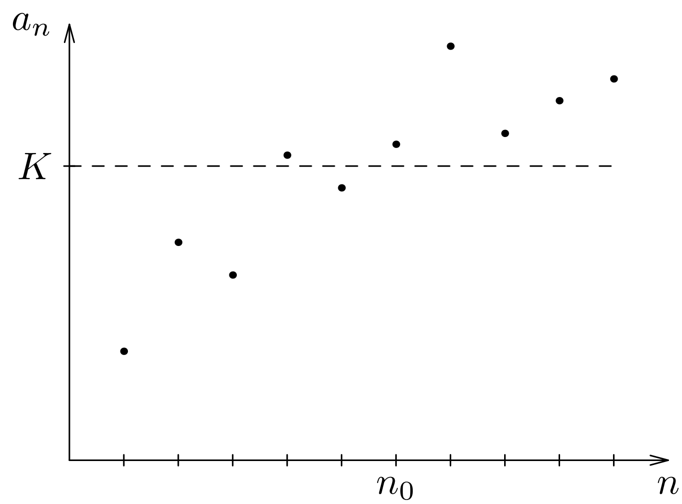
Definice 2.5. *Řekneme, že reálná posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$ ($-\infty$), jestliže*

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \; a_n \geq K \quad (a_n \leq K) \,.$$

Nemá-li posloupnost ani vlastní, ani nevlastní limitu, řekneme, že je oscilující.

Definice nevlastní limity je hodně podobná definici vlastní limity, pouze místo intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ zde máme hranici, kterou musíme velikostí členů posloupnosti překonat (vizte obr. 9). Použijeme znovu příklad s „nepřítelem“. Tvrdíme, že limita posloupnosti a_n je $+\infty$. Nepřítel zadá určité reálné číslo K. My musíme najít takový index n_0, aby všechny členy posloupnosti s indexy většími nebo rovny n_0 byly větší než K. Nepřítel poté zadá větší K a my najdeme odpovídající n_0. Jsme-li schopní najít n_0 s uvedenou vlastností pro libovolně velké K, dokázali jsme, že limita posloupnosti je $+\infty$. Obdobně postupujeme pro posloupnost jdoucí do $-\infty$, zde pouze dokazujeme, že členy jsou od určitého indexu menší než K.

Věta 2.6. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. Limita nezávisí na konečném počtu členů posloupnosti.*



Obrázek 9: Ilustrace definice nevlastní limity posloupnosti

Následující věta nám říká, jak pracovat s nekonečny. Zároveň ukazuje výrazy, které nejsou definovány. Velká část příkladů na limity bude vést právě na tyto nedefinované výrazy a vhodnou úpravou výrazů se budeme snažit limity vypočítat.

Věta 2.7. *Platí:*

$$\frac{A}{\pm\infty} = 0\,, \quad A \in \mathbb{R}\,,$$
$$A \cdot \infty = \begin{cases} +\infty & A > 0 \\ -\infty & A < 0 \end{cases}\,,$$
$$+\infty + \infty = (+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\,,$$
$$-\infty - \infty = (+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty\,.$$

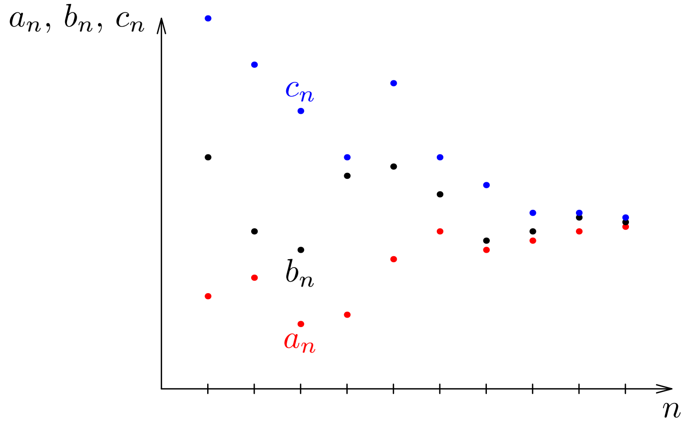
Nejsou definovány výrazy: $(\pm\infty)\cdot 0$, $+\infty - \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Věta, která se někdy označuje jako „věta o dvou policajtech“ dává návod, jak určit limitu posloupnosti pomocí známých limit dvou posloupností, jejichž členy jsou větší/menší než členy zkoumané posloupnosti.

Věta 2.8. *(O dvou policajtech)*
Nechť pro reálné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 : \quad a_n \leq b_n \leq c_n\,.$$

Pak



Obrázek 10: Ilustrace věty o dvou policajtech (Věta 2.8 a))

a) Jestliže existují limity $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$*, pak existuje limita* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

b) Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*, pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

c) Jestliže $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$*, pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Bod a) této věty ilustruje obr. 10. Dva policisté (červený a modrý) se rozhodli chytit zločince (černý). Jdou proto tak, aby měli zločince stále mezi sebou a nenápadně se vzájemně přibližují. Když se setkají, bude zločinec stále mezi nimi, tedy bude polapen. Členy posloupnosti b_n se stále nacházejí mezi členy posloupnosti a_n a c_n. Pokud posloupnosti a_n a c_n konvergují a jejich limity se rovnají, konverguje i posloupnost b_n a její limita je rovná limitám zbývajících dvou posloupností. Obdobná jsou i tvrzení b) a c). Jsou-li členy posloupnosti a_n stále menší než členy posloupnosti b_n a zároveň posloupnost a_n má nevlastní limitu ∞, má stejnou nevlastní limitu i posloupnost b_n. Obdobně v případě limity $-\infty$.

Následující věta určuje vlastnosti limit.

Věta 2.9. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$*. Pak platí:*

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A\ + B\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A\ B\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}\,, \quad B \neq 0\,.$$

Definice 2.10. *Reálná posloupnost je* omezená*, je-li omezená množina jejích členů. Reálná posloupnost je* rostoucí *(*neklesající*), jestliže* $a_n < a_{n+1}$

$(a_n \leq a_{n+1})$ pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost je monotónní*, pokud je nerostoucí nebo neklesající.*

Další věta shrnuje vztah konvergence, omezenosti a monotonie posloupnosti.

Věta 2.11. *Každá konvergentní posloupnost je omezená. Každá monotónní posloupnost má v $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ limitu. Limita je vlastní, právě když je posloupnost omezená.*

Následují věty, které nám pomohou s výpočty limit. První věta shrnuje, jaký výsledek má limita podílu dvou polynomů. Druhá z nich dovoluje vypočítat limitu mocniny pomocí mocniny limity.

Věta 2.12. *Pro racionální lomenou posloupnost platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_p}{b_q}\right) \cdot \infty & : \quad p > q \\ \frac{a_p}{b_q} & : \quad p = q \\ 0 & : \quad p < q \end{cases} .$$

Věta 2.13. *Pro mocniny a odmocniny platí*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p ,$$

pokud $\lim_{n\to\infty} a_n$ *existuje a výraz má smysl; $p \in \mathbb{Q}$.*

Často využívanou větou je ta tvrdící, že limita součinu omezené funkce a funkce jdoucí k nule je nula.

Věta 2.14. *Jsou dány posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Je-li* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Věta 2.15. *Platí*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} .$$

Poslední věta může být na první pohled neintuitivní. Mohli bychom uvažovat následovně: $1/n$ jde k nule, 1 na libovolnou mocninu je stále 1, výsledek je tedy 1. Tato úvaha je ale chybná. Studujme příklad s úroky. Nechť banka výhodně slíbí poskytnout vám stoprocentní úrok s úročením jednou ročně. Po uplynutí jednoho roku budete mít na účtu dvojnásobek. Konkurenční banka však přijde s ještě výhodnější nabídkou: roční úrok zůstane stejný, ale úročit se bude dvakrát ročně. Po uplynutí půl roku budete mít na účtu $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$-násobek původní částky (po půl roce se zůstatek na účtu zvýší o 50 %), po celém roce $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$-násobek (na konci dalšího půl roku se zůstatek zvýší opět o 50 %, ale tentokráte už z částky, která byla na účtu po prvním zvýšení). Dostáváme tedy 2,25-násobek původní částky. Obdobně bychom při úročení třikrát za rok dospěli k $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$-násobku (přibližně 2,37-násobek), při úročení 10krát ročně k $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$-násobku (2,59-násobek), při úročení n-krát ročně k $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-násobku. Maximální částky bychom dosáhli, kdyby se úročilo téměř stále, v tomto případě problém vede na limitu v předchozí větě. Výsledný násobek je dán číslem e, tedy přibližně 2,718.

2.2 Příklady

Příklad 2.16. *Určete, zda je posloupnost* $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$ *rostoucí, klesající či ani jedno.*

Řešení: Z definice je posloupnost rostoucí (klesající) když $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Porovnáme proto člen posloupnosti s následujícím členem. Symbol $\lesseqqgtr$ nahradíme správnou nerovností, až po úpravě zjistíme, která nerovnost platí. Další člen posloupnosti je $a_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{2(n+1)+3} = \frac{n+3}{2n+5}$.

$$\begin{aligned}
a_n &\lesseqqgtr a_{n+1}\,, \\
\frac{n+2}{2n+3} &\lesseqqgtr \frac{n+3}{2n+5}\,, \\
(n+2)(2n+5) &\lesseqqgtr (n+3)(2n+3)\,, \\
2n^2+9n+10 &\lesseqqgtr 2n^2+9n+9\,, \\
1 &\lesseqqgtr 0\,.
\end{aligned}$$

Protože jsme při úpravách násobili kladnými čísly, případně odečítali čísla, jde o ekvivalentní úpravy, při kterých se znaménko nerovnosti nezmění. Neboť $1 > 0$, je také $a_n > a_{n+1}$, jde tedy o klesající posloupnost.

Příklad 2.17. *Určete, zda je posloupnost* $a_n = \frac{\sqrt{n^2+2}}{n+3}$ *rostoucí, klesající či ani jedno.*

Řešení: Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě. Nerovnost mezi dvěma následujícími členy si upravíme a zjistíme její znaménko. Víme, že $a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)^2+2}}{(n+1)+3} = \frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{n+4}$.

$$\begin{aligned}
a_n &\lesseqqgtr a_{n+1}\,, \\
\frac{\sqrt{n^2+2}}{n+3} &\lesseqqgtr \frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{n+4}\,, \\
(n+4)\sqrt{n^2+2} &\lesseqqgtr (n+3)\sqrt{n^2+2n+3}\,, \\
(n^2+8n+16)(n^2+2) &\lesseqqgtr (n^2+6n+9)(n^2+2n+3)\,, \\
n^4+8n^3+18n^2+16n+32 &\lesseqqgtr n^4+8n^3+24n^2+36n+27\,, \\
5 &\lesseqqgtr 6n^2+20n\,.
\end{aligned}$$

Nejdříve jsme vynásobili rovnici jmenovateli zlomků, poté jsme obě rovnice umocnili na druhou (v tomto případě je to ekvivalentní úprava, protože obě strany nerovnice jsou kladné). Následuje roznásobení výrazů a odečtení některých členů. Vidíme, že pro všechna přirozená n platí $5 < 6n^2 + 20n$, proto také $a_n < a_{n+1}$. Jedná se tedy o rostoucí posloupnost.

Příklad 2.18. *Určete, zda je posloupnost* $a_n = \frac{\sqrt{n^2+3}}{n+1}$ *rostoucí, klesající či ani jedno.*

Řešení: Postupujeme obdobně. Vypočteme $a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)^2+3}}{(n+1)+1} = \frac{\sqrt{n^2+2n+4}}{n+2}$. Poté dostáváme

$$\begin{aligned}
a_n &\lesseqgtr a_{n+1}\,,\\
\frac{\sqrt{n^2+3}}{n+1} &\lesseqgtr \frac{\sqrt{n^2+2n+4}}{n+2}\,,\\
(n+2)\sqrt{n^2+3} &\lesseqgtr (n+1)\sqrt{n^2+2n+4}\,,\\
(n^2+4n+4)(n^2+3) &\lesseqgtr (n^2+2n+1)(n^2+2n+4)\,,\\
n^4+4n^3+7n^2+12n+12 &\lesseqgtr n^4+4n^3+9n^2+10n+4\,,\\
2n+8 &\lesseqgtr 2n^2\,,\\
n+4 &\lesseqgtr n^2\,.
\end{aligned}$$

Všechny úpravy jsou ekvivalentní, protože jak jmenovatele, tak celé výrazy na obou stranách nerovnice jsou kladné. Pro $n = 1$ a $n = 2$ platí $n + 4 > n^2$, tedy i $a_n > a_{n+1}$. Oproti tomu pro $n \geq 3$ máme $n + 4 < n^2$, tedy i $a_n < a_{n+1}$. Posloupnost tedy není ani rostoucí, ani klesající. Do $n = 3$ je klesající, od tohoto členu je rostoucí.

Příklad 2.19. *Ilustrujte, že pro* $a_n = \frac{1}{n}$ *je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *doplněním následující tabulky, tj. nalezením vhodného* n_0 *takového, že pro všechna* $n \geq n_0$ *platí* $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$.

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1
n_0				

Řešení: Když hledáme číslo do prvního volného sloupce, řešíme rovnici $\frac{1}{n} < 0{,}1$. Jejím řešením je $n > 10$, nejmenším přirozeným číslem, které toto splňuje, je 11. Do tabulky však můžeme uvést i libovolné větší číslo. Obdobně postupujeme v dalších sloupcích.

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1
n_0	11	101	1001	10 001

Příklad 2.20. *Ilustrujte, že pro* $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ *je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *doplněním následující tabulky, tj. nalezením vhodného* n_0 *takového, že pro všechna* $n \geq n_0$ *platí* $|a_n - 1| < \varepsilon$.

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1
n_0				

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu. Pro $\varepsilon = 0{,}1$ máme

$$\begin{aligned} \left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| &< 0{,}1\,, \\ \left|\frac{1}{n+2}\right| &< 0{,}1\,, \\ n+2 &> 10\,, \\ n &> 8\,. \end{aligned}$$

Nejnižším přirozeným číslem, které můžeme napsat do tabulky, je 9. V dalších sloupcích pokračujeme obdobně.

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1
n_0	9	99	999	9 999

Příklad 2.21. *Ilustrujte, že pro $a_n = \log_{10} n$ je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ doplněním následující tabulky, tj. nalezením vhodného n_0 takového, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n > K$.*

K	1	2	10	1000
n_0				

Řešení: Pro $K = 1$ řešíme nerovnici

$$\begin{aligned} \log_{10} n &> 1\,, \\ n &> 10^1\,, \\ n &> 10\,. \end{aligned}$$

Vyhovuje např. číslo 11.

K	1	2	10	1000
n_0	11	101	$10^{10}+1$	$10^{1000}+1$

Příklad 2.22. *Ukažte, že posloupnost $a_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ není omezená a přitom její limita není ∞.*

Řešení: Pro sudá n je exponent ve výrazu pro a_n roven jedné, platí tedy $a_n = n$, $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Naopak pro lichá n je tento exponent roven -1, tedy $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 2m-1$, $m \in \mathbb{N}$. První z podposloupností (tj. vybraných posloupností) je neomezená, celá posloupnost a_n je tedy také neomezená. Limita však není ∞, protože např. pro $K = 1$ zde existuje pro každé n_0 nekonečně mnoho indexů $n \geq n_0$, pro které jsou členy posloupnosti menší než K. Tyto členy totiž patří do druhé podposloupnosti.

Příklad 2.23. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4+2n^2+6}{2n^3+n+7}$.

Řešení: Jak z čitatele, tak z jmenovatele vytkneme n^3, tj. nejvyšší mocninu vyskytující se ve jmenovateli, a pokrátíme.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4+2n^2+6}{2n^3+n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(4n+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}} = \infty\,.$$

Čitatel jde k nekonečnu, zatímco jmenovatel jde ke dvěma, výsledek je tedy nekonečno. Při určení limity čitatele a jmenovatele a následně jejich podílu používáme větu 2.9, pro operace s nekonečny větu 2.7. Lze také využít přímo větu 2.12.

Příklad 2.24. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n-2}{n-3n^2+4}$.

Řešení: Z čitatele i jmenovatel vytkneme n^2 a pokrátíme.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n-2}{n-3n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2n+3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(-3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}{-3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}} = -\infty\,.$$

Čitatel jde k nekonečnu, zatímco jmenovatel jde k -3, výsledek je tedy $-\infty$. Opět lze využít větu 2.12.

Příklad 2.25. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+4}{3n^3+2n+5}$.

Řešení: Opět z čitatele a jmenovatele vytkneme nejvyšší mocninu vyskytující se ve jmenovateli, tedy n^3, a následně ji zkrátíme.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+4}{3n^3+2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}{3+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}} = \frac{1}{3}\,.$$

Čitatel jde k 1, jmenovatel ke 3, výsledek je $\frac{1}{3}$. Obdobný výsledek dostáváme z věty 2.12.

Příklad 2.26. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2n^2+3n+1}{4n^6+2n^5+3n^2+n+6}$.

Řešení: Z čitatele a jmenovatele vytkneme n^6, člen s největší mocninou ve jmenovateli, a pokrátíme.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2n^2+3n+1}{4n^6+2n^5+3n^2+n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^5}+\frac{1}{n^6}\right)}{n^6\left(4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}+\frac{6}{n^6}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^5}+\frac{1}{n^6}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}+\frac{6}{n^6}} = 0\,.$$

Čitatel jde k nule, jmenovatel ke 4, proto je výsledek 0. Můžeme také využít větu 2.12.

Příklad 2.27. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4n+3}{3n^2-n+1}\right)^5$.

Řešení: Protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n+3}{3n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}$$

(postup je obdobný jako v předchozích příkladech), dostáváme z věty 2.13

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4n+3}{3n^2-n+1}\right)^5=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n+3}{3n^2-n+1}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}\,.$$

Příklad 2.28. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}+n+2}{n\sqrt[4]{n^3}+1}$.

Řešení: Z čitatele i jmenovatele vytkneme člen s největší mocninou ve jmenovateli, tedy $n\sqrt[4]{n^3}=n^{\frac{7}{4}}$, a pokrátíme.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}+n+2}{n\sqrt[4]{n^3}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{7}{4}}(n^{\frac{3}{2}-\frac{7}{4}}+n^{1-\frac{7}{4}}+2n^{-\frac{7}{4}})}{n^{\frac{7}{4}}(1+n^{-\frac{7}{4}})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^{-\frac{1}{4}}+n^{-\frac{3}{4}}+2n^{-\frac{7}{4}})}{1+n^{-\frac{7}{4}}}=0\,.$$

Čitatel jde k nule a jmenovatel k jedné, výsledek je tedy 0.

Příklad 2.29. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-1}+2}{\sqrt{2n^3+3}}$.

Řešení: Z čitatele i jmenovatele vytkneme člen s největší mocninou, tj. $n^{\frac{3}{2}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-1}+2}{\sqrt{2n^3+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1-n^{-3}}+2n^{-\frac{3}{2}})}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2+3n^{-3}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-n^{-3}}+2n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2+3n^{-3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Výraz $\sqrt{1-n^{-3}}$ jde k jedné (to dokážeme pomocí věty 2.13), tedy podle věty 2.9 čitatel jde k 1. Obdobně podle věty 2.13 jde jmenovatel k $\sqrt{2}$.

Příklad 2.30. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[4]{n^3}+1)\cos n!}{n}$.

Řešení: Využijeme Větu 2.14 o součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule. $\cos n!$ je omezená posloupnost, protože kosinus nabývá jen hodnot mezi -1 a 1. $\frac{(\sqrt[4]{n^3}+1)}{n}$ jde k nule.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[4]{n^3}+1)\cos n!}{n}=0\,.$$

Příklad 2.31. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^5+n+4)\sin\left(\frac{n^2}{n+7}\right)}{\mathrm{e}^n}$.

Řešení: Posloupnost $\sin\frac{n^2}{n+7}$ je omezená, protože funkční hodnoty sinu náleží intervalu [-1,1]. Zbylá posloupnost $\frac{(n^5+n+4)}{\mathrm{e}^n}$ jde k nule, neboť exponenciála roste rychleji než libovolná mocnina. Podle věty 2.14 je limita zadané posloupnosti nula.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^5+n+4)\sin\left(\frac{n^2}{n+7}\right)}{\mathrm{e}^n}=0\,.$$

Příklad 2.32. *Určete* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}$.

Řešení: Provedeme substituci $m=\frac{n}{a}$ $(n=ma)$ a výraz upravíme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{abm}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{ab}=\mathrm{e}^{ab}\,.$$

Využili jsme vět 2.13 a 2.15.

Příklad 2.33. *Určete* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}$.

Řešení: Zavedeme substituci $m=5n$, tedy $n=\frac{m}{5}$. Výraz upravíme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{5}}=\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{\frac{1}{5}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\mathrm{e}}\,.$$

Využili jsme vět 2.13 a 2.15.

Příklad 2.34. *Určete* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}$.

Řešení: Zvolíme substituci $m=\frac{n}{2}$, $n=2m$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{2m}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{2}.$$

Limita $\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}$ je rovna $\frac{1}{\mathrm{e}}$. To můžeme nahlédnout díky tomu, že na základě předchozích příkladů víme, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}^a$ pro $a>0$. Zobecněním této nerovnosti pro $a=-1$ dostaneme tento výsledek. Proto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\,.$$

Využili jsme vět 2.13 a 2.15.

Příklad 2.35. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^{n+1}}{4^n+5^n}$.

Řešení: Vytkneme 5^n na zkrátíme.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^{n+1}}{4^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(\frac{4^n}{5^n}-5\right)}{5^n\left(\frac{4^n}{5^n}+1\right)}=-5\,.$$

Protože $\frac{4^n}{5^n}$ jde k nule, jde čitatel k -5 a jmenovatel k 1 a 5^n se pokrátí.

Příklad 2.36. *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Řešení: Výraz vynásobíme zlomkem $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, tedy jedničkou a upravíme podle vztahu $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\,,$$

Neboť jmenovatel jde k nekonečnu.

Příklad 2.37. *Určete n-tý člen posloupnosti a její limitu.*

$$2;\frac{5}{4};\frac{10}{9};\frac{17}{16};\dots$$

Řešení: Jmenovatele zlomků v jednotlivých členech jsou 1, 4, 9, 16, tedy n^2. Čitatel je vždy o 1 větší než jmenovatel. n-tý člen posloupnosti tedy je $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1\,.$$

2.3 Literatura

Znění vět bylo převzato z nebo inspirováno učebnicí [6]; zmíněnou knihu doporučujeme jako pro další studium i jako zásobárnu příkladů. Další příklady lze nalézt např. v [2], doporučujeme také projít si všechny příklady v elektronických sbírkách [12, 7]. Pro podrobněji zpracovanou teorii s důkazy vět doporučujeme [5]. Použít můžete také detailnější výuková videa [4].

2.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 2.38. *Určete, zda je posloupnost* a_n *rostoucí, klesající či ani jedno.*

a) $a_n = \frac{2n+4}{n+1}$,

b) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}$.

Příklad 2.39. *Určete limitu a posloupnosti a doplňte tabulku tak, aby pro každé* $n \geq n_0$ *bylo* $|a_n - a| < \varepsilon$.

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1
n_0				

a) $a_n = \frac{2n-1}{2n+3}$,

b) $a_n = \frac{n^2+n+2}{(n+1)^2}$.

Příklad 2.40. *Dokažte, že limitou posloupnosti je $+\infty$ a doplňte tabulku tak, aby pro každé $n \geq n_0$ bylo $a_n > K$.*

K	1	2	10	1000
n_0				

a) $a_n = n + (-1)^n$,

b) $a_n = \sqrt{n}$.

Příklad 2.41. *Vypočtěte limity.*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n-2}{3n^3+2n^2-4n+1}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n^3+1}{2n^2+n+2}$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{n^2}$,

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{3^n-4^n}$,

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n}{(2n+1)(n^2+n+4)}\right)^3$,

f) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^{5n}$,

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+n^8+n}{5^n+3n^2} \cos\left(3^n\right)$,

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-4^n}{4^n+2^n} \sin\left(2^n\right)$,

i) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-2n)$,

j) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$,

Příklad 2.42. *Určete n-tý člen posloupnosti a její limitu*

a) $3; \frac{5}{2}; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \ldots,$

b) $1; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; \frac{27}{8}; \ldots,$

3 Funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce

3.1 Teorie

Začneme definicí funkce jedné proměnné.

Definice 3.1. *Reálnou (komplexní) funkcí jedné proměnné rozumíme zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Její definiční obor označujeme D_f a obor hodnot H_f.*

$$f(M) = \{y, y = f(x), x \in M\}$$

značíme obraz množiny M pomocí funkce f.

Jde tedy o předpis (zobrazení), který přiřadí každému reálnému číslu z definičního oboru reálné (případně u komplexní funkce komplexní) číslo, které patří do oboru hodnot. Uvedeme si několik příkladů funkcí.

Příklad 3.2. *Funkcemi jsou např.*

1. $D_f = \mathbb{N}$: *posloupnost*
2. $f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x + 1, \quad x \in [-1, 1]$
4. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Zadefinujeme zúžení a rozšíření funkce a graf funkce.

Definice 3.3. *f je* zúžením *g na D_f a g je* rozšířením *f na D_g, pokud $D_f \subset D_g$ a $f(x) = g(x)$ pro $x \in D_f$.*

Definice 3.4. *Grafem reálné (komplexní) funkce f se nazývá množina $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{C}$) definovaná předpisem $G_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$.*

Příklad 3.5. *Graf nemusí být zakreslený jednou čarou, příkladem může být tzv. Dirichletova funkce*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racionální} \\ 0 & x \text{ iracionální} \end{cases}.$$

Následující operace mezi funkcemi jsou asi čtenáři známé, pro úplnost je ale definujeme. Zápis znamená, že součtem dvou funkcí (tedy zobrazení) působících na dané x je definován jako součet dvou reálných čísel, které obdržíme jako působení těchto dvou funkcí na dané x.

Definice 3.6. *(součet, rozdíl, součin, podíl)*
Definujeme:

$$\begin{aligned} (f_1 \pm f_2)(x) &= f_1(x) \pm f_2(x)\,, \quad D_{f_1} \cap D_{f_2}\,, \\ (f_1 \cdot f_2)(x) &= f_1(x) \cdot f_2(x)\,, \quad D_{f_1} \cap D_{f_2}\,, \\ (f_1/f_2)(x) &= f_1(x)/f_2(x)\,, \quad D_{f_1} \cap D_{f_2} \backslash \{x, f_2(x) = 0\}\,. \end{aligned}$$

Podobně, jako jsme definovali složení zobrazení, definujeme také složení funkcí. Obdobně definujeme prostou a inverzní funkci.

Definice 3.7. *Nechť jsou f_1, f_2 reálné (komplexní) funkce, $M = \{x, x \in D_{f_1}, f_1(x) \in D_{f_2}\}$. Potom složenou funkcí $f_2 \circ f_1$ definujeme takto:*

$$D_{f_2 \circ f_1} = M\,, \quad (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))\,, \quad x \in M\,.$$

f_1 je vnitřní, f_2 je vnější funkce.

Definice 3.8. *Řekneme, že funkce f je prostá, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definice 3.9. *Je-li f prostá, pak funkcí k ní inverzní nazýváme funkci f^{-1} definovanou jako*

$$D_{f^{-1}} = H_f\,, \quad f^{-1}(y) = x_y\,, \quad \text{je} - \text{li } f(x_y) = y \text{ pro } y \in D_{f^{-1}}\,.$$

Definice 3.10. *Funkce je* sudá*, pokud pro $\forall x \in D_f$ platí $f(-x) = f(x)$; funkce je* lichá*, pokud pro $\forall x \in D_f$ platí $f(-x) = -f(x)$.*

Sudá funkce má graf symetrický podle osy y, lichá funkce symetrický podle počátku souřadnic.

3.2 Příklady

Příklad 3.11. *Určete definiční obor funkce $\frac{x+2}{x+3}$.*

Řešení: Jmenovatel funkce se nesmí rovnat nule, tedy

$$x + 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -3\,.$$

Zbývajících reálných hodnot x nabývat může. Definiční obor je tedy $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3\}$.

Příklad 3.12. *Určete definiční obor funkce $\sqrt{2-x}$.*

Řešení: Vnitřek odmocniny musí být nezáporný, proto

$$2 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2\,.$$

Definiční obor je $D_f = (-\infty, 2]$. Dvojka do definičního oboru patří, je u ní proto hranatá závorka (někdy se můžeme setkat se „špičatou“ závorkou).

Příklad 3.13. *Určete definiční obor funkce* $\ln(x-4)$.

Řešení: Logaritmus je definovaný pro kladná čísla, máme tedy

$$x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 4\,.$$

Definiční obor je $(4, \infty)$. Všimněte si, že nyní čtyřka do definičního oboru nepatří.

Příklad 3.14. *Určete definiční obor funkce* $\sqrt{x^2+6x+8}$.

Řešení: Nyní z nezápornosti argumentu odmocniny máme podmínku $x^2+6x+8 \geq 0$. Trojčlen si rozložíme, můžeme vyřešit kvadratickou rovnici podle vzorce nebo využít Viètových vztahů díky tomu, že $4+2=6$ a $2\cdot 4=8$. Máme $x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$. Kořeny tohoto trojčlenu tedy jsou -2 a -4. Reálnou osu si rozdělíme na intervaly $(-\infty,-4)$, $(-4,-2)$ a $(-2,\infty)$. V nich určíme znaménka jednotlivých výrazů například dosazením některého čísla z daného intervalu.

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$(x+4)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Vidíme, že výraz pod odmocninou je kladný v intervalech $(-\infty,-4)$ a $(-2,\infty)$. Protože pod odmocninou může být nula, zahrneme do definičního oboru i krajní body. Definiční obor tedy je $D_f=(-\infty,-4]\cup[-2,\infty)$.

Příklad 3.15. *Určete definiční obor funkce* $\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$.

Řešení: Argument logaritmu musí být kladný, proto $\frac{x-2}{x+1}>0$. Nyní si reálnou osu rozdělíme na intervaly $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ and $(2,\infty)$ a zjistíme na nich znaménko čitatele a jmenovatele.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-2}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Krajní body intervalů nezahrnujeme, protože chceme ostrou nerovnost. Definiční obor funkce tedy je $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$.

Příklad 3.16. *Určete definiční obor funkce* $\sqrt{x-4x^3}$.

Řešení: Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tedy $x-4x^3\geq 0$.

	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2},0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-2x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$1+2x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4x^3$	$+$	$-$	$+$	$-$

Výraz si rozložíme $x-4x^3=x(1-4x^2)=x(1-2x)(1+2x)$. Kořeny tedy jsou $\pm\frac{1}{2}$ a 0. Reálnou osu si tedy rozdělíme na intervaly $(-\infty,-\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},0)$,

$(0, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \infty)$. Určíme znaménka všech výrazů v daných intervalech. Krajní body do definičního oboru patří (nula může být pod odmocninou). Definiční obor je $D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, \frac{1}{2}]$.

Příklad 3.17. *Určete definiční obor funkce* $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$.

Řešení: Argument odmocniny musí být nezáporný, tedy $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$. Z rovnice $\log_{\frac{1}{2}} x = y$ plyne $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$. Protože y je kladné, může x nabývat hodnot od nuly (y blížící se nekonečnu) do jedné (y je nula). Jednička do definičního oboru patří (logaritmus z jedné je definovaný), zatímco nula do definičního oboru nepatří. Definiční obor je tedy $D_f = (0, 1]$.

Příklad 3.18. *Určete definiční obor funkce* $\ln \sin (2x + \pi)$.

Řešení: Argument logaritmu musí být kladný, máme tedy podmínku $\sin (2x + \pi) > 0$. Sinus je kladný pro argument v intervalu $(0+2n\pi, \pi+2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Dostáváme proto rovnici

$$\begin{aligned} 2x + \pi \in (0 + 2n\pi, \pi + 2n\pi) \qquad &\Rightarrow \qquad 2x \in (-\pi + 2n\pi, 2n\pi) \\ &\Rightarrow \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, n\pi\right) . \end{aligned}$$

Výsledný definiční obor je tedy sjednocením všech těchto intervalů

$$D_f = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, n\pi\right) .$$

Krajní body intervalů do definičního oboru nepatří, protože nula nemůže být argumentem logaritmu.

Příklad 3.19. *Určete definiční obor funkce* $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$.

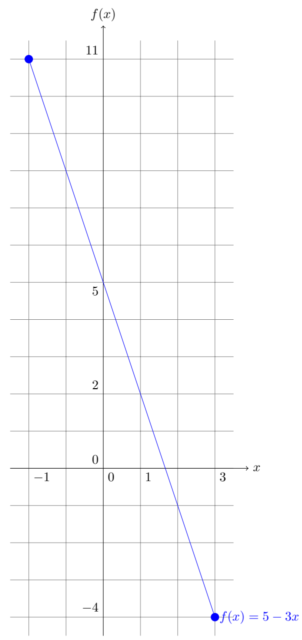
Řešení: Tangens není definovaný pro $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, kotangens pro $x = n\pi$. Výsledný definiční obor je reálná osa kromě sjednocení zmíněných bodů.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ n\frac{\pi}{2} \right\} .$$

Příklad 3.20. *Určete obor hodnot a načrtněte graf funkce* $f(x) = 5 - 3x$, $D_f = [-2, 3]$.

Řešení: Jedná se o přímku s nenulovou směrnicí, proto jde o prostou funkci. Určíme funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru. $f(-2) = 11$, $f(3) = -4$. Obor hodnot tedy je $H_f = [-4, 11]$. Graf funkce je na obr. 11. Z předpisu funkce zjistíme, že funkce protíná osu y v bodě $[0, 5]$ a při posunu o 1 na ose x se y-ová souřadnice sníží o 3. Alternativně můžeme vynést zjištěné krajní body a spojit je.

Příklad 3.21. *Určete obor hodnot a načrtněte graf funkce* $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $D_f = [-4, 1)$.



Obrázek 11: Graf funkce $f(x) = 5 - 3x$

Řešení: Zadaná funkce je parabola. Výraz upravíme na čtverec a najdeme vrchol paraboly.

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1\,.$$

Vrchol je tedy $[-2, -1]$. Nalezneme také body, ve kterých funkce protíná osou x. Vyřešíme odpovídající kvadratickou rovnici např. rozkladem podle Viètových vztahů: $0 = x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$. Hledané průsečíky s osou x jsou tedy $x = -1$ a $x = -3$.

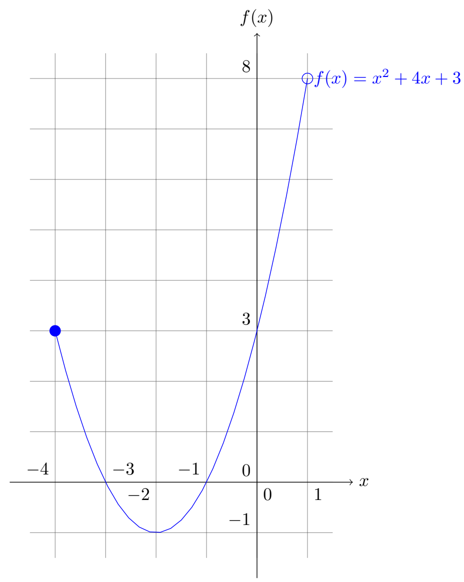
Funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru jsou $f(-4) = 3$, $f(1) = 8$. S využitím vypočteného vrcholu vidíme, že obor hodnot je $[-1, 8)$ (osmička do oboru hodnot nepatří, protože do definičního oboru nepatřilo číslo 1). Graf funkce je na obr. 12. Ke správnému vynesení funkce si můžeme určit některé její body.

Příklad 3.22. *Určete obor hodnot a načrtněte graf funkce* $f(x) = -2x^2+4x+3$, $D_f = (-1, 2)$.

Řešení: Výraz upravíme na čtverec

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 3 = -2(x^2 - 2x) + 3 = -2(x - 1)^2 + 2 + 3 = -2(x - 1)^2 + 5\,.$$

Vrchol tedy je $[1, 5]$. Před kvadratickým členem je minus, proto parabola bude „obrácena směrem dolů“. Funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru



Obrázek 12: Graf funkce $f(x) = x^2 + 4x + 3$

jsou $f(-1) = -3$, $f(2) = 3$. Obor hodnot je $(-3, 5]$. Číslo -3 do oboru hodnot nepatří, protože -1 nepatří do definičního oboru. Číslo 5 do oboru hodnot patří, protože je to souřadnice vrcholu. Můžeme určit souřadnice průsečíků s osou x jako řešení příslušné kvadratické rovnice.

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}\,.$$

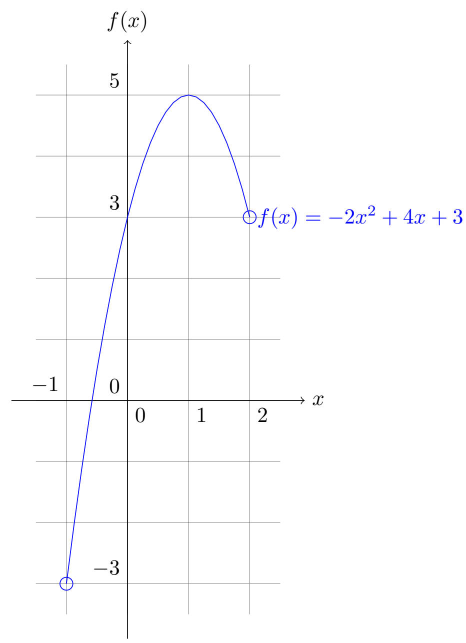
Kořen s kladným znaménkem nepatří do definičního oboru funkce, kořen se záporným znaménkem je přibližně roven $-0{,}6$. Průsečík s osou y určíme dosazením bodu $x = 0$ do předpisu funkce, nalezneme $y = 3$. Graf je na obr. 13.

Příklad 3.23. *Určete obor hodnot a načrtněte graf funkce* $f(x) = x^2 - x^4$, $D_f = [-1, 1]$.

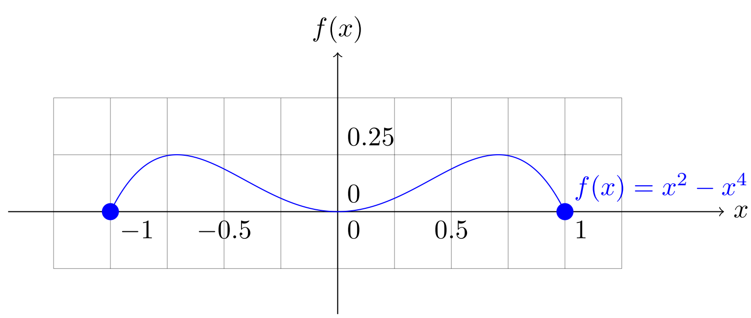
Řešení: Jedná se o polynom čtvrtého stupně. Předpis si upravíme.

$$x^2 - x^4 = -(x^4 - x^2) = -\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\,.$$

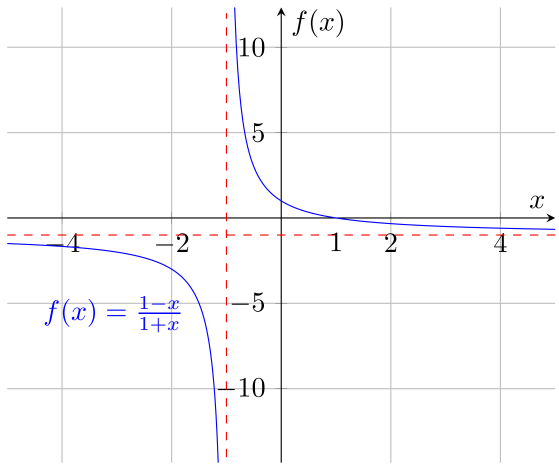
Odsud vidíme, že maximum funkce je $\frac{1}{4}$ a nabývá se v bodech $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. V krajních bodech definičního oboru je funkční hodnota $f(-1) = f(1) = 0$. Funkční hodnota v bodě $x = 0$ je také $f(0) = 0$. V dalších kapitolách si ukážeme metody, jak určit, že v žádném jiném bodě definičního oboru funkční hodnota nižší není. Obor hodnot je $[0, \frac{1}{4}]$. Graf je na obr. 14.



Obrázek 13: Graf funkce $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$



Obrázek 14: Graf funkce $f(x) = x^2 - x^4$



Obrázek 15: Graf funkce $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

Příklad 3.24. *Určete obor hodnot a načrtněte graf funkce* $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Řešení: Výraz si upravíme.

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-x-1+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}\,.$$

Řešením je tedy hyperbola $y = \frac{2}{x}$ posunutá o 1 dolů (to víme díky -1 před zlomkem) a o 1 doleva (výraz diverguje pro $x = -1$). Graf je znázorněn na obr. 15. Červenými čárkovanými čarami jsou znázorněny asymptoty. Obor hodnot je $H_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Můžeme také určit průsečík s osou x. Ten vypočítáme z rovnice, ve které funkční hodnotu položíme rovnou nule.

$$0 = -1 + \frac{2}{1+x} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{1+x} \quad \Rightarrow \quad 1+x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1\,.$$

Průsečík s osou y určíme tak, že dosadíme do funkční hodnoty $x = 0$. Pak $y = -1 + \frac{2}{1+0} = 1$.

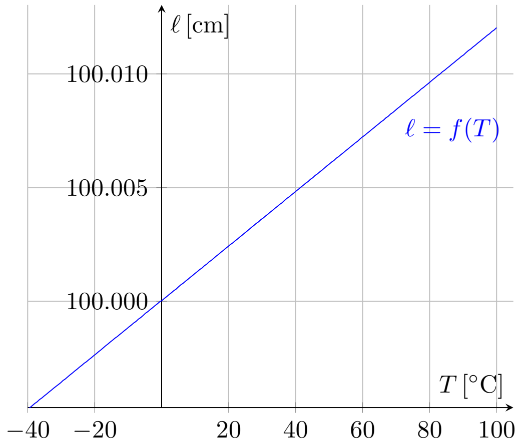
Příklad 3.25. *Teplotní součinitel délkové roztažnosti železa je* $a = 1{,}2{\cdot}10^{-6}\,(^\circ\mathrm{C})^{-1}$. *Sestrojte v odpovídajícím měřítku graf funkce*

$$\ell = f(T) \quad (-40^\circ\mathrm{C} \leq T \leq 100^\circ\mathrm{C})\,,$$

kde T *je teplota ve stupních Celsia a* ℓ *délka železné tyče při teplotě* T, *je-li* $\ell_0 = 100\,\mathrm{cm}$ *při* $T = 0^\circ\mathrm{C}$. *Závislost uvažujte lineární.*

Řešení: ℓ budeme vynášet v centimetrech a T ve stupních Celsia. Očekávaná závislost je $\ell = f(T) = AT + B$. Pro součinitel délkové roztažnosti platí $a = \frac{1}{\ell_0}\frac{\Delta\ell}{\Delta T}$, odsud máme $A = a\ell_0$. Pro zadané hodnoty dostáváme

$$A = 1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 100\,\mathrm{cm}(^\circ\mathrm{C})^{-1} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}(^\circ\mathrm{C})^{-1}\,.$$



Obrázek 16: Graf závislosti délky tyče na teplotě k příkladu 3.25.

Z podmínky při 0°C určíme $B = 100\,\text{cm}$. Hledaná funkce tedy je při zvolených jednotkách

$$\ell = f(T) = 1{,}2 \cdot 10^{-4}T + 100\,.$$

Graf je na obr. 16. K jeho sestrojení využijeme zadaného bodu pro nulovou teplotu a faktu, že při zvýšení teploty o 100 °C se délka tyče zvýší o 0,012 cm.

Příklad 3.26. *Nalezněte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \sin(x^2+1)$, $D_f = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}-1}, \sqrt{\pi-1}\right)$.

Řešení: Nejdříve si uvědomíme, že na zadaném definičním oboru je funkce f prostá, protože funkce sinus je na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ prostá. Inverze funkce je její převrácení podle přímky svírající s oběma osami úhel 45° nebo jinými slovy změna rolí x a y. Pro inverzní funkci platí $x = \sin(y^2+1)$. Nyní z rovnice vyjádříme úpravami y.

$$\begin{aligned} \arcsin x &= y^2 + 1 \\ \arcsin x - 1 &= y^2 \\ \sqrt{\arcsin x - 1} &= y \end{aligned}$$

Použijeme kladný kořen odmocniny, protože definiční obor funkce f je podmnožinou kladných reálných čísel, proto také obor hodnot inverzní funkce musí být kladný. Inverzní funkce je $f^{-1}(x) = \sqrt{\arcsin x - 1}$, definiční obor f^{-1} je roven oboru hodnot f, proto $D_{f^{-1}} = (0, 1)$.

Příklad 3.27. *Nalezněte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \frac{x}{3} - 1$, $D_f = \mathbb{R}$.

Řešení: Není těžké ověřit, že daná funkce je prostá na svém definičním oboru. Pro inverzní funkci platí $x = \frac{y}{3} - 1$ (zaměnili jsme x a y). Vyjádříme y.

$$x + 1 = \frac{y}{3} \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 3\,.$$

Hledaná inverzní funkce je tedy $f^{-1}(x) = 3x + 3$. Protože obor hodnot původní funkce bylo $\mathbb{R}$, je definičním oborem inverzní funkce $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Příklad 3.28. *Nalezněte inverzní funkci k funkci $f(x) = x^2 - x + 1$, $D_f = (-\infty, \frac{1}{2})$.*

Řešení: Můžeme nalézt vrchol kvadratické funkce, který je v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Proto vidíme, že funkce je na svém definičním intervalu prostá. Nyní určíme předpis pro inverzní funkci. Ta musí splňovat $x = y^2 - y + 1$. Vyřešením kvadratické rovnice $y^2 - y + 1 - x = 0$ najdeme y.

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 - x &= 0\,, \\ \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= x - \frac{3}{4}\,, \\ y - \frac{1}{2} &= -\sqrt{x - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Protože obor hodnot inverzní funkce je definičním oborem funkce f, obsahuje tedy čísla menší než $\frac{1}{2}$, bereme záporný kořen odmocniny. Odsud dostáváme pro inverzní funkci

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}\,.$$

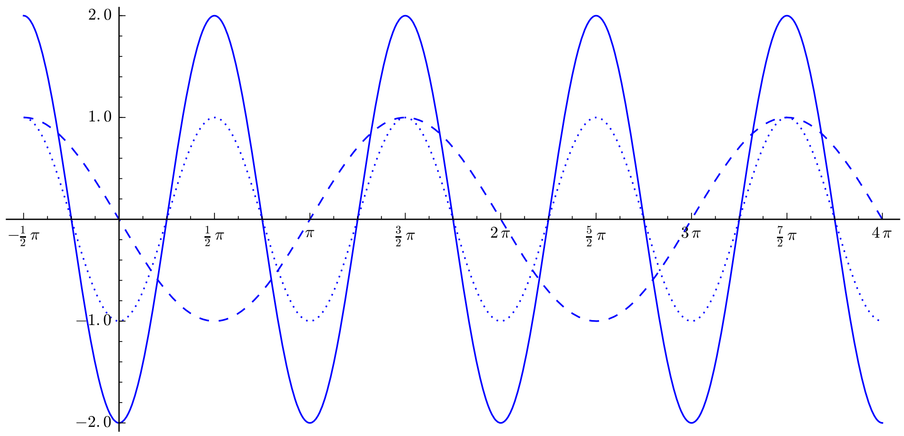
Její definiční obor je oborem hodnot původní funkce, tedy $D_{f^{-1}} = \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$.

Příklad 3.29. *Nalezněte inverzní funkci k funkci $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $D_f = (-4, -2]$.*

Řešení: Vrchol zadané kvadratické funkce je v bodě $[1, 4]$, funkce je tedy na uvedeném intervalu prostá (x-ová souřadnice vrcholu není uprostřed definičního oboru). Obor hodnot je $(-21, -5]$ (určili jsme ho podle funkčních hodnot v krajních bodech definičního oboru). Nyní úpravami určíme předpis pro inverzní funkci. Zaměníme x a y a vyjádříme y.

$$\begin{aligned} x &= -y^2 + 2y + 3\,, \\ -(y-1)^2 + 1 + 3 &= x\,, \\ -(y-1)^2 &= x - 4\,, \\ (y-1)^2 &= 4 - x\,, \\ y - 1 &= -\sqrt{4 - x}\,, \\ y &= 1 - \sqrt{4 - x}\,. \end{aligned}$$

Zvolili jsme záporný kořen odmocniny, protože definiční obor funkce f (a tedy obor hodnot funkce f^{-1}) je záporný. Hledaná inverzní funkce je $f^{-1} = 1 - \sqrt{4 - x}$, její definiční obor je $(-21, -5]$.



Obrázek 17: Graf funkce $f(x) = 2\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Příklad 3.30. *Nakreslete graf funkce* $f(x) = 2\cos(2x + \pi)$.

Řešení: Funkci si přepíšeme jako $f(x) = 2\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Nejdříve si vyneseme funkci $f_1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (v grafu na obr. 17 čárkovaně). Je to kosinus posunutý o $\pi/2$ doleva. Poté vyneseme $f_2 = \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (v grafu tečkovaně). Ten dostaneme tak, že argument vynásobíme dvěma, funkce bude tedy oscilovat dvakrát rychleji. V $-\pi/2$ bude funkční hodnota stejná jako u funkce f_1, tedy 1. Nyní už zbývá vynést funkci f (plnou čarou). Tu dostaneme tak, že všechny funkční hodnoty funkce f_2 zvýšíme dvakrát.

Příklad 3.31. *Nakreslete graf funkce* $f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ *a určete periodu této funkce.*

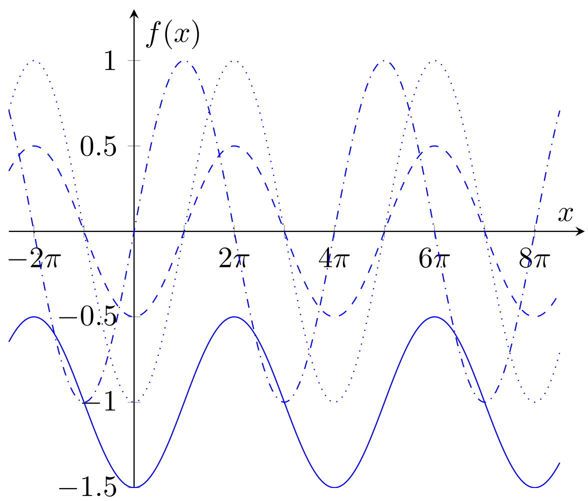
Řešení: Výraz pro funkci si upravíme

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right).$$

Graf funkce je vyznačen v obr. 18. Čerchovaně je vyznačena funkce $\sin\frac{x}{2}$. Protože jde o sinus polovičního argumentu, jde o „roztažený“ sinus, tedy s periodou 4π. Tečkovanou čarou je vyznačena funkce $\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$. Jde o předchozí funkci posunutou o π doprava (změnou $x \to x + \pi$ dostaneme předchozí funkci). Čárkovaně je vyznačena funkce $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$. Tu dostaneme tak, že u tečkované funkce vydělíme funkční hodnoty dvěma. A konečně vyznačíme (plnou čarou) hledanou funkci f. Dostaneme ji posunutím čárkované funkce o 1 dolů.

Perioda funkce je 4π.

Příklad 3.32. *Určete, zda funkce* $f(x) = 2 + 3x^2 + 5x^4$ *je sudá funkce, lichá funkce či ani jedno.*



Obrázek 18: Graf funkce $f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$.

Řešení: Určíme funkční hodnotu v $-x$ a upravíme.

$$f(-x) = 2 + 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 2 + 3x^2 + 5x^4 = f(x)\,.$$

Funkce je tedy sudá.

Příklad 3.33. *Určete, zda funkce $f(x) = x(x^2 + \cos x)$ je sudá funkce, lichá funkce či ani jedno.*

Řešení: Určíme si funkční hodnotu v $-x$

$$f(-x) = -x((-x)^2 + \cos(-x)) = -x(x^2 + \cos x) = -f(x)\,.$$

Funkce je tedy lichá.

Příklad 3.34. *Určete, zda funkce $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ je sudá funkce, lichá funkce či ani jedno.*

Řešení: Opět určíme funkční hodnotu v $-x$.

$$f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{1+x}{1-x} \neq \frac{1-x}{1+x}$ a $\frac{1+x}{1-x} \neq -\frac{1-x}{1+x}$, nejde ani o sudou, ani o lichou funkci.

Příklad 3.35. *Určete, zda funkce $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ je sudá funkce, lichá funkce či ani jedno.*

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech.

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)} = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{+x} = -(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = -f(x)\,.$$

Funkce je lichá.

3.3 Literatura

Pro studium a jako zásobárnu příkladů doporučujeme zejména [6, 2, 12, 7]. Protože velká část této sekce je opakováním ze střední školy, jde využít také libovolnou středoškolskou učebnici. Použít můžete také detailnější výuková videa [4].

3.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 3.36. *Určete definiční obory funkcí*

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$,

b) $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+7}}$,

c) $f(x) = \ln(\cos x)$.

Příklad 3.37. *Určete obor hodnot funkcí a načrtněte jejich grafy*

a) $f(x) = 6 - 2x\,, \quad D_f = [-1, 4)$,

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 3\,, \quad D_f = (-3, 1)$,

Příklad 3.38. *Nalezněte inverzní funkci k následující funkci a její definiční obor*

a) $f(x) = x^2 + x - 2\,, \quad D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$,

b) $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1} + 4\,, \quad D_f = (-1, \infty)$.

Příklad 3.39. *Načrtněte graf funkcí*

a) $f(x) = \mathrm{e}^{|x+2|}$,

b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

Příklad 3.40. *Rozhodněte, zda jde o sudou či lichou funkci či ani jedno.*

a) $f(x) = 4x + 6x^3 + 8x^5$,

b) $f(x) = \sin x^2$,

c) $f(x) = (1 - x)^2$,

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x^3} + \sqrt{x^2 - 5x^3}$.

4 Limita funkce, spojitost

V jedné z předchozích sekcí jsme se věnovali limitě posloupnosti; v této budeme studovat limitu funkce. Zatímco u limity posloupnosti jsme zkoumali, k čemu se posloupnost blíží, když jde její index do nekonečna, u limity funkce máme více možností. Můžeme studovat chování v $-\infty$ nebo $+\infty$, ale také limitu funkce ve vnitřním bodě. V tomto bodě můžeme také zadefinovat limitu zleva a zprava.

4.1 Teorie

Definice 4.1. *Buď $A, c \in \mathbb{R}$, f funkce definovaná na redukovaném okolí bodu c ($\{x \in \mathbb{R}, 0 < |c-x| < \delta\}$ pro nějaké $\delta > 0$), respektive na levém redukovaném okolí bodu c ($\{x \in \mathbb{R}, 0 < c-x < \delta\}$ pro nějaké $\delta > 0$). Řekneme, že*

1. $\lim_{x\to c} f(x) = A$, *pokud*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x: \quad 0 < |c-x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon\,,$$

2. $\lim_{x\to c-} f(x) = A$, *pokud*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x: \quad 0 < c-x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon\,,$$

   obdobně pro limitu zprava,

3. $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, *pokud*

$$\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x: \quad 0 < |c-x| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > E\,,$$

   obdobně pro $-\infty$,

4. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, *pokud*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathbb{R} \quad \forall x: \quad x > D \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon\,,$$

   obdobně pro $-\infty$,

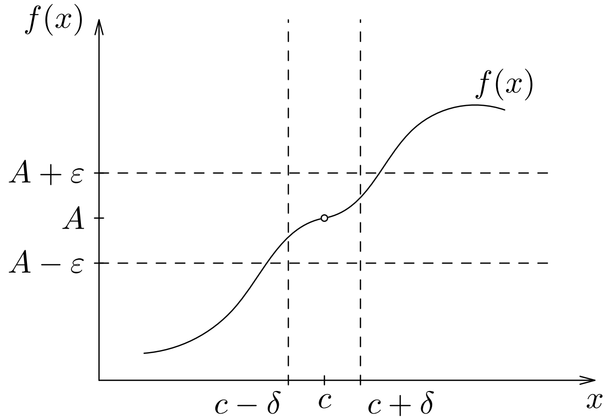
5. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, *pokud*

$$\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists D \in \mathbb{R} \quad \forall x: \quad x > D \quad \Rightarrow \quad f(x) < E\,,$$

   obdobně pro $x \to -\infty$ a oba případy s limitou rovnou $+\infty$.

V definici limity používáme pojem *redukované okolí bodu* (někdy se používá pojem prstencové okolí bodu). Množina $\{x, 0 < |c-x| < \delta\} = (c-\delta, c+\delta)\setminus\{c\}$ je množinou všech čísel vzdálených od čísla c maximálně o δ kromě čísla c. Obdobně zavedeme levé okolí (interval $(c-\delta, c)$) či pravé okolí (interval $(c, c+\delta)$).

První bod uvedené věty je ilustrován na obr. 19. Opět použijeme analogii s nepřítelem zadávajícím číslo. Tvrdím, že limita funkce f v bodě c je A. Nepřítel zadá malé kladné číslo ε. Já musím najít takové kladné číslo δ, že všechny body z redukovaného δ-okolí bodu c splňují, že funkční hodnota v nich je vzdálena



Obrázek 19: Ilustrace pojmu vlastní limita funkce (Věta 4.1, bod 1.)

od A nejvýše o ε. Pokud se mi to podaří pro všechna ε, dokázal jsem, že limita existuje. Zdůrazňujeme, že tato podmínka se netýká funkční hodnoty v bodě c. V tom nemusí být funkce ani definovaná, nebo může mít funkční hodnotu odlišnou od limity (to, že funkce není v tomto bodě definovaná, je na obrázku znázorněno prázdným kolečkem).

V případě limity zleva uvedenou vlastnost dokážeme pro všechna x z intervalu $(c-\delta, c)$, v případě limity zprava pro x z intervalu $(c, c+\delta)$. Tyto limity se obecně nemusejí rovnat; rovnají se, právě když f má v c limitu (jak si uvedeme v následující větě). Funkce může v bodě c divergovat (limita je $+\infty$ nebo $-\infty$, bod 3.). V tom případě nepřítel zadává velké kladné číslo E (v případě limity $-\infty$ záporné číslo s velkou absolutní hodnotou) a naším cílem je dokázat, že pro všechna x v redukovaném okolí je funkční hodnota větší než E. Odpovídající δ musíme nalézt pro všechna E (viz obr. 20).

Lze také definovat limitu v $-\infty$ nebo $+\infty$, která může být buď vlastní (bod 4. – výsledkem je reálné číslo) nebo nevlastní (bod 5. – výsledkem je $+\infty$ nebo $-\infty$).

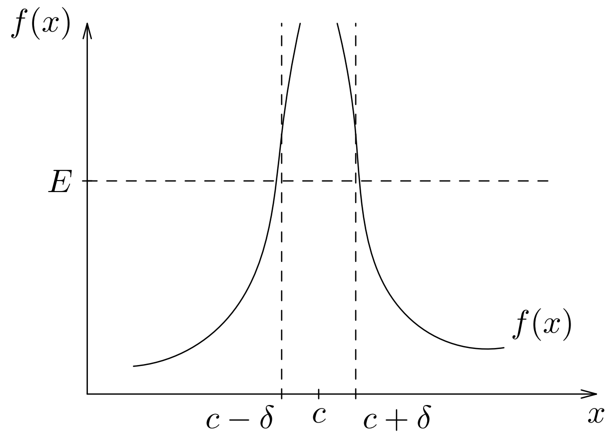
Věta 4.2. *Funkce $f(x)$ má v bodě c limitu, právě když má v tomto bodě současně limitu zleva i zprava a tyto limity se rovnají.*

Pomocí limity definujeme pojem spojitosti v bodě.

Definice 4.3. *Řekneme, že funkce je spojitá v bodě c, pokud je definovaná na okolí bodu c a platí*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)\,.$$

Pro limity funkce platí následující vztahy.



Obrázek 20: Ilustrace pojmu nevlastní limita funkce (Věta 4.1, bod 3.)

Věta 4.4. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A$, $\lim_{x\to c} g(x) = B$, $d, D \in \mathbb{R}$. *Potom*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} Df(x) &= DA\,, \\ \lim_{x\to c} |f(x)| &= |A|\,, \\ \lim_{x\to c-d} f(x+d) &= A\,, \\ \lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) &= A \pm B\,, \\ \lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) &= A\ \cdot B\,, \\ \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A}{B} \quad \text{pro } B \neq 0\,. \end{aligned}$$

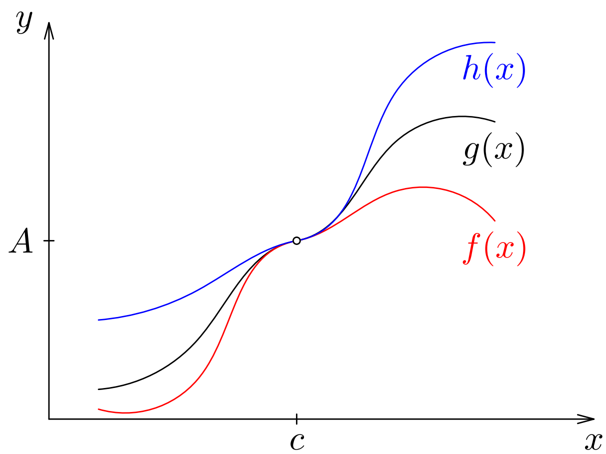
Následující věta je obdobou Věty 2.8.

Věta 4.5. *(o dvou policajtech)*
Nechť jsou funkce f, g a h definované na nějakém redukovaném okolí bodu c a existuje $\delta > 0$, že pro všechna x, pro která platí $0 < |c - x| < \delta$, je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Potom platí

1. *jestliže* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = A$, *pak* $\lim_{x\to c} g(x) = A$,
2. *jestliže* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, *pak* $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$.

Obdobně pro $-\infty$.

Argumentace je podobná jako u Věty 2.8. Ilustruje ji obr. 21. Na určitém redukovaném okolí bodu c je funkce f (červená) vždy menší než g (černá) a funkce h (modrá) je větší g. Pokud funkce f a h mají v c stejnou limitu (policajti se potkají), má tuto limitu i g (zločinec, který je stále mezi policajty, je polapen). Obdobně jde argumentovat i u bodu 2. v případě nevlastní limity.



Obrázek 21: Ilustrace k Větě 4.5, bod 1. (o dvou policajtech)

Následující věta definuje některé z limit. Například první z rovností bývá jedním ze vztahů, podle kterých jde definovat funkci sinus.

Věta 4.6. *Platí:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= 1\,, \\
\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} &= 1\,, \\
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1\,, \\
\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0\,, &\quad a > 0\,, \\
\lim_{x\to +\infty} x^a \ln x = 0\,, &\quad a < 0\,, \\
\lim_{x\to +\infty} x^a \mathrm{e}^x = +\infty\,, &\quad a \in \mathbb{R}\,, \\
\lim_{x\to -\infty} |x|^a \mathrm{e}^x = 0\,, &\quad a \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Obdobně jako pro posloupnosti platí i zde věta o limitě součinu funkce jdoucí k nule a omezené funkce.

Věta 4.7. *Je-li* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ *a* $g(x)$ *je omezená v nějakém redukovaném okolí bodu* c*, je* $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$*. Obdobné tvrzení platí také pro limitu k* $+\infty$ *nebo* $-\infty$*.*

4.2 Příklady

Příklad 4.8. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+7}{x^2+2x-6}$.

Řešení: Přímo dosadíme, protože funkce je v okolí čísla $x = 2$ definovaná a spojitá.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 + 2x - 6} = \frac{2^2 - 6 \cdot 2 + 7}{2^2 + 2 \cdot 2 - 6} = -\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 4.9. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

Řešení: Při dosazení dostaneme limitu typu $\frac{0}{0}$. Oba polynomy tedy mají kořen $x = 1$. Pomocí dělení polynomů určíme rozklad čitatele a jmenovatele a členy $(x - 1)$ zkrátíme.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x + 3}{x + 1} = 2\,.$$

Podělení jsme mohli provést, protože funkce $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}$ a $\frac{x+3}{x+1}$ jsou si všude kromě bodu $x = 1$ rovny. V tomto bodě první z funkcí není definovaná, druhá definovaná je a je dokonce v tomto bodě spojitá. Protože nás u limity nezajímá chování funkce v bodě, ke kterému se x blíží, je limita z obou funkcí stejná. Do druhé funkce můžeme dosadit funkční hodnotu stejně jako v předchozím příkladu.

Příklad 4.10. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladě. Opět jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Výrazy v čitateli i jmenovateli si rozložíme a poté odpovídající členy zkrátíme.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{2 + 1}{2 + 3} = \frac{3}{5}\,.$$

Příklad 4.11. *Vypočtěte* $\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+7x^2+8x+3}{x^3+x^2-x-1}$.

Řešení: Jde opět o limitu typu $\frac{0}{0}$. Abychom mohli výrazy v čitateli a jmenovateli rozložit, musíme nejdříve „tipnout“ některý z kořenů a poté podělit polynomy. Protože víme, že v $x = -1$ je čitatel i jmenovatel nulový, můžeme vytknout $x + 1$. Dále už můžeme řešit kvadratickou rovnici či použít Viètových vztahů. Postupně dostaneme.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 3}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)^2(2x + 3)}{(x + 1)^2(x - 1)} =$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{2 \cdot (-1) + 3}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 4.12. *Vypočtěte* $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech. Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$. Výrazy rozložíme a pokrátíme.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} = \frac{0}{-2} = 0\,.$$

Nyní jsme dostali výraz typu $\frac{0}{-2}$, který definovaný je a je roven nule.

Příklad 4.13. *Vypočtěte* $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

Řešení: Postupujeme obdobně. jde o výraz typu $\frac{0}{0}$. Z polynomů v čitateli i jmenovateli vytkneme $x+1$ a tímto výrazem je podělíme.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}=$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}=\frac{1+1-1}{1-(-1)+1-(-1)-1}=\frac{1}{3}$$

Příklad 4.14. *Vypočtěte* $\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$.

Řešení: Využijeme vztahu

$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)\,.$$

S použitím tohoto rozkladu máme

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\frac{m}{n}\,,$$

protože v čitateli je součet m jedniček a ve jmenovateli součet n jedniček.

Příklad 4.15. *Vypočtěte* $\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Řešení: Využijeme vztahu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ a opět rozkladu

$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)\,.$$

Dostáváme

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-x^2+x^2-2x+1}{x^{50}-x^2+x^2-2x+1}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x^{98}-1)+(x-1)^2}{x^2(x^{48}-1)+(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x^{49}-1)(x^{49}+1)+(x-1)^2}{x^2(x^{24}-1)(x^{24}+1)+(x-1)^2}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)[x^2(x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)(x^{49}+1)+(x-1)]}{(x-1)[x^2(x^{23}+x^{22}+\cdots+x+1)(x^{24}+1)+(x-1)]}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)(x^{49}+1)+(x-1)}{x^2(x^{23}+x^{22}+\cdots+x+1)(x^{24}+1)+(x-1)}=$$
$$=\frac{1\cdot49(1+1)+(1-1)}{1\cdot24(1+1)+(1-1)}=\frac{49}{24}\,.$$

V první rovnosti jsme si „vypůjčili“ výraz $-x^2$ a zase ho přičtením opět „vrátili“. Následuje aplikace uvedených vztahů, vytknutí $x-1$ a jeho zkrácení.

Příklad 4.16. *Vypočtěte* $\lim_{x\to -2}\left(\frac{3(x+1)}{x^2+x-2}+\frac{x+6}{x^2-4}\right)$.

Řešení: Dosazením dostáváme výraz $\frac{-3}{0}+\frac{4}{0}$, tedy $-\infty+\infty$, který je neurčitý. Výraz upravíme, sečteme zlomky. Nejdříve si rozložíme výrazy ve jmenovateli a najdeme nejmenší společný násobek jmenovatelů. Poté zlomky sečteme a rozložíme také čitatel.

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{3(x+1)}{x^2+x-2}+\frac{x+6}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{3(x+1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{x+6}{(x+2)(x-2)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+1)(x-2)+(x+6)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2-3x-6+x^2+5x-6}{(x+2)(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{4x^2+2x-12}{(x+2)(x-1)(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{2(2x^2+x-6)}{(x+2)(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{2(2x-3)(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{2(2x-3)}{(x-1)(x-2)}=\frac{2(2(-2)-3)}{(-2-1)(-2-2)}=-\frac{7}{6}\,.$$

Příklad 4.17. *Vypočtěte* $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Řešení: Výraz upravíme tak, že z čitatele i jmenovatele vytkneme největší mocninu x, tedy $x^{\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x(1+\frac{1}{x}\sqrt{x+\sqrt{x}})}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}(x+\sqrt{x})}\right)}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^4}x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1\,.$$

Protože jak čitatel, tak jmenovatel jde k jedničce, je výsledek 1.

Příklad 4.18. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Řešení: Vidíme, že výraz je typu $\frac{0}{0}$. Abychom využili vztahu $(a+b)(a-b)=$

$a^2 - b^2$, rozšíříme zlomek výrazem $(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)$.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3} = \frac{4}{3}\,.$$

Příklad 4.19. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Řešení: Opět po dosazení vidíme, že jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu. Budeme se snažit využít vztahu $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Protože tento vztah by nám v případě třetí odmocniny nepomohl, využijeme také vztah $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$. Proto celý zlomek rozšíříme výrazem $(\sqrt{9+2x}+5)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)$.

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{9+2x}+5}{\sqrt{9+2x}+5} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2} =$$
$$= \lim_{x\to 8} \frac{(9+2x-25)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} = \lim_{x\to 8} \frac{2(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} =$$
$$= \lim_{x\to 8} \frac{2((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{2((\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2)}{\sqrt{9+2\cdot 8}+5} = \frac{12}{5}\,.$$

Příklad 4.20. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

Řešení: Vyjdeme z první rovnosti ve Větě 4.6, tedy $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Abychom mohli tuto limitu použít, musí být argument sinu a výraz ve jmenovateli stejný. Proto provedeme úpravu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot 5 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \lim_{x\to 0} 5 = 1 \cdot 5 = 5\,.$$

Příklad 4.21. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení: Výraz si upravíme, využijeme vztahu

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\,.$$

S využitím první rovnosti ve Větě 4.6 dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 4.22. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.

Řešení: Využijeme výsledku předchozího příkladu. V čitateli si „půjčíme a vrátíme“ jedničku a zlomek rozdělíme na dva.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-(1-\cos x) + 1 - \cos 3x}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot 9 - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4\,.$$

Příklad 4.23. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.

Řešení: Využijeme první rovnosti ve Větě 4.6. Výraz si rozdělíme na dva zlomky a každý z nich rozšíříme x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} 5\frac{\sin 5x}{5x}\frac{x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x}\frac{x}{\sin x} =$$
$$= 5\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} - 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} =$$
$$= 5\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 1 = 2\,.$$

Příklad 4.24. *Vypočtěte* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$.

Řešení: Máme výraz typu nekonečno mínus nekonečno. Výraz upravíme a pokrátíme.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\sin x)} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 4.25. *Vypočtěte* $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

Řešení: Využijeme vztahu pro kosinus dvojnásobného úhlu a poté zkrátíme výrazy.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Příklad 4.26. *Vypočtěte* $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: Nyní máme vypočítat limitu pro x jdoucí do nekonečna (neplést tedy s limitou ve Větě 4.6). Protože sinus je funkce omezená a $\frac{1}{x}$ jde k nule, můžeme využít Větu 4.7. Podle ní máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\,.$$

Příklad 4.27. *Vypočtěte* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right)$.

Řešení: Výraz si převedeme na společného jmenovatele a následně vytkneme člen s největší mocninou ve jmenovateli z čitatele i jmenovatele.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0\,.$$

Příklad 4.28. *Vypočtěte* $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1} - x\right)$.

Řešení: Výraz je typu $\infty-\infty$, tedy je neurčitý. Využijeme vztahu $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ a výraz rozšíříme $\sqrt{x^2-x+1}+x$. Po úpravě vytkneme z čitatele i jmenovatele člen s největší mocninou x ve jmenovateli.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1} - x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{\sqrt{x^2-x+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 4.29. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 2}\frac{3-x}{(x-2)^2}$.

Řešení: Máme limitu typu $\frac{a}{0}$, která může být plus nekonečno, mínus nekonečno, nebo nemusí existovat. Spočítáme tedy limity zleva a zprava.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{3-x}{(x-2)^2} = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{3-x}{(x-2)^2} = \infty\,.$$

Vidíme, že jak pro x menší než 2, tak pro x větší než 2 je jmenovatel kladný. Čitatel je pro $x = 2$ roven jedné, proto je výsledek v obou případech plus nekonečno. Protože se limity zleva i zprava rovnají, je plus nekonečnu rovna i zadaná limita.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-x}{(x-2)^2} = \infty\,.$$

Kdyby se výsledky limit zleva a zprava nerovnaly, limita by neexistovala.

Příklad 4.30. *Vypočtěte* $\lim_{x\to -1} \frac{2x+3}{x+1}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R}$. Proto určíme jednostranné limity. Výraz $x+1$ je pro $x < -1$ záporný, výraz $2x+3$ je v okolí -1 kladný (jeho limita je rovna 1). Podíl kladného a záporného čísla je záporný, proto

$$\lim_{x\to -1-} \frac{2x+3}{x+1} = -\infty\,.$$

Pro $x > -1$ je výraz $x+1$ kladný, výraz $2x+3$ je v okolí -1 stále kladný. Podíl dvou kladných čísel je kladný, proto

$$\lim_{x\to -1+} \frac{2x+3}{x+1} = +\infty\,.$$

Limita zleva se liší od limity zprava, limita v zadání proto neexistuje.

Příklad 4.31. *Vypočtěte* $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin x - \cos x}$.

Řešení: Jde opět o limitu typu $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R}$, protože $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Určíme proto opět jednostranné limity. Pro $x < \frac{\pi}{4}$ je sinus menší než $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a kosinus větší než $\frac{\sqrt{2}}{2}$, jmenovatel je tedy záporný. Protože čitatel je 1 a podíl kladného a záporného čísla je záporný, dostáváme

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}-} \frac{\sin 2x}{\sin x - \cos x} = -\infty\,.$$

Pro $x > \frac{\pi}{4}$ si sinus a kosinus své role vymění. Jmenovatel je tedy kladný a limita zprava je rovna

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}+} \frac{\sin 2x}{\sin x - \cos x} = \infty\,.$$

Protože se limity zprava a zleva nerovnají, zadaná limita neexistuje.

Příklad 4.32. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{|\sin x|}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R}$. Protože $\cos(3\cdot 0) = 1$ a absolutní hodnota sinu je v redukovaném okolí bodu 0 kladná, dostáváme

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\cos 3x}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos 3x}{|\sin x|} = \infty\,.$$

Protože se limity zleva i zprava rovnají, máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{|\sin x|} = \infty\,.$$

Příklad 4.33. *Zjistěte, ve kterých bodech svého definičního oboru je funkce*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x+3} & x \neq -3 \\ -4 & x = -3 \end{cases}$$

spojitá.

Řešení: Funkce je definovaná na celé reálné ose, v bodě -3 je zadaná explicitní hodnota. Funkce je zjevně na $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ spojitá, jediným nejasným bodem je bod $x=-3$. Spojitost zde určíme z Definice 4.3. Určíme limitu

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-1)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-1)=-4\,.$$

Protože funkční hodnota funkce f v -3 je také -4, je funkce v tomto bodě spojitá. Funkce je tedy spojitá na $\mathbb{R}$.

Příklad 4.34. *Zjistěte, ve kterých bodech svého definičního oboru je funkce*

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

spojitá.

Řešení: Spojitost v $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ je zřejmá, zbývá vyšetřit spojitost v bodě $x=0$, tedy najít limitu

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}\,.$$

Protože sinus je funkce omezená a funkce x jde k nule, dostáváme z Věty 4.7

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0\,.$$

Limita je tedy rovna funkční hodnotě, funkce je v bodě $x=0$ spojitá. Funkce je tedy spojitá na $\mathbb{R}$.

4.3 Literatura

Teorie byla inspirována učebnicí [6], kterou doporučujeme k dalšímu studiu i k procvičení na příkladech. Další velké množství příkladů lze nalézt např. v [2, 12, 7]. Použít můžete také detailnější výuková videa [4].

4.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 4.35. *Vypočtěte následující limity:*

a) $\lim_{x\to3}\frac{x^2+4x-1}{2x^2-x+3}$,

b) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$,

c) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^4-(1+4x)}{x^2}$,

d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$,

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^6}{x}$,

f) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$, *g)* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x+3}{\sin x-1}$,

h) $\lim_{x\to16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$,

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

j) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$,

k) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$,

l) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$,

Příklad 4.36. *Zjistěte, ve kterých bodech svého definičního oboru jsou funkce spojité.*

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{pro } x \neq 2 \\ 4 & \text{pro } x = 2 \end{cases} ,$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases} ,$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases} .$$

5 Derivace, l'Hospitalovo pravidlo

5.1 Derivace – teorie

Stěžejním pojmem tohoto semestru je pojem *derivace*. Než ho zadefinujeme, uvedeme si jeho motivaci.

Předpokládejte, že stoupáme do kopce. Námaha, kterou na stoupání v daném okamžiku vynakládáme, je dána tím, jak je kopec strmý. Chceme-li strmost určit, můžeme například určit, o kolik metrů se zvýší naše nadmořská výška, urazíme-li 100 metrů v horizontálním směru, a pak tato dvě čísla podělit. Nevýhodou tohoto postupu je, že dostaneme „průměrnou strmost" kopce na těchto sto metrech. Zajímá-li nás lokální údaj (jak stoupáme v daném okamžiku), můžeme se k němu přiblížit tím, že snížíme počet metrů v horizontálním směru, které uvažujeme (např. na 10 metrů). Tím dostaneme přesnější údaj. Dále můžeme uvažovat stoupání na jednom metru, atd. Hodnotu uvedeného podílu rozdílu nadmořských výšek obou bodů a jejich horizontální vzdálenosti v limitě pro horizontální vzdálenost jdoucí k nule budeme nazývat derivací.

Definice 5.1. *Nechť je reálná funkce f definovaná na okolí $U(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Potom řekneme, že f má* vlastní derivaci *v bodě a rovnou $A \in \mathbb{R}$, pokud*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A\,.$$

Nechť f je definovaná na pravém okolí $U_+(a)$. Potom řekneme, že f má vlastní derivaci zprava *rovnou A, pokud*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A\,.$$

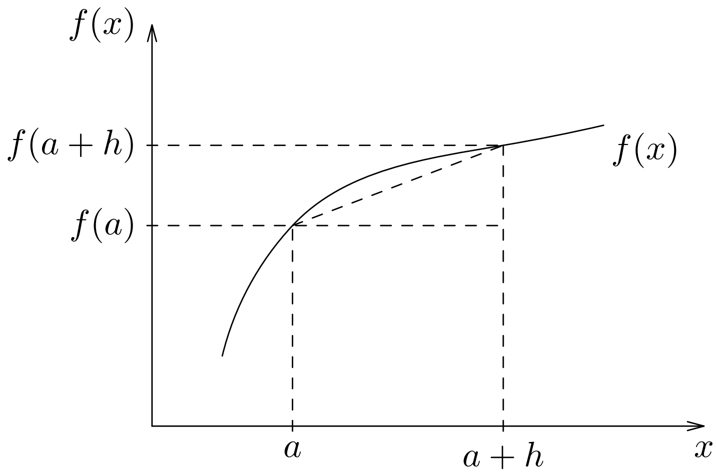
Obdobně pro derivaci zleva.

Derivaci funkce $f(x)$ značíme $f'(x)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Geometrický význam derivace je směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě. Jak můžeme vidět na obr. 22, zlomek uvnitř limity udává směrnici sečny spojující body $[a, f(a)]$ a $[a+h, f(a+h)]$. Jak se h blíží k nule, blíží se tato sečna k tečně funkce v bodě a. Této vlastnosti se využívá při hledání extrémů funkce. Máme-li spojitou funkci na uzavřeném intervalu, pro niž v každém bodě existuje derivace, může svého maxima či minima dosáhnout pouze v bodech, kde je její derivace nulová, nebo v krajních bodech definičního oboru. Derivace se často používá ve fyzice, např. derivace dráhy je okamžitá rychlost, derivace přeneseného náboje je proud, apod.

Následující věta uvádí vlastnosti derivace. Např. derivace konstanty je nula, derivace je lineární, apod.

Věta 5.2. *(výpočet derivací)*
Nechť c je konstantní funkce, f, g reálné funkce, které mají v bodě a vlastní



Obrázek 22: Ilustrace pojmu derivace

derivaci. Potom

$$
\begin{aligned}
c' = 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\\
(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)\,,\\
(cf)'(a) = cf'(a)\,,\\
(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.
\end{aligned}
$$

Je-li $g(a) \neq 0$*, platí*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,.$$

Derivace složené funkce: Nechť f *má vlastní derivaci v bodě* a *a* g *má vlastní derivaci v bodě* $A = f(a)$*. Potom složená funkce* $g \circ f$ *má vlastní derivaci v bodě* a *a platí*

$$(g \circ f)'(a) = g'(A)f'(a) = g'(f(a))f'(a)\,.$$

Derivace inverzní funkce: Nechť f *je spojitá a ryze monotónní na okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ *a má v bodě* a *vlastní nenulovou derivaci. Potom inverzní funkce* f^{-1} *má také vlastní a nenulovou derivaci v bodě* $A = f(a)$ *a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(A) = \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(A))}\,.$$

Funkce f *má v bodě* a *derivaci (vlastní či nevlastní), právě když má v tomto bodě obě jednostranné derivace a tyto derivace jsou si rovny.*

Tabulka derivací základních funkcí je na obr. 23.

f	f'	$\mathcal{D}(f)$	$\mathcal{D}(f')$	Pozn.
const.	$\mathbf{0}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$ (tj. jako $\mathcal{D}(f)$)	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$	$\bullet$	$n \in \mathbf{N}$
x^a	ax^{a-1}	$x > \mathbf{0}$	$\bullet$	$a \in \mathbf{R}$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	$a > \mathbf{0}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > \mathbf{0}$	$\bullet$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > \mathbf{0}$	$\bullet$	$a \in (\mathbf{0}, 1) \cup (1, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\bullet$	
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$	$\bullet$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1: jen jednostranné derivace
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1: jen jednostranné derivace
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{arccotg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{tgh}\, x$	$1 - \mathrm{tgh}^2 x$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\mathrm{cotgh}\, x$	$1 - \mathrm{cotgh}^2 x$	$x \neq \mathbf{0}$	$\bullet$	
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbf{R}$	$\bullet$	
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$	$\bullet$	
$\arg\mathrm{tgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$-1 < x < 1$	$\bullet$	
$\arg\mathrm{cotgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\|x\| > 1$	$\bullet$	

Obrázek 23: Tabulka derivací základních funkcí, převzato z [11]

5.2 Derivace – příklady

Příklad 5.3. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x^3$*.*

Řešení: Využijeme tabulku derivací. Derivace x^n je nx^{n-1}, tedy pro $n = 3$ máme $f'(x) = 3x^2$.

Příklad 5.4. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x^2 + 7x - 3$*.*

Řešení: Zadaná funkce je součtem tří funkcí. Podle Věty 5.2 a vztahu pro derivaci x^n z předchozího příkladu máme

$$f'(x) = (x^2 + 7x - 3)' = (x^2)' + 7x' - 3' = 2x + 7\,.$$

U druhého členu jsme číslo 7 „vytáhli před derivaci“ (třetí vztah ve Větě 5.2), ve třetím členu jsme využili toho, že derivace konstanty je nula (první vztah ve Větě 5.2).

Příklad 5.5. *Určete derivaci funkce* $f(x) = \sqrt{x}$*.*

Řešení: Odmocninu si napíšeme jako $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ a využijeme vztahu pro derivaci x^a, $a \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Příklad 5.6. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x^2 + 2 + 3\ln x$*.*

Řešení: Využijeme toho, že derivace součtu je součet derivací. Pak použijeme vztahu pro derivaci x^n, konstanty a logaritmu.

$$f'(x) = (x^2)' + 2' + 3(\ln x)' = 2x + 0 + 3\frac{1}{x} = 2x + \frac{3}{x}\,.$$

Příklad 5.7. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x\sin x$*.*

Řešení: Využijeme větu o derivaci součinu.

$$f'(x) = (x\sin x)' = x'\sin x + x(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cos x = \sin x + x\cos x\,.$$

Dále jsme využili tabulky derivací (x^n pro $n = 1$ a $\sin x$).

Příklad 5.8. *Určete derivaci funkce* $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$*.*

Řešení: Derivujeme jako podíl.

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'x^2 - \sin x(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{(\cos x)x^2 - (\sin x)2x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}\,.$$

Příklad 5.9. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$*.*

Řešení: Využijeme větu o derivaci součtu a poté vztah pro derivaci x^a.

$$f'(x) = x' + (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' = 1 \cdot x^0 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Příklad 5.10. *Určete derivaci funkce* $f(x) = \frac{x+\ln x}{2x+x^3}$.

Řešení: Využijeme derivace podílu a tabulky derivací.

$$f'(x) = \left(\frac{x+\ln x}{2x+x^3}\right)' = \frac{[x' + (\ln x)'](2x+x^3) - (x+\ln x)(2x' + x^{3'})}{(2x+x^3)^2} =$$
$$= \frac{(1+\frac{1}{x})(2x+x^3) - (x+\ln x)(2+3x^2)}{(2x+x^3)^2} =$$
$$= \frac{x^3+x^2+2x+2-(3x^3+2x+(2+3x^2)\ln x)}{(2x+x^3)^2} =$$
$$= \frac{-2x^3+x^2+2-(2+3x^2)\ln x}{(2x+x^3)^2}\,.$$

Příklad 5.11. *Určete derivaci funkce* $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

Řešení: Zadaná funkce je funkcí složenou $h = g \circ f$. Vnější funkce (ve Větě 5.2 označená jako g) je odmocnina, vnitřní funkce je $f(x) = x^2 + x + 1$. Derivace vnější funkce je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,.$$

Do tohoto výrazu musíme dosadit za y funkci f, tedy $y = x^2 + x + 1$. Derivace vnitřní funkce je

$$f'(x) = (x^2+x+1)' = (x^2)' + x' + 1' = 2x+1\,.$$

Derivace funkce h je tedy

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\,.$$

Příklad 5.12. *Určete derivaci funkce* $f(x) = 2\ln(x^2+1)$.

Řešení: Dvojku jako konstantu můžeme vytknout před derivaci. Logaritmus derivujeme jako složenou funkci. Derivace vnější funkce je $\frac{1}{x^2+1}$, derivace vnitřní funkce je $2x$.

$$f'(x) = [2\ln(x^2+1)]' = 2\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{4x}{x^2+1}\,.$$

Příklad 5.13. *Určete derivaci funkce* $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^{20}$.

Řešení: Tento příklad bychom mohli řešit roznásobením funkce a využitím věty o derivaci součtu. Je ale zřejmé, že tento postup je zdlouhavý. Vhodnější je postupovat pomocí derivace složené funkce. Vnější funkce je 20. mocnina, vnitřní funkce je $x^2 + 3x + 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) = ((x^2 + 3x + 1)^{20})' = 20(x^2 + 3x + 1)^{19}(x^2 + 3x + 1)' = \\ = 20(x^2 + 3x + 1)^{19}(2x + 3)\,. \end{aligned}$$

Příklad 5.14. *Určete derivaci funkce* $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$.

Řešení: Nejdříve najdeme derivaci podílu a poté využijeme u každé z funkcí větu o derivaci složené funkce.

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}\right)' = \frac{(\sin^2 x)' \sin(x^2) - \sin^2 x[\sin(x^2)]'}{\sin^2(x^2)} = \\ = \frac{2\sin x \cos x \sin(x^2) - \sin^2 x \cos(x^2) \cdot 2x}{\sin^2(x^2)} = \\ = \frac{2\sin x[\cos x \sin(x^2) - 2x \sin x \cos(x^2)]}{\sin^2(x^2)}\,. \end{aligned}$$

Příklad 5.15. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x\cos^2 3x$.

Řešení: Využijeme derivace součinu a derivace složené funkce.

$$\begin{aligned} f'(x) = [x\cos^2 3x]' = x' \cos^2 3x + x[\cos^2 3x]' = \\ = \cos^2 3x + x \cdot 2\cos 3x(-\sin 3x) \cdot 3x = \cos^2 3x - 6x^2 \cos 3x \sin 3x\,. \end{aligned}$$

Příklad 5.16. *Určete derivaci funkce* $f(x) = x^x$.

Řešení: Tento příklad musíme řešit trikem. Nejdříve si přepíšeme $x^x = \mathrm{e}^{\ln(x^x)} = \mathrm{e}^{x\ln x}$. To můžeme učinit, protože exponenciála a logaritmus jsou vzájemně inverzní funkce. Využili jsme také vlastnosti logaritmu. Pak tuto funkci derivujeme pomocí derivace složené funkce a derivace součinu.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}\left(1\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x)\,.$$

Příklad 5.17. *Odvoďte z definice vztah pro derivaci funkce* $f(x) = \sin x$.

Řešení: Vyjdeme z definice derivace a upravíme výraz podle vztahu pro sinus součtu.

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \\ = \sin a \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\,. \end{aligned}$$

Limita $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ je definovaná ve Větě 4.6. S použitím výsledku příkladu 4.21 (limita funkce $\frac{1-\cos h}{h^2}$ v okolí nuly je vlastní, proto je v tomto okolí daná funkce omezená) a Věty 4.7 (funkce h, která jde k nule, je násobená omezenou funkcí) dostáváme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} \cdot h = 0\,.$$

Příklad 5.18. *Odvoďte z definice vztah pro derivaci součinu funkcí.*

Řešení: Pro funkci $h(x) = f(x)g(x)$ a derivaci v bodě a dostáváme

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h\to 0} g(a+h) + f(a) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,. \end{aligned}$$

Příklad 5.19. *Odvoďte z vztah pro derivaci funkce* $g(x) = \arcsin x$.

Řešení: S využitím Věty 5.2 (derivace inverzní funkce) dostáváme pro $g(x) = f^{-1}(x) = y = \arcsin x$, tedy pro $f(y) = \sin y$

$$g'(x) = {f^{-1}}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\,.$$

Protože pro $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ platí $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Funkce sinus je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ spojitá, ryze monotónní a kromě krajních bodů intervalu má nenulovou derivaci, proto předpoklady Věty 5.2 platí. Derivace funkce g je

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

Její definiční obor je $(-1, 1)$, neboť $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ a $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Příklad 5.20. *Určete derivaci funkcí* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *a* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Řešení: Využijeme toho, že exponenciála se při derivaci nemění, u derivace e^{-x} použijeme větu o derivaci složené funkce.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}\cdot(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\,.$$

Obdobně pro kosinus hyperbolický.

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x\,.$$

Obě funkce tedy přecházejí derivací jedna v druhou, narozdíl od derivace „obyčejného“ kosinu zde není znaménko mínus.

5.3 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo je účinnou pomůckou pro výpočet limit typu $\frac{0}{0}$, může se také využít v případě, kdy limita absolutní hodnoty jmenovatele je nekonečno.

Věta 5.21. *(l'Hospitalovo pravidlo)*
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$, $a \in \mathbb{R}^*$ *a existuje-li*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*\,,$$

pak je také

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A\,.$$

Platí také pro jednostranné limity.

Pozor, musíme vždy ověřit, že jde o limitu typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, v opačném případě nemusí rovnost platit. L'Hospitalovo pravidlo převede limitu zlomku na limitu jiného zlomku, která už typu $\frac{0}{0}$ být nemusí a její výsledek můžeme dostat dosazením. V případě, že jde opět o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme l'Hospitalovo pravidlo použít opakovaně.

Příklad 5.22. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$.

Řešení: Protože $\sin(a\cdot 0) = \sin(b\cdot 0) = 0$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Výraz v čitateli i výraz ve jmenovateli každý zvlášť zderivujeme (při derivaci použijeme pravidlo o derivaci složené funkce).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)\cdot a}{\cos(bx)\cdot b} = \frac{a}{b}\,.$$

Příklad 5.23. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Řešení: Nejdříve si dosazením ověříme, že se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$. Poté zderivujeme čitatele i jmenovatele zvlášť.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2\,.$$

Také jsme mohli místo zkrácení výrazu $1 - \cos x$ podruhé použít l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 5.24. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme aplikovat l'Hospitalovo pravidlo. Po první aplikaci obdržíme opět limitu typu $\frac{0}{0}$, proto pravidlo použijeme podruhé. Poté dosadíme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x + \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x + \cos x}{2} = \frac{1+1}{2} = 1\,.$$

Příklad 5.25. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$.

Řešení: Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme využít l'Hospitalova pravidla, poté dosadíme.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{2x-1} = \frac{2\cdot 2-4}{2\cdot 2-1} = 0\,.$$

Příklad 5.26. *Vypočtěte limitu* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+3}{x^2+x-5}$.

Řešení: Pokud bychom slepě aplikovali l'Hospitalovo pravidlo, dostali bychom nesprávný výsledek

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+3}{x^2+x-5} \neq \lim_{x\to 2} \frac{2x-2}{2x+1} \neq \lim_{x\to 2} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Limita ovšem není typu $\frac{0}{0}$. Přímým dosazením obdržíme

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+3}{x^2+x-5} = \frac{2^2-2\cdot 2+3}{2^2+2-5} = \frac{3}{1} = 3\,.$$

Příklad 5.27. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

Řešení: Protože $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ a $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, je limita typu $\frac{0}{0}$. Můžeme tedy použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3}(\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}}{4\sin x\cos x} = \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}}}{12\sin x\cos^3 x} = \frac{(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4})^{-\frac{2}{3}}}{12\sin\frac{\pi}{4}\cos^3\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(\sqrt{2})^3}} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Příklad 5.28. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

Řešení: Výpočet u tohoto příkladu bude trochu zdlouhavější. Čtvrtá mocnina x ve jmenovateli naznačuje, že l'Hospitalovo pravidlo budeme muset použít čtyřikrát (až po čtyřech derivacích bude hodnota jmenovatele po dosazení nenulová). Před každým použitím l'Hospitalova pravidla bychom měli ověřit jeho předpoklad, tj. že se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$ (toto necháváme na čtenáři). Po každém použití l'Hospitalova pravidla výraz upravíme, abychom ho mohli znovu dobře derivovat.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x-(-\sin x)}{4x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos^2 x-\sin(\sin x)(-\sin x)+\cos x}{12x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x+\cos x}{12x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0}\Bigg(\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x-\cos(\sin x)2\cos x(-\sin x)}{24x} + \\
&\quad + \frac{\cos(\sin x)\sin x\cos x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x}\Bigg) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x+3\cos(\sin x)\cos x\sin x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\Bigg(\frac{\cos(\sin x)\cos^4 x+\sin(\sin x)3\cos^2 x(-\sin x)}{24} + \\
&\quad + \frac{-3\sin(\sin x)\cos^2 x\sin x+3\cos(\sin x)(-\sin x)\sin x}{24} + \\
&\quad + \frac{3\cos(\sin x)\cos x\cos x+\cos(\sin x)\cos x\cos x+\sin(\sin x)(-\sin x)-\cos x}{24}\Bigg) = \\
&= \lim_{x\to 0}\Bigg(\frac{\cos(\sin x)\cos^4 x-6\sin(\sin x)\cos^2 x\sin x-3\cos(\sin x)\sin^2 x}{24} + \\
&\quad + \frac{4\cos(\sin x)\cos^2 x-\sin(\sin x)\sin x-\cos x}{24}\Bigg) = \\
&= \frac{1\cdot 1-6\cdot 0\cdot 1\cdot 0-3\cdot 1\cdot 0+4\cdot 1\cdot 1-0\cdot 0-1}{24} = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 5.29. *Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte* $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$.

Řešení: V tomto příkladu využijeme l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limity typu $\frac{\infty}{\infty}$.

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0\,.
$$

5.4 Extrémy funkce

Derivaci můžeme využít k hledání extrémů funkce na daném intervalu (tedy maxim a minim). Můžeme hledat lokální extrémy – funkční hodnota v daném bodě je větší nebo rovna (menší nebo rovna) než funkční hodnoty pro všechny body v některém jeho okolí – nebo globální extrémy na dané množině – funkční hodnota v daném bodě je větší nebo rovna (menší nebo rovna) než funkční hodnoty pro všechny body dané množiny. Platí, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu s derivací definovanou v každém bodě může mít globální maximum jen v bodech, ve kterých je derivace nulová, nebo v krajních bodech intervalu. To není překvapivé. Když se vrátíme k analogii ze začátku sekce, nacházíme-li se na vrcholu kopce, nikam nestoupáme ani neklesáme, derivace je nulová. Je ale nutné připomenout, že z toho, že derivace je nulová, nutně neplyne, že v daném bodě je (např. lokální) extrém. Protipříkladem je funkce $f(x) = x^3$ v bodě $x = 0$.

Máme-li určit globální extrémy spojité diferencovatelné funkce na uzavřeném intervalu, najdeme nejdříve body podezřelé z extrému (body, v nichž je derivace nulová, a krajní body intervalu). Z nich vybereme bod (body) s největší/nejmenší funkční hodnotou. Máme-li určit lokální extrémy spojité diferencovatelné funkce, najdeme body podezřelé z extrému a určíme, zda funkce vlevo a vpravo od nich roste, či klesá. Funkce roste, je-li derivace kladná; funkce klesá, je-li derivace záporná. Alternativně můžeme také použít znaménka druhé derivace. Více uvedeme v následujících sekcích.

Příklad 5.30. *Najděte globální extrémy funkce* $f(x) = x^2 - 4x + 6$ *na intervalu* $[-3; 10]$.

Řešení: Nejdříve vypočteme derivaci funkce f a položíme ji rovnu nule.

$$f'(x) = 2x - 4 = 0\,.$$

Řešením vzniklé rovnice je bod $x = 2$, který leží uvnitř zadaného intervalu. Extrémy mohou nastat tedy v bodech -3, 2, 10. Vypočteme v nich funkční hodnoty.

$$f(-3) = 27\,, \quad f(2) = 2\,, \quad f(10) = 66\,.$$

Maximum je tedy v bodě $[10; 66]$, minimum v bodě $[2; 2]$.

Příklad 5.31. *Najděte vrchol kvadratické funkce* $f(x) = -2x^2 + 3x - 9$.

Řešení: Ve vrcholu kvadratické funkce je podobně jako předchozím příkladu (lokální) extrém, je v něm derivace nulová. Vypočteme tedy derivaci a položíme ji rovnu nule.

$$f'(x) = -4x + 3 = 0\,.$$

Odsud $x = \frac{3}{4}$. Odpovídající y-ovou souřadnici vrcholu nalezneme dosazením tohoto bodu do funkčního předpisu.

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} - 9 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} - 9 = -\frac{63}{8}\,.$$

Vrchol je v bodu $[\frac{3}{4}; -\frac{63}{8}]$.

Příklad 5.32. *Najděte globální extrémy funkce* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *na intervalu* $[0{,}01; 100]$.

Řešení: Opět vypočteme derivaci dané funkce a položíme ji rovnu nule.

$$f'(x) = x' + (x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0\,.$$

Máme rovnici $x^2 = 1$, tedy $x = \pm 1$. Do daného intervalu patří pouze bod $x = 1$. Určíme funkční hodnoty v tomto bodu a v krajních bodech intervalu.

$$\begin{aligned} f(0{,}01) &= 0{,}01 + \frac{1}{0{,}01} = 100{,}01\,,\\ f(1) &= 1 + \frac{1}{1} = 2\,,\\ f(100) &= 100 + \frac{1}{100} = 100{,}01\,. \end{aligned}$$

Minimum je tedy v bodě $[1; 2]$, maxima jsou v bodech $[0{,}01; 100{,}01]$ a $[100; 100{,}01]$.

Příklad 5.33. *Najděte globální extrémy funkce $f(x) = x^3 - x^2$ na intervalu $[0; 1]$.*

Řešení: Určíme derivaci funkce a položíme ji rovnu nule.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(3x - 2) = 0\,.$$

Derivace je rovna nule v bodech $x = 0$ a $x = \frac{2}{3}$. Dále budeme zkoumat krajní body intervalu. Určíme funkční hodnoty.

$$f(0) = 0\,, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{12}{27} = -\frac{4}{27}\,, \quad f(1) = 0\,.$$

Minimum je $[\frac{2}{3}; -\frac{4}{27}]$, maxima jsou v bodech $[0; 0]$ a $[1; 0]$.

Příklad 5.34. *Určete lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.*

Řešení: Derivace je

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0\,.$$

Po vydělení 3 tedy dostáváme rovnici

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)(x - 1) = 0\,,$$

jejímiž kořeny jsou body $x = 1$ a $x = 3$. Určíme znaménka derivace $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ na intervalech $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ a $(3, \infty)$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Funkce tedy proto na intervalu $(-\infty, 1)$ roste (derivace tam je kladná), na intervalu $(1, 3)$ klesá (derivace je záporná) a na intervalu $(3, \infty)$ opět roste. Bod $x = 1$ je lokální maximum, bod $x = 3$ lokální minimum. Určíme ještě funkční hodnoty v těchto bodech.

$$f(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = 0\,, \quad f(3) = 27 - 54 + 27 - 4 = -4\,.$$

Lokální maximum je tedy $[1; 0]$, lokální minimum $[3; -4]$. Poznamenejme, že žádný z extrémů není globální, protože $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Příklad 5.35. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Řešení: Určíme derivaci a položíme ji rovnu nule.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}\,.$$

Zlomek je rovný nule, když $1 - x^2 = 0$, tj. $(1-x)(1+x) = 0$. Odsud máme body $x = 1$ a $x = -1$. Určíme znaménka derivace na příslušných intervalech.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$1+x$	$-$	$+$	$+$
$1+x^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Funkce je tedy klesající na intervalu $(-\infty, -1)$ i na intervalu $(1, \infty)$ a rostoucí na intervalu $(-1, 1)$. Bod $x = -1$ je lokální minimum, bod $x = 1$ lokální maximum. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou

$$f(-1) = -1\,, \quad f(1) = 1\,.$$

Lokální minimum: $[-1; -1]$; lokální maximum $[1, 1]$.

5.5 Literatura

Znění vět je převážně převzato z [6], zadání mnoha příkladů z [2]. Pro studium teorie doporučujeme [5], jako zásobárnu příkladů [6, 2, 12, 7]. Použít můžete také detailnější výuková videa [4].

5.6 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 5.36. *Vypočítejte derivace následujících funkcí a určete definiční obor funkce i derivace.*

a) $f(x) = 3x^3 + 5x + 8 + \frac{2}{x^2}$,

b) $f(x) = \ln x^3$,

c) $f(x) = \frac{\sin x}{x - x^3}$,

d) $f(x) = \operatorname{tg}^2(4x)$,

e) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$,

f) $f(x) = \sinh x \cosh x$,

g) $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{e}^{-x}$,

h) $f(x) = x^x \cos x$,

i) $f(x) = \arcsin \mathrm{e}^{3x}$.

Příklad 5.37. *Odvoďte vztah pro derivaci podílu.*
Návod: *Určete* $(fg^{-1})'$ *pomocí derivace součinu a derivace složené funkce.*

Příklad 5.38. *Odvoďte vztah pro derivaci funkce* $f(x) = \cos x$ *z definice derivace.*

Příklad 5.39. *Vypočtěte limity (pokud můžete, využijte l'Hospitalovo pravidlo):*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x - x}$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$,

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x+2}$.

Příklad 5.40. *Určete maximum a minimum funkce na daném intervalu:*

a) $f(x) = x^4 - x^3$, $D_f = [0, 1]$,

b) $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x + 2\right)$, $D_f = [0, 2\pi]$,

c) $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x$, $D_f = [-2, 2]$.

Příklad 5.41. *Určete průběh okamžité rychlosti a zrychlení, má-li ujetá dráha na čase závislost*

a) $s(t) = s_0 + ct$, $t \in (0, t_0)$,

b) $s(t) = c \sin t$, $t \in (0, \pi/2)$.

6 Diferenciál funkce jedné proměnné, Taylorův rozvoj

6.1 Teorie

Nejdříve si zavedeme značení malého o a velkého O.

Definice 6.1. *Píšeme* $f = o(g)$, $x = a \in \mathbb{R}^*$, *je-li* $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = 0$. *Píšeme* $f = O(g)$, $x = a \in \mathbb{R}^*$, *je-li* $\frac{f}{g}(x)$ *omezená na nějakém okolí bodu okolí* $U^*(a)$.

Tedy jinými slovy, funkce, která patří do třídy funkcí $o(g)$, je limitně menší než g, zatímco funkce, která patří do třídy $O(g)$ limitně stejného řádu nebo menšího než g.

Následující rovnice dává přibližný tvar funkce f v okolí bodu a, pokud je tato funkce diferencovatelná v tomto okolí.

Věta 6.2. *Má-li funkce* f *v bodě* a *vlastní derivaci rovnou* A*, pak platí*

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$$

a naopak, existuje-li $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *tak, že platí předchozí rovnice, má funkce* f *v bodě* a *vlastní derivaci rovnou* A.

Právě druhý člen ve tvaru funkce f v předchozí větě nazveme jejím diferenciálem v bodě a.

Definice 6.3. *Diferenciálem funkce* f *v bodě* a *se nazývá taková funkce* $\mathrm{d}f(a)(t) = At$, $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, *pro kterou platí* $f(a+t) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(t) = o(t)$ *pro* $t = 0$.

Diferenciál je z pohledu proměnné $t = x-a$ lineární zobrazení, které každému t přiřazuje jeho A-násobek, kde A (jak tvrdí následující věta) je derivace funkce f v bodě a.

Věta 6.4. *Funkce* f *má v bodě* a *diferenciál, právě když tam má vlastní derivaci. Přitom číslo* A *v diferenciálu je rovno* $f'(a)$.

Pro funkce jedné proměnné nemá pojem diferenciálu velký význam, důležité je ale jeho zobecnění pro funkce více proměnných. Na příkladech si ukážeme aplikaci diferenciálu jedné proměnné na odhady funkčních hodnot funkce blízko známé hodnoty.

Ve Větě 6.2 jsme si ukázali lineární odhad funkční hodnoty dané funkce. Kromě konstantního členu je zde člen, který lineárně roste se zvyšující se vzdáleností od daného bodu a; ve zmíněné větě aproximujeme funkci v okolí bodu a přímkou. Logické pokračování může být přidání kvadratického členu (případně kubického a dalších členů) a zlepšení aproximace dané funkce. Předpis pro tuto aproximaci (Taylorův mnohočlen) zadává Taylorova věta níže.

Definice 6.5. *Pro funkci f, která v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace až do řádu n včetně definujeme její Taylorův mnohočlen v bodě $x = x_0$ předpisem*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $f^{(k)}$ značí k-tou derivaci funkce f.

Věta 6.6. *(Taylorova věta)*
Má-li funkce f derivace v bodě x_0 do řádu n včetně, pak platí

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)\,.$$

Druhá derivace je derivace derivace, třetí derivace je derivací druhé derivace, atd.

Uvedeme si Taylorovy rozvoje nejčastějších funkcí.

Věta 6.7. *Pro $x_0 = 0$ platí*

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\,,\\
\sin x &= \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^n) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\,,\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\,,\\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\,,\\
(1+x)^p &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{p}{k} x^k + o(x^n)\,,
\end{aligned}$$

kde $[x]$ je celá část čísla x, kombinační číslo $\binom{p}{k}$ je rovno $\frac{p!}{k!(p-k)!}$ a faktoriál $n!$ je součin čísel $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$.

6.2 Příklady

Příklad 6.8. *Určete s přesností na pět desetinných míst výraz $\sqrt{25{,}001}$.*

Řešení: Zvolme funkci $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ a zkoumejme její rozvoj v $x_0 = 25$. Vypočteme si první derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\,, \quad f(x_0) = 5\,, \quad f'(x_0) = 0{,}1\,.$$

Z Taylorova rozvoje prvního řádu (Věta 6.2) máme

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 5 + 0{,}1 \cdot 0{,}001 = 5{,}000\,10\,.$$

Příklad 6.9. *Určete s přesností na čtyři desetinná místa výraz* $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Řešení: Budeme uvažovat funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ v bodě $x_0 = 1$. Obdobně jako v předchozím příkladu dostáváme

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad f'(x_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Dále máme $f(x_0) = \frac{\pi}{4}$. Z Taylorova rozvoje prvního řádu máme opět

$$\begin{aligned} f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \approx \\ &\approx \frac{3{,}1416}{4} + 0{,}0250 = 0{,}7854 + 0{,}0250 = 0{,}8104\,. \end{aligned}$$

Výsledek je tedy $\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx 0{,}8104\,\mathrm{rad}$.

Příklad 6.10. *Určete s přesností na tři desetinná místa výraz* $\sin 29^\circ$.

Řešení: Můžeme vyjít z toho, že známe $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Výpočet provedeme v radiánech, protože derivace $\sin x$ je $\cos x$, jen když x zadáváme v radiánech (s využitím věty o derivaci složené funkce to podrobně zdůvodněte). Proto zvolíme $x_0 = \frac{30}{360} 2\pi$, dále $x - x_0 = -\frac{1}{360} 2\pi$. Dostáváme

$$f'(x) = \cos x\,, \quad f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

S využitím Věty 6.2 máme

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} \approx 0{,}5 - \frac{1{,}73}{2} \cdot \frac{3{,}14}{180} \approx 0{,}485\,.$$

Výsledek je tedy $\sin 29^\circ \approx 0{,}485$.

Příklad 6.11. *Naměřená hodnota délky strany čtverce je* $x = 2{,}40\,\mathrm{m} \pm 0{,}05\,\mathrm{m}$. *Určete absolutní a relativní chybu, s jakou lze určit obsah čtverce.*

Řešení: Obsah čtverce určíme ze vztahu $S = x^2$. Je-li $x_0 = 2{,}40\,\mathrm{m}$ a $x - x_0 = 0{,}05\,\mathrm{m}$, máme pro derivaci obsahu

$$S'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 2{,}40 = 4{,}8\,.$$

Z Věty 6.2 dostáváme

$$S(x) - S(x_0) \approx S'(x_0)(x - x_0) = 2x_0(x - x_0) = 4{,}8 \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}^2 = 0{,}24\,\mathrm{m}^2\,.$$

Pro relativní chybu dostáváme

$$\eta_S = \frac{S(x) - S(x_0)}{S(x_0)} = \frac{2x_0(x - x_0)}{x_0^2} = 2\frac{x - x_0}{x_0} = 2\frac{0{,}05}{2{,}4} \approx 0{,}042\,.$$

Absolutní chyba je $0{,}24\,\mathrm{m}^2$, relativní chyba je 0,042, tj. 4,2 %.

Příklad 6.12. *Určete Taylorův rozvoj funkce* $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ *v bodě* $x = 0$.

Řešení: Existují dvě metody, jak tento příklad řešit, ukážeme si obě dvě. První je z definice Taylorova rozvoje. Vypočteme si derivace v nule

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,, \quad f''(x) = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}\,, \quad f''' = \frac{\sin x(5+\sin^2 x)}{\cos^4 x}\,,$$

$$f(0) = 1\,, \quad f'(0) = 0\,, \quad f''(0) = 1\,, \quad f'''(0) = 0\,.$$

Dosazením do Taylorova vzorce máme

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\,.$$

Druhá možnost je následující. Předpokládáme rozvoj ve tvaru

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)\,.$$

Dosazením rozvoje kosinu máme

$$1 = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)(a + bx + cx^2 + dx^3) + o(x^3) =$$
$$= a + bx + \left(c - \frac{a}{2}\right)x^2 + \left(d - \frac{b}{2}\right)x^3 + o(x^3)\,.$$

Porovnáním koeficientů dostáváme $a = 1$, $b = d = 0$, $c = \frac{1}{2}$, což dává stejný Taylorův rozvoj jako v prvním případě. Poznamenejme, že členy, ve kterých se $o(x^3)$ násobí buď konstantou nebo x^n, $n > 0$ můžeme zahrnout do členu $o(x^3)$ (patří totiž do této třídy, protože příslušné výrazy po vydělení x^3 jdou k nule stejně rychle nebo rychleji).

Příklad 6.13. *Určete Taylorův rozvoj funkce* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *v bodě* $x = 0$ *do řádu* x^5.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu. Funkce tangens je funkce lichá (je podílem liché funkce – sinu – a sudé funkce – kosinu). Proto v rozvoji budou pouze členy s lichými mocninami x. Budeme tedy předpokládat, že rozvoj je ve tvaru

$$\operatorname{tg} x = f(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\,.$$

Rozvoje funkcí sinus a kosinus jsou

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\,,\\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\,.\end{aligned}$$

Vynásobením rovnice $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ kosinem dostáváme rovnici

$$[ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)] \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right] = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\,.$$

Roznásobením dostáváme

$$ax + \left(-\frac{a}{2} + b\right) x^3 + \left(\frac{a}{24} - \frac{b}{2} + c\right) x^5 + o(x^5) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\,.$$

Opět poznamenejme, že členy, ve kterých se $o(x^5)$ něčím násobí, lze zahrnout do výrazu $o(x^5)$. Porovnáním příslušných členů předchozí rovnice získáváme

$$a = 1\,, \quad b - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6}\,, \quad \frac{a}{24} - \frac{b}{2} + c = \frac{1}{120}\,.$$

Odsud

$$a = 1\,, \quad b = \frac{1}{3}\,, \quad c = \frac{56}{120} = \frac{2}{15}\,.$$

Taylorův rozvoj tedy je

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\,.$$

Příklad 6.14. *Určete Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ v bodě $x = 0$ do řádu x^3.*

Řešení: Známe rozvoj sinu v nule

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)\,.$$

V tomto příkladu zmíněný rozvoj použijeme dvakrát. Za y dosadíme rozvoj sinu, tedy $y = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

$$\sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) =$$
$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,.$$

V závorce, která byla umocněna na třetí, jsme uvažovali pouze první člen. Ostatní členy jsme zanedbali, protože patří do třídy $o(x^3)$.

Příklad 6.15. *Určete Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$, $a > 0$ v bodě $x = 0$ do řádu x^2.*

Řešení: Vyjdeme z Taylorova rozvoje mocniny.

$$(1 + y)^p = 1 + \binom{p}{1} y + \binom{p}{2} y^2 + o(y^2) = 1 + py + \frac{p(p-1)}{2} y^2 + o(y^2)\,.$$

Taylorův rozvoj m-té odmocniny tedy je

$$\sqrt[m]{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{m}} = 1+\frac{y}{m}+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2}y^2+o(y^2) = 1+\frac{y}{m}+\frac{1-m}{2m^2}y^2+o(y^2)\,. \tag{1}$$

Zadanou funkci si přepíšeme

$$f(x) = \sqrt[m]{a^m+x} = \sqrt[m]{a^m\left(1+\frac{x}{a^m}\right)} = a\sqrt[m]{1+\frac{x}{a^m}}$$

a výraz $y = \frac{x}{a^m}$ dosadíme do rovnice (1).

$$\sqrt[m]{1+\frac{x}{a^m}} = 1+\frac{x}{ma^m}+\frac{1-m}{2m^2}\frac{x^2}{a^{2m}}+o(x^2)\,.$$

Funkce f je pak rovna a-násobku předchozího výrazu.

$$f(x) = a+\frac{x}{ma^{m-1}}-\frac{m-1}{2m^2}\frac{x^2}{a^{2m-1}}+o(x^2)\,.$$

Příklad 6.16. *Pomocí Taylorova rozvoje určete limitu* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\ln(1+x)-\cos x+1-x}$.

Řešení: Využijeme rozvojů

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\,,\quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\,,$$
$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\,.$$

Dosazením do rovnice máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\ln(1+x)-\cos x+1-x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}-x+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+1-x+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 6.17. *Pomocí Taylorova rozvoje určete limitu* $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Řešení: Ve jmenovateli je x^4, budeme proto určovat rozvoje do řádu x^4. Z rozvoje pro exponenciálu

$$e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$$

máme pro $y = -\frac{x^2}{2}$

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+o(x^4) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\,.$$

Dále použijeme rozvoj kosinu

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\,.$$

Dosazením těchto rozvojů získáme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8}}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}\,.$$

Příklad 6.18. *Pomocí Taylorova rozvoje určete limitu* $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$.

Řešení: Limita je typu $\infty - \infty$. Abychom mohli využít Taylorova rozvoje, musíme v odmocninách dostat výrazy $\frac{1}{x}$. Vytkneme tedy z obou výrazů x^6 a částečně tento výraz odmocníme. Dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - \sqrt[6]{x^6\left(1 - \frac{1}{x}\right)}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}\right)\,.$$

Musíme tedy najít Taylorovy rozvoje pro funkce $\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}}$ a $\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}$. Využijeme výsledku příkladu 6.15

$$\sqrt[m]{1 + y} = 1 + \frac{y}{m} + o(y^2)\,,$$

pro $y = \pm\frac{1}{x}$ tedy dostáváme

$$\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\,, \quad \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

Limita je tedy rovna

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right) = \lim_{x\to\infty} x \left[1 + \frac{1}{6x} - \left(1 - \frac{1}{6x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \frac{1}{3x} = \frac{1}{3}\,.$$

Příklad 6.19. *Pomocí Taylorova rozvoje určete limitu* $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$.

Řešení: Ve jmenovateli zlomku je x^3, budou nás proto zajímat rozvoje do x^3. Rozvoj sinu hyperbolického určíme s pomocí rozvoje exponenciály

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3)\,.$$

Použitím předchozího vztahu pro $z = \pm y$ dostáváme

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} - \left(1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right)}{2} + o(y^3) =$$
$$= y + \frac{y^3}{6} + o(y^3)\,.$$

Využijeme výsledku příkladu 6.13

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

a dosazením $y = \operatorname{tg} x$ získáme

$$\sinh(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\,.$$

Pro limitu tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{2} - x + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}\,.$$

6.3 Literatura

Pro teorii doporučujeme [5, 6]. Jako zásobárnu příkladů pak můžete využít [6, 12, 7] nebo [2], odkud pochází většina příkladů v tomto textu. Použít můžete také detailnější výuková videa [4].

6.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 6.20. *Vypočítejte s přesností na 4 desetinná místa.*

a) $\sqrt[3]{8{,}006}$,

b) $\ln 1{,}002$.

Příklad 6.21. *Určete Taylorův rozvoj šestého řádu funkce* $\ln(\cos x)$ *v 0.*

Příklad 6.22. *Určete Taylorův rozvoj pátého řádu funkce* $\frac{1}{1-x}$ *v 0.*

Příklad 6.23. *Určete Taylorův rozvoj třetího řádu funkce* $\operatorname{arctg} x$ *v 0.*

Příklad 6.24. *Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte limity*

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}\,,$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}\,,$$

c)
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)\ ,$$

Příklad 6.25. *Energie volné částice v teorii relativity je dána vztahem*

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

kde klidová hmotnost m_0 *a rychlost světla ve vakuu* c *jsou konstanty a* v *je rychlost částice. Ukažte, že pro malé rychlosti* $v \ll c$ *představuje veličina* $T = E - m_0c^2$ *kinetickou energii newtonovské mechaniky, tj. je rovna* $\frac{1}{2}mv^2$.

7 Průběh funkce

7.1 Teorie

Při vyšetřování průběhu funkce budeme určovat zejména:

1. Definiční obor, obor spojitosti, limity (i jednostranné) v bodech nespojitosti a v hraničních bodech def. oboru.
2. Sudost, lichost, periodicitu.
3. Množiny monotonie funkce.
4. Body lokálních a globálních extrémů.
5. Obor hodnot, omezenost funkce.
6. Nulové body, případně další význačné body.
7. Konvexita, konkávnost, inflexní body.
8. Asymptoty.

Následující definice připomíná sudost a lichost a definuje periodicitu funkce.

Definice 7.1. *Funkce f je* sudá*, pokud pro každé $x \in D_f$ je $-x \in D_f$ a platí $f(-x) = f(x)$. Funkce f je* lichá*, pokud pro každé $x \in D_f$ je $-x \in D_f$ a platí $f(-x) = -f(x)$. Funkce je* periodická*, jestliže existuje kladné číslo p, pro které platí, že pro $x \in D_f$ je také $x \pm p \in D_f$ a dále $f(x \pm p) = f(x)$.*

Nyní si zadefinujeme neklesající, nerostoucí, rostoucí a klesající funkci (výrazy v závorkách postupně odpovídají definicím výrazů v první závorce).

Definice 7.2. *Řekneme, že funkce f je v bodě $c \in \mathbb{R}$* neklesající *(*nerostoucí*,* rostoucí*,* klesající*), pokud existuje $\Delta > 0$ tak, že $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$, $f(x) < f(c)$, $f(x) > f(c)$) pro $x \in (c - \Delta, c)$ a $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$, $f(x) > f(c)$, $f(x) < f(c)$) pro $x \in (c, c + \Delta)$. Funkce nerostoucí a neklesající nazýváme* monotónní*, funkce rostoucí a klesající nazýváme* ryze monotónní*.*

Zadefinujeme extrémy funkce. Věta říká, že funkce má v daném bodě lokální maximum, když existuje nějaké okolí tohoto budu, pro jehož všechny body je funkce menší nebo rovna funkční hodnotě v daném bodě (obdobně pro minimum). U ostrého lokálního maxima a minima je nerovnost ostrá.

Definice 7.3. *Řekneme, že funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$* lokální maximum *(*lokální minimum*,* ostré lokální maximum*,* ostré lokální minimum*), jestliže existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $x \in (c - \Delta, c + \Delta)$, $x \neq c$ platí $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$, $f(x) < f(c)$, $f(x) > f(c)$).*

Obdobná je definice globálních extrémů, jen nerovnost ohledně funkčních hodnot musí platit pro všechny body z dané množiny, na které globální extrém zkoumáme.

Definice 7.4. *Řekneme, že funkce f má v bodě $c \in M \subset D_f$* globální maximum *(*globální minimum*,* ostré globální maximum*,* ostré globální minimum*), jestliže pro všechny $x \in M$, $x \neq c$ platí $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c)$, $f(x) < f(c)$, $f(x) > f(c))$.*

Následující věta udává, jak pomocí derivace určit zda je funkce rostoucí či klesající, a určuje vlastnosti bodů, ve kterých je extrém.

Věta 7.5. *i) Je-li $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$, je funkce f v bodě c rostoucí (klesající).*

ii) Je-li funkce f spojitá na intervalu I a je-li $f'(x) > 0$ $(f'(x) \geq 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) \leq 0)$ pro všechna x z vnitřku intervalu I, pak je rostoucí (neklesající, klesající, nerostoucí) na I.

iii) Má-li f v c lokální extrém, pak buď derivace f v tomto bodě neexistuje nebo je rovná nule.

iv) Má-li f v bodě $c \in M$ globální extrém na M, pak je bod c buď hraničním bodem M nebo je v něm derivace rovná nule nebo derivace neexistuje.

Povahu extrému diferencovatelné funkce (zda jde o minimum nebo maximum) můžeme určit buď ze znamének derivace vlevo a vpravo od daného bodu nebo z následující věty. Zkoumá se nejnižší netriviální derivace v daném bodě. Podmínka se nejčastěji používá v případě, že druhá derivace je nenulová a první je nulová. V tom případě si podmínky pro minimum a maximum můžeme snadno zapamatovat z derivací funkcí $y = x^2$ a $y = -x^2$ v nule – první z funkcí má druhou derivaci rovnou 2 (tedy kladnou) a v nule má minimum; druhá z nich ji má rovnou -2 a v nule má maximum.

Věta 7.6. *Nechť pro nějaké přirozené n je $f^{(k)}(c) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$. Potom platí:*

i) je-li n sudé, má f v bodě c ostrý lokální extrém a to minimum pro $f^{(n)}(c) > 0$ a maximum pro $f^{(n)}(c) < 0$.

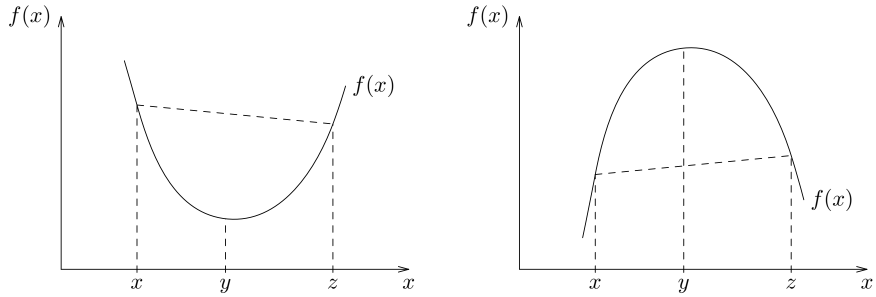
ii) je-li n liché, je f v bodě c ryze monotónní, a to rostoucí pro $f^{(n)}(c) > 0$ a klesající pro $f^{(n)}(c) < 0$.

Následuje definice konvexity a konkávnosti funkce.

Definice 7.7. *Řekneme, že funkce f je konvexní (konkávní, ryze konvexní, ryze konkávní) na intervalu I, jestliže pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$ leží bod $[y, f(y)]$ pod spojnicí bodů $[x, f(x)]$ a $[z, f(z)]$ nebo na ní (nad spojnicí nebo na ní, pod spojnicí, nad spojnicí). Jinak zapsáno*

$$K = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = L \quad (K \geq L, K < L, K > L)\,.$$

Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ inflexní bod*, je-li v tomto bodě spojitá a buď v něm nemá vlastní derivaci, nebo přechází z konvexní funkce na konkávní (z jedné strany tečny na druhou).*



(a) Konvexní funkce   (b) Konkávní funkce

Obrázek 24: Ilustrace pojmu konvexní (vlevo) a konkávní (vpravo) funkce, viz Definici 7.7

Definice je ilustrována na obr. 24. Pro lepší zapamatování můžeme využít mnemotechnickou pomůcku „Do konkávní funkce kávu nenaliješ.“ ilustrující tvar funkcí.

Následující věta dává návod, jak určit, jestli je funkce konvexní nebo konkávní.

Věta 7.8. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu I a má ve všech vnitřních bodech tohoto intervalu druhou derivaci. Je-li pro všechna tato x $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$, $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$) je funkce f na intervalu I konvexní (konkávní, ryze konvexní, ryze konkávní).*

Další věta je obdobou Věty 7.6 určuje vlastnosti inflexního bodu a dává návod, co dělat v případě, kdy vyšší derivace jsou nulové.

Věta 7.9. *Je-li c inflexním bodem funkce f a $f''(c)$ existuje, pak je $f''(c) = 0$. Je-li pro nějaké $n \geq 2$ $f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$ a $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, pak pro n sudé je c inflexním bodem f a pro n liché je f v c ryze konvexní (ryze konkávní), je-li $f^{(n+1)}(c) > 0$ ($f^{(n+1)}(c) < 0$).*

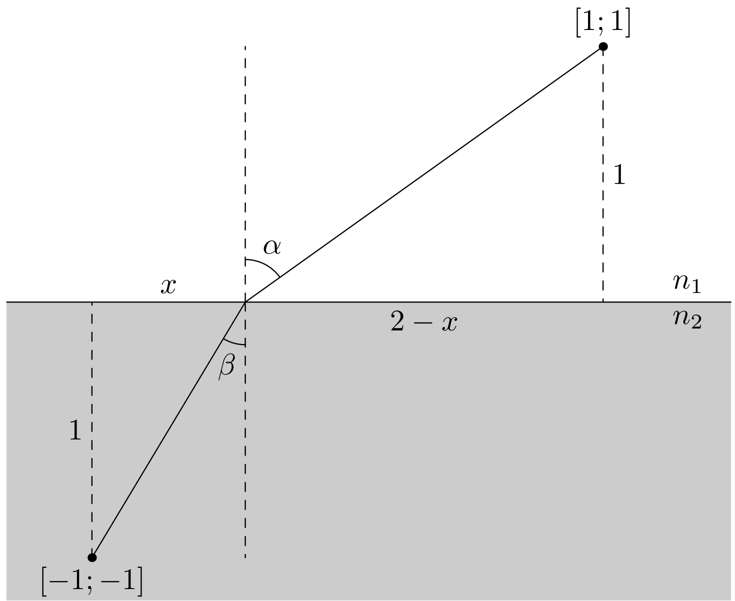
Poslední definice se týká asymptot funkce.

Definice 7.10. *Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to \infty$ ($x \to -\infty$), je-li*

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0 \quad \big(\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0\big) .$$

Funkce má v bodě a svislou asymptotu, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$ je nevlastní.

Následující věta nám dává návod, jak asymptotu určit.



Obrázek 25: Obrázek k příkladu 7.12 – odvození Snellova zákona

Věta 7.11. *Aby přímka $y = kx + q$ byla asymptotou funkce f pro $x \to \infty$ ($x \to -\infty$), je nutné a stačí, aby platilo*

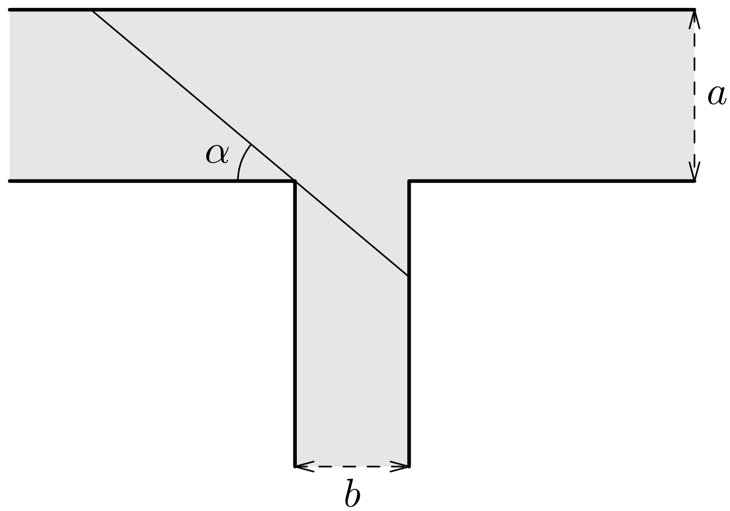
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R}$$
$$(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R})\,.$$

7.2 Příklady

Příklad 7.12. *Optický paprsek se pohybuje rozhraním dvou látek z bodu* $[1; 1]$ *do bodu* $[-1; -1]$. *Pro* $y > 0$ *je index lomu* n_1, *pro* $y < 0$ *je index lomu* n_2. *Fermatův princip říká, že paprsek se pohybuje po takové dráze, aby z počátečního bodu do koncového bodu dorazil za nejkratší možnou dobu. Z Fermatova principu odvoďte Snellův zákon lomu.*

Řešení:

Nechť rychlost světla ve vakuu je c. Rychlost světla v prostředí s indexem lomu n je pak $v = \frac{c}{n}$. Zjevně trajektorie světla v každém z prostředí bude rovná. Dráhu (viz obr. 25) rozdělíme na dva úseky, jejichž délky vypočítáme z Pythagorovy věty: $s_1 = \sqrt{(2-x)^2 + 1}$, $s_2 = \sqrt{x^2 + 1}$. Celkový čas t určíme



Obrázek 26: Obrázek k příkladu 7.13 – řeka a kanál s kládou

jako součet časů t_1 a t_2, každý z nich obdržíme z rovnice $t_j = \frac{s_j}{v_j}$, $j = 1, 2$. Máme

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{(2-x)^2+1}}{c} n_1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{c} n_2 \,.$$

Tento čas se budeme snažit minimalizovat v závislosti na x, tedy poloze bodu, kde se paprsek láme. Protože funkce t je spojitá, nabývá minima v bodě, kde je její derivace nulová. (Krajními body intervalu jsou $x = -\infty$ a $x = +\infty$, pro které doba průchodu paprsku zjevně diverguje.) Derivace funkce t podle x je

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1}{c} \frac{(2-x)(-1)}{\sqrt{(2-x)^2+1}} + \frac{n_2}{c} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \,.$$

Z obr. 25 a definice sinu vidíme, že $\sin\alpha = \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$ a $\sin\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Proto máme

$$-\frac{n_1}{c} \sin\alpha + \frac{n_2}{c} \sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} \,.$$

Dostali jsme tedy Snellův zákon.

Příklad 7.13. *Kolmo k řece o šířce a je přiveden kanál o šířce b. Jakou maximální délku může mít kláda, která se dá splavit z řeky do tohoto kanálu?*

Řešení: Situace je schematicky znázorněna na obr. 26. Řeka (ve vodorovném směru) má šířku a a kanál (svislý) má šířku b. Na obrázku je šikmou čarou znázorněna kláda, která se směrem proudu řeky svírá úhel α.

Největší délka klády je taková, kdy kláda v kritickém místě dosahuje od vzdálenějšího břehu řeky ke vzdálenějšímu břehu kanálu. Označme délku části šikmé úsečky v řece jako ℓ_1 a délku části úsečky v kanálu jako ℓ_2. Pak $\sin\alpha = \frac{a}{\ell_1}$ a $\cos\alpha = \frac{b}{\ell_2}$. Odsud máme pro délku celé úsečky

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}\,.$$

Délka klády nemůže být větší než minimální délka této úsečky pro všechny úhly od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Budeme tedy minimalizovat ℓ v závislosti na α. Výraz zderivujeme a položíme rovný nule.

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{a}{\sin^2\alpha}\cos\alpha - \frac{b}{\cos^2\alpha}(-\sin\alpha) = 0\,.$$

Odsud

$$a\cos^3\alpha = b\sin^3\alpha \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\,.$$

Díky vztahu

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

máme

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,,\quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\,\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,.$$

Po dosazení do vztahu pro ℓ dostáváme

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} = a\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} + b\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \\ &= (aa^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b)\sqrt{1 + a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}} = b^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{1}{3}}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,.\end{aligned}$$

Největší možná délka klády je tedy $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Příklad 7.14. *Určete, kde je funkce $f(x) = x^3 - 7x - 6$ konvexní a kde konkávní.*

Řešení: Jde o spojitou funkci, konvexitu a konkávnost proto určíme ze druhé derivace. Dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 7\,,\\ f''(x) &= 6x = 0\,.\end{aligned}$$

Inflexním bodem je tedy $x = 0$. Pro $x < 0$ má druhá derivace záporné znaménko, funkce je tedy konkávní na intervalu $(-\infty; 0)$. Pro $x > 0$ má $f''(x)$ kladné znaménko, funkce je tedy konvexní na $(0; \infty)$.

Příklad 7.15. *Určete, kde je funkce $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x + 1$ konvexní a kde konkávní.*

Řešení: Opět jde o spojitou funkci, bude nás tedy zajímat znaménkou druhé derivace.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 9x^2 - 2x + 2\,, \\ f''(x) &= 12x^2 + 18x - 2\,. \end{aligned}$$

Rovnice $f''(x) = 0$ vede na $6x^2+9x-1 = 0$, jejímiž kořeny jsou $x_{1,2} = \frac{-9\pm\sqrt{105}}{12}$. Druhá derivace je tedy rovna

$$f''(x) = 12(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Její znaménko určíme z následující tabulky. Uvažujme $x_1 < x_2$.

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Funkce je tedy konvexní na intervalech $\left(-\infty, \frac{-9-\sqrt{105}}{12}\right)$ a $\left(\frac{-9+\sqrt{105}}{12}, \infty\right)$ a konkávní na intervalu $\left(\frac{-9-\sqrt{105}}{12}, \frac{-9+\sqrt{105}}{12}\right)$.

Příklad 7.16. *Určete, kde je funkce $f(x) = -x^3 + \frac{1}{x}$ konvexní a kde konkávní.*

Řešení: Funkce je nespojitá v $x = 0$, přičemž $\lim_{x\to 0-} = -\infty$ a $\lim_{x\to 0+} = \infty$. Na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ funkce spojitá je, takže na nich můžeme určit konvexitu a konkávnost pomocí znaménka druhé derivace.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 - \frac{1}{x^2}\,, \\ f''(x) &= -6x + \frac{2}{x^3}\,. \end{aligned}$$

Inflexní body tedy určíme z rovnice

$$-6x + \frac{2}{x^3} = 0 \quad\Rightarrow\quad 3x^4 = 1 \quad\Rightarrow\quad \left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

Inflexními body tedy jsou $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ a druhá derivace je rovna

$$f''(x) = \frac{-6\left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{x^3}\,.$$

Její znaménko určíme opět z následující tabulky. Vzhledem k tomu, že výraz $x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ je vždy kladný, může se znaménko druhé derivace měnit pouze v bodech $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ a $x = 0$.

Funkce je tedy konvexní na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ a $(0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ a konkávní na intervalech $(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 0)$ a $(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty)$.

	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$	$(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 0)$	$(0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$	$(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty)$
$x - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$-$	$+$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Příklad 7.17. *Najděte asymptoty funkce* $f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$.

Řešení: Postupujeme podle Věty 7.11. Nejdříve najdeme limity

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 2\,.$$

Proto $k = 2$. Dále vypočítáme limity

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+3x+2}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1\,.$$

Máme $q = 1$. Asymptotou pro x jdoucí do ∞ i $-\infty$ je přímka $y = 2x + 1$.

Protože je funkce nespojitá v bodě $x = -1$, určíme také, jestli nemá svislou asymptotu. Určujeme limitu zleva i zprava pro x blížící se tomuto bodu. Čitatel zlomku v $f(x)$ jde v obou případech k jedné. Jmenovatel je pro x menší než -1 záporný, pro x větší než -1 kladný. Proto

$$\lim_{x\to-1\pm} \frac{2x^2+3x+2}{x+1} = \pm\infty\,.$$

Svislou asymptotou je tedy přímka $x = 1$.

Příklad 7.18. *Najděte asymptoty funkce* $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$.

Řešení: Opět využijeme Větu 7.11. Najdeme limity

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+7}{x(x+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} = 0\,.$$

Tedy $k = 0$. Pokračujeme limitami

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+7}{x+3} - 0x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2+\frac{7}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 2\,.$$

Máme $q = 2$. Asymptoty tedy jsou $y = 2$.

Najdeme ještě svislé asymptoty, protože funkce je nespojitá v $x = -3$. Čitatel jde v limitě $\lim_{x\to -3}$ k jedné. Pro limitu zprava je jmenovatel kladný, čitatel záporný. Proto

$$\lim_{x\to -3\pm} \frac{2x+7}{x+3} = \pm\infty\,.$$

Svislou asymptotou je přímka $x = -3$.

Příklad 7.19. *Najděte asymptoty funkce* $f(x) = \left|\frac{x^2+4}{x+1}\right|$.

Řešení: Opět využijeme Větu 7.11. Funkci si přepíšeme $f(x) = \frac{x^2+4}{|x+1|}$. Využijeme toho, že pro x blížící se nekonečnu platí $|x+1| = x+1$ a pro x blížící se $-\infty$ platí $|x+1| = -x-1$. Máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{x|x+1|} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{x|x+1|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{-x(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(-1-\frac{1}{x}\right)} = \\ = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{4}{x^2}}{-1-\frac{1}{x}} = -1\,.$$

Pro $x \to \infty$ máme $k = 1$, pro $x \to -\infty$ máme $k = -1$. Vypočítáme další limity

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+4}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+4}{x+1} = -1\,,\\
\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+4}{-x-1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+4}{-x-1} = 1\,.
\end{aligned}$$

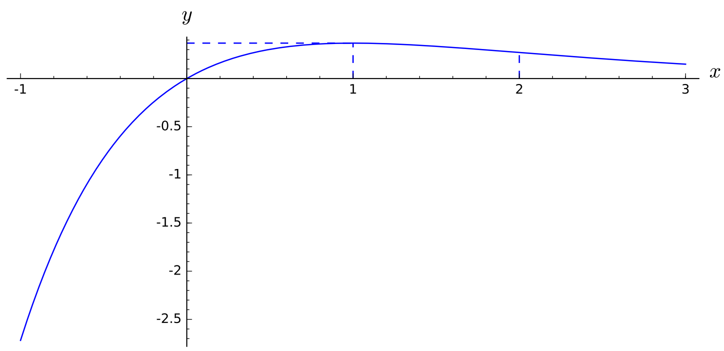
Tedy pro $x \to \infty$ je $q = -1$, pro $x \to -\infty$ je $q = 1$. Asymptoty tedy jsou $y = x - 1$ pro $x \to \infty$ a $y = -x + 1$ pro $x \to -\infty$.

Dále určíme svislou asymptotu. Pro $x \to -1$ jde čitatel zlomku $\frac{x^2+4}{|x+1|}$ k 5, jmenovatel je stále kladný a jde k nule. Proto

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4}{|x+1|} = \infty\,.$$

Svislá asymptota je $x = -1$.

Příklad 7.20. *Určete průběh funkce* $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.



Obrázek 27: Graf funkce $x\,\mathrm{e}^{-x}$

Řešení: Funkce má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$, spojitá je také na celém $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Funkce není ani sudá, ani lichá. Není periodická. Body podezřelé z extrému zjistíme položením derivace rovné nule.

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1\,.$$

Dosazením některého čísla z daného intervalu do derivace a zjištěním jejího znaménka určíme, kde je funkce rostoucí a kde klesající. Na intervalu $(-\infty, 1)$ je rostoucí, $(1, \infty)$ je klesající. Proto v 1 je lokální i globální maximum. Funkční hodnota je $f(1) = \frac{1}{e}$. Obor hodnot je $H(f) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$, funkce je shora omezená. Nulový bod je $x = 0$. Inflexní body určíme z druhé derivace.

$$f''(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\,.$$

Ze znamének druhé derivace máme, že funkce je konkávní na $(-\infty, 2)$ a konvexní na $(2, \infty)$. Inflexní bod je 2. Nakonec určíme asymptoty

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x} = \infty\,.$$

Máme asymptotu $y = 0$ pro $x \to \infty$. Graf funkce je znázorněn na obrázku 27.

Příklad 7.21. *Určete průběh funkce* $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

Řešení: Definiční obor funkce je $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, funkce je spojitá také na $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Dále určíme limity v plus a mínus nekonečnu a také v bodě nespojitosti.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}x\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to-\infty}x\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=-\infty\,.$$

Limity zleva a zprava v bodě $x=1$ jsou typu $\frac{a}{0}$, jmenovatel je kromě bodu $x=1$ vždy kladný, čitatel se limitně blíží 2^3. Proto

$$\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1-}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty\,.$$

Funkce zjevně není sudá, lichá ani periodická. K určení množin monotonie a extrémů potřebujeme vypočítat první derivaci. Postupujeme podle věty o derivaci podílu.

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{(x+1)^2(x-1)[3(x-1)-2(x+1)]}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}\,.$$

Derivace se tedy může měnit v bodech $x=-1$, $x=1$ a $x=5$. V následující tabulce jsou zapsány znaménka derivace na příslušných intervalech.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,5)$	$(5,\infty)$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$

Odsud vidíme, že funkce je rostoucí (derivace je kladná) na intervalech $(-\infty,1)$ a $(5,\infty)$ a klesající na intervalu $(1,5)$. V bodě $x=5$ je lokální minimum $f(5)=\frac{6^3}{4^2}=\frac{2^3 3^3}{2^4}=\frac{27}{2}$. V bodě $x=1$ lokální maximum funkce nemá, protože zde není definovaná. Protože $\lim_{x\to-\infty}=-\infty$ a $\lim_{x\to1}=\infty$, funkce nemá globální maximum ani globální minimum.

Obor hodnot je $\mathbb{R}$ (protože na intervalu $(-\infty,1)$ je funkce spojitá), funkce není shora ani zdola omezená.

Nulový bod získáme položením $f(x)=0$, obdržíme bod $x=-1$. Dále nás může zajímat průsečík s osou y, který dostaneme položením $x=0$. Získáme $f(0)=1$.

K určení konvexity a konkávnosti spočítáme druhou derivaci.

$$
\begin{aligned}
f''(x) = \frac{2(x+1)(x-5)(x-1)^3 + (x+1)^2(x-1)^3}{(x-1)^6} -& \\
- \frac{3(x+1)^2(x-5)(x-1)^2}{(x-1)^6} &= \\
= \frac{(x+1)(x-1)^2[2(x-5)(x-1) + (x+1)(x-1) - 3(x+1)(x-5)]}{(x-1)^6} &= \\
= \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}&\,.
\end{aligned}
$$

Druhá derivace tedy může měnit znaménko v $x = \pm 1$. Její znaménka na intervalech opět ukazuje následující tabulka.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)^4$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$

Funkce je tedy konkávní (druhá derivace je záporná) na intervalu $(-\infty,-1)$, konvexní (druhá derivace je kladná) na intervalech $(-1,1)$ a $(1,\infty)$. Pozor, nemůžeme říct, že je konvexní na intervalu $(-1,\infty)$, protože v bodě $x = 1$ funkce diverguje a není v něm tudíž spojitá!

Nakonec určíme asymptoty.

$$
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1\,.
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) &= \\
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 3x^3 + 3x + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} &= \\
= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(5 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} &= 5\,.
\end{aligned}
$$

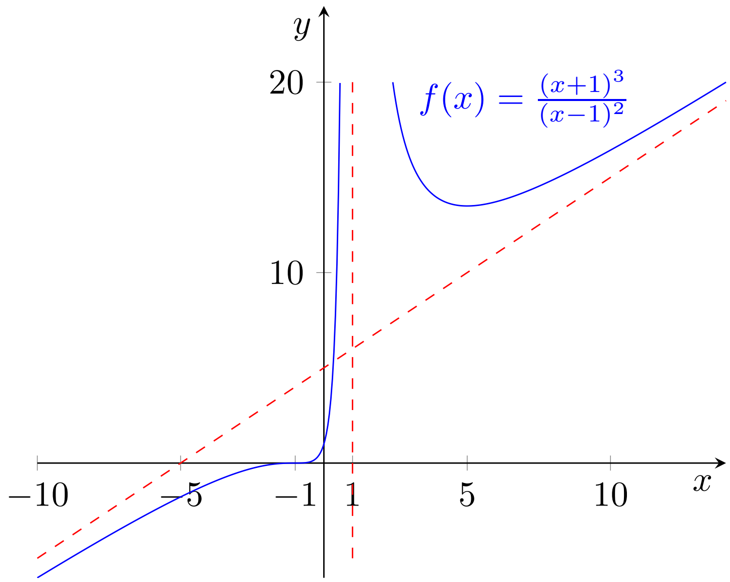
Asymptota tedy je $y = x + 5$, a to jak pro $x \to \infty$, tak pro $x \to -\infty$. Svislá asymptota je $x = 1$.

Graf je na obr. 28.

Příklad 7.22. *Určete průběh funkce* $f(x) = (1 + x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení: Funkce je zjevně definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$. Limity v plus a mínus nekonečnu jsou

$$
\lim_{x\to\pm\infty} (1 + x^2)\mathrm{e}^{-x^2} = 0\,,
$$



Obrázek 28: Graf funkce $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

protože exponenciála roste rychleji než libovolný polynom. Funkce je sudá, protože

$$f(-x) = [1 + (-x)^2]\mathrm{e}^{-(-x)^2} = (1 + x^2)\mathrm{e}^{-x^2} = f(x)\,.$$

Není periodická. První derivace je rovna

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} + (1 + x^2)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = -2x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Bod podezřelý z extrému je tedy $x = 0$. Určíme znaménka derivace v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Uvědomíme si, že exponenciála je vždy kladná, proto je kladný i výraz e^{-x^2}.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
x^3	$-$	$+$
e^{-x^2}	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$

Funkce je tedy rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a klesající na $(0, \infty)$. Funkční hodnota v nule je $f(0) = 1$, bod $[0; 1]$ je tedy lokálním a globálním maximem. Protože víme, že limity v plus a mínus nekonečnu jsou 0, je obor hodnot $H_f = (0, 1]$. Funkce je omezená (tj. shora i zdola). Nulové body funkce nemá. Abychom určili konvexitu a konkávnost, vypočítáme druhou derivaci.

$$f''(x) = -6x^2\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^3(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = -2x^2(3 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Položíme-li ji rovnou nule, najdeme body, které jsou podezřelé z toho, že mohou být inflexní $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_1 < x_2$. Druhou derivaci si přepíšeme jako

$$f''(x) = 4x^2(x - x_1)(x - x_2)\mathrm{e}^{-x^2}$$

a budeme zkoumat její znaménko v intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$, $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ a $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$. Využijeme toho, že x^2 i e^{-x^2} jsou na všech těchto intervalech kladné.

	$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$	$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$	$(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$	$(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
e^{-x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Funkce má tedy kladnou druhou derivaci na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ a $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, je na nich tedy konvexní. Nekladnou derivaci má na intervalu $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, je zde tedy konkávní. Můžeme dokonce říct, že je na tomto intervalu ryze konkávní. To neplyne z Věty 7.8, protože na tomto intervalu nemá všude zápornou druhou derivaci (neplatí to v bodě $x = 0$, kde je druhá derivace nulová). Tento výsledek bychom mohli dostat z Věty 7.9. Inflexními body jsou tedy pouze body x_1 a x_2.

Nakonec určíme asymptoty.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + x^2}{x}\mathrm{e}^{-x^2} = 0\,,$$

platí to opět protože exponenciála roste rychleji než polynom. Obdobně určíme i limity

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} (1 + x^2)\mathrm{e}^{-x^2} = 0\,,$$

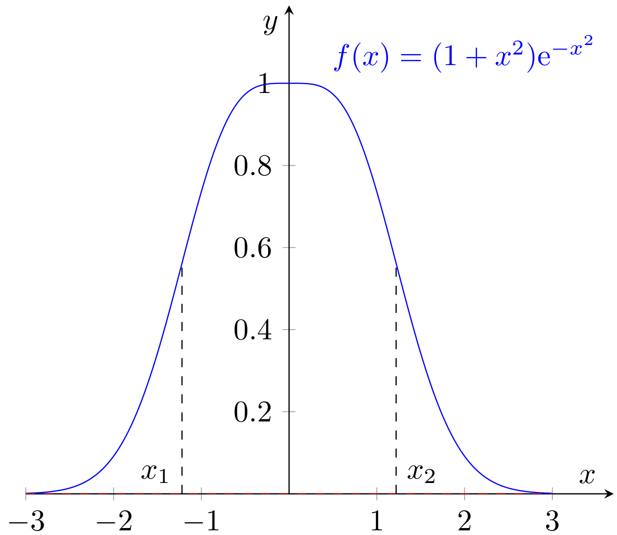
Máme tedy $k = q = 0$ a asymptotou jak pro $x \to -\infty$, tak pro $x \to \infty$ je přímka $y = 0$. Svislou asymptotu funkce nemá. Graf je na obr. 29.

7.3 Literatura

Teorie je vysvětlena např. v [5, 6, 7, 12]. Dostatek příkladů lze nalézt zejména v [2], odkud jsou některé příklady v tomto textu, dále také v [6, 7, 12]. Použít můžete také detailnější výuková videa [4].

7.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 7.23. *Rozhodněte, zda existují extrémy (lokální i globální) dané funkce na dané množině. Jestliže ano, určete body těchto extrémů a typy extrémů.*



Obrázek 29: Graf funkce $(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$

a) $f(x) = x^2 \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x},\ x \in (0, \infty)$,

c) $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x},\ x \in [0, \infty)$.

Příklad 7.24. *Spektrální hustota $\mathcal{E}(\omega, T)$ určuje energii, která připadá na jednotkový interval kruhové frekvence ω při rovnovážném záření černého tělesa. Podle Wienova zákona má tvar*

$$\mathcal{E}(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T)\,.$$

Dokažte, že frekvence ω, pro níž je při dané teplotě spektrální hustota maximální, je přímo úměrná absolutní teplotě T.

Příklad 7.25. *Zjistěte, na jakých intervalech je daná funkce konvexní a na jakých je konkávní.*

a) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 1,\ D_f = (-\infty, \infty)$,

b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x},\ D_f = (-\infty, \infty)$.

Příklad 7.26. *Určete asymptoty následujících funkcí*

a) $f(x) = ax + b \ln |x|$,

b) $f(x) = 1/x$,

c) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{3-2x}$.

Příklad 7.27. *Určete průběh následujících funkcí (definiční obor, obory spojitosti, limity v bodech nespojitosti a hraničních bodech def. oboru, sudost, lichost, periodicitu, množiny monotonie funkce, body lokálních a globálních extrémů, obor hodnot, omezenost funkce, nulové body, konvexitu, konkávnost, inflexní body, asymptoty, graf).*

a) $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

b) $f(x) = xe^x$,

c) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$,

d) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$,

e) $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos(2x)$,

f) $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$.

8 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování

Př. 1.24: a) ne,
b) ano,
c) ne,
d) ano,
e) ano,
f) ne.

Př. 1.25: a)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

b) Zavedeme $V_1 = A \vee (B \wedge C)$ a $V_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	$B \wedge C$	V_1	$A \vee B$	$A \vee C$	V_2	$V_1 \Leftrightarrow V_2$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

c) Celý výrok označíme jako V.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	V
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

d) Celý výrok označíme jako V.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	V
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Př. 1.26: Zavedeme $V_1 = (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee C)$ a $V_2 = (A \Leftrightarrow B) \vee (B \wedge C)$.

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee C$	V_1	$A \Leftrightarrow B$	$B \wedge C$	V_2	$V_1 \wedge V_2$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1

Př. 1.27: $\exists(x \in M)\forall(y \in N) : [(A(x,y) \wedge \neg B(x)) \vee$
$\vee \exists(z \in K) : (\neg C(x,y,z) \wedge \neg D(x,z))]$.

Př. 1.28: „Poplatek za vedení karty
a) Vedení hlavní karty (měsíčně) – 29 Kč v případě, že celkový bezhotovostní objem zaúčtovaných plateb danou debetní kartou vydanou k mKontu (do objemu se počítají všechny hlavní debetní karty vydané na jméno majitele účtu) v daném měsíci bude nižší než 1 500 Kč **a** držitel debetní karty není vlastníkem úvěrového produktu u mBank (půjčka, hypotéka, kreditní karta nebo povolené přečerpání)...“.
Negace disjunkce je totiž konjunkce. Proto je „nebo“ změněno na „a“.

Př. 1.30: $\{(1;-1);(1;0);(1;1);(1;2);(2;-1);(2;0);(2;1);(2;2);(3;-1);(3;0);(3;1);(3;2)\}$.

Př. 1.31: a) ne,
b) ano.

Př. 2.38: a) klesající,
b) rostoucí.

Př. 2.39: a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$,

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1
n_0	19	199	1999	19 999

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$,

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1
n_0	7	97	997	9997

Př. 2.40: a)

K	1	2	10	1000
n_0	2	4	12	1002

b)

K	1	2	10	1000
n_0	2	5	101	1 000 001

Př. 2.41: a) $\frac{2}{3}$,
b) $-\infty$,
c) 1,
d) -1,
e) $\frac{1}{8}$,
f) e^{20},
g) 0,
h) limita neexistuje,
i) $\frac{1}{4}$,
j) e,

Př. 2.42: a) $a_n = \frac{2n+1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$,
b) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Př. 3.36: a) $D_f = (-3, 2)$,
b) $D_f = (-7, 3]$,
c) $D_f = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi]$.

Př. 3.37: a) $H_f = (-2, 8]$,
b) $H_f = [-18, 6]$.

Př. 3.38: a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2}$, $D_{f^{-1}} = [-\frac{9}{4}, \infty)$,
b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}[\ln(x-4) - 1]$, $D_{f^{-1}} = (\mathrm{e}^{-2} + 4, \infty)$.

Př. 3.40: a) lichá,
b) sudá,
c) ani lichá, ani sudá,
d) sudá.

Př. 4.35: a) $\frac{10}{9}$,
b) $-\frac{1}{2}$,
c) 6,
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$,
e) 0,
f) $\frac{1}{2}$,
g) $-\infty$,
h) $\frac{1}{4}$,
i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$,
j) -2,
k) 1,
l) $\frac{1}{2}$.

Př. 4.36: a) spojitá na $\mathbb{R}$,
b) spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
c) spojitá na $\mathbb{R}$.

Př. 5.36: a) $9x^2 + 5 - \frac{4}{x^3}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$,
b) $\frac{3}{x}$, $D_f = D_{f'} = (0, \infty)$,
c) $\frac{(x-x^3)\cos x - (1-3x^2)\sin x}{(x-x^3)^2}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$,

d) $\frac{8\,\mathrm{tg}\,(4x)}{\cos^2(4x)}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}}\,\{\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{4}\}$,
e) $\frac{a}{x^2+a^2}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$,
f) $\cosh^2 x + \sinh^2 x$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$,
g) $\mathrm{e}^{2x^2-x}(4x-1)$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$,
h) $x^x[(1+\ln x)\cos x - \sin x]$, $D_f = D_{f'} = (0,\infty)$,
i) $\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{6x}}}3\mathrm{e}^{3x}$, $D_f = (-\infty,0]$, $D_{f'} = (-\infty,0)$.

Př. 5.39: a) -3,
b) $-\frac{1}{2}$,
c) $-\frac{2}{3}$,

Př. 5.40: a) maximum $[0;0]$ a $[1;0]$, minimum $[\frac{3}{4};-\frac{27}{256}]$,
b) maximum $[\frac{2}{3}(2\pi-2);1]$, minima $[\frac{2}{3}(\pi-2);-1]$ a $[\frac{2}{3}(3\pi-2);-1]$,
c) maximum $[-2;e^{-2}+4]$, minimum $[\ln 2; 2-2\ln 2]$.

Př. 5.41: a) $v(t) = c$, $a(t) = 0$,
b) $v(t) = c\cos t$, $a(t) = -c\sin t$.

Př. 6.20: a) 2,0005,
b) 0,0020.

Př. 6.21: $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$.

Př. 6.22: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$.

Př. 6.23: $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Př. 6.24: a) $-\frac{1}{2}$,
b) $\frac{1}{3}$,
c) $-\frac{1}{4}$.

Př. 7.23: a) globální maximum $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}]$, globální minimum $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}]$,
b) lokální a globální maximum $[1, \mathrm{e}^{-2}]$, globální minimum se nenabývá,
c) lokální a globální maximum $[2, \mathrm{e}^{-2}]$, globální minimum se nenabývá.

Př. 7.24: Položíme derivaci $\mathcal{E}$ podle ω rovnu nule, což vede na rovnici
$3f(\frac{\omega}{T}) + \frac{\omega}{T}f'(\frac{\omega}{T}) = 0$, která závisí pouze na poměru $\frac{\omega}{T}$.

Př. 7.25: a) konvexní na $(-\infty, \frac{-15-\sqrt{57}}{12})$ a $(\frac{-15+\sqrt{57}}{12}, \infty)$,
konkávní na $(\frac{-15-\sqrt{57}}{12}, \frac{-15+\sqrt{57}}{12})$,
b) konvexní na $(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ a $(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, konkávní na $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Př. 7.26: a) svislá asymptota $x = 0$, šikmé neexistují,
b) $x = 0$, $y = 0$,
c) šikmé asymptoty $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$, svislá $x = \frac{3}{2}$.

Př. 7.27: a) $D_f = \mathbb{R}$; spojitá tamtéž; sudá; neperiodická; na intervalu $(-\infty,0)$ klesající, na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí; lokální minimum $[0,1]$; $H_f = [1,\infty)$; omezená zdola; nulové body nemá; konvexní funkce; asymptoty nemá.

b) $D_f = \mathbb{R}$; spojitá tamtéž; ani sudá, ani lichá; neperiodická; na intervalu $(-\infty,-1)$ klesající, na intervalu $(-1,\infty)$ rostoucí; lokální minimum $[-1,-\mathrm{e}^{-1}]$; $H_f = [-\mathrm{e}^{-1},\infty)$; omezená zdola; nulový bod $x = 0$; konkávní na intervalu $(-\infty,-2)$, konvexní na $(-2,\infty)$; inflexní bod $[-2,-2\mathrm{e}^{-2}]$; asymptota $y = 0$ pro $x \to -\infty$.

c) $D_f = (0,1)\cup(1,\infty)$; spojitá tamtéž; ani sudá, ani lichá; neperiodická; na intervalech $(0,1)$ a $(1,\sqrt{e})$ klesající, na intervalu $(\sqrt{\mathrm{e}},\infty)$ rostoucí; lokální minimum $[\sqrt{\mathrm{e}}, 2\mathrm{e}]$; $H_f = (-\infty,0)\cup[2\mathrm{e},\infty)$; není omezená; nulový bod nemá;

konkávní na intervalu $(0,1)$, konvexní na $(1,\infty)$; inflexní bod nemá; asymptota $x=1$.

d) $D_f=[0,\infty)$; spojitá tamtéž; ani sudá, ani lichá; neperiodická; na intervalu $(0,1)$ klesající, na intervalu $(1,\infty)$ rostoucí; lokální minimum $[1,-2]$, lokální maximum $[0,0]$; $H_f=[-2,\infty)$; nulové body $x=0$, $x=3$; konvexní funkce; asymptoty nemá.

e) $D_f=\mathbb{R}$; spojitá tamtéž; sudá; periodická, perioda 2π; lokální minima $[0+2n\pi,\frac{1}{2}]$ a $[\pi+2n\pi,-1.5]$, druhý bod je globálním minimem, lokální a globální maxima $[\frac{\pi}{3}+2n\pi,0.75]$ a $[-\frac{\pi}{3}+2n\pi,0.75]$; monotonii lze odvodit z extrémů; $H_f=[-1.5,0.75]$; nulové body $\approx 0{,}62\pi$; inflexní body $X_{1\pm}=[\approx \pm 0{,}18\pi,\approx 0{,}63]$ a $X_{2\pm}=[\approx \pm 0{,}70\pi,\approx -0{,}44]$ a body o $2n\pi$ posunuté; konvexní na (x_{1-},x_{1+}) a (x_{2+},x_{2-}), konkávní na (x_{1+},x_{2+})a (x_{2-},x_{1-}); asymptoty nemá.

f) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{0\}$; spojitá tamtéž; ani sudá ani lichá; neperiodická; lokální minimum $[2,4\sqrt{\mathrm{e}}]$, lokální maximum $[-1,\frac{1}{\mathrm{e}}]$; rostoucí na $(-\infty,-1)$ a $(2,\infty)$, klesající na $(-1,0)$ a $(0,2)$; $H_f=(-\infty,\frac{1}{\mathrm{e}}]\cup[4\sqrt{\mathrm{e}},\infty)$; nulový bod $x=-2$; inflexní bod $[-\frac{2}{5},\frac{8}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}]$; konvexní na $(-\frac{2}{5},0)$ a $(0,\infty)$, konkávní na $(-\infty,-\frac{2}{5})$; asymptoty $x=0$ a $y=x+3$.

Použitá a doporučená literatura

[1] Černý, R., Pokorný, M. Matematická analýza pro fyziky I. UK v Praze, Praha, 2016. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rcerny/skripta_MAF.pdf

[2] Děmidovič, B. P. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Havlíčkův Brod, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[3] Ikenaga, B. Truth Tables, Tautologies, and Logical Equivalence. Dostupné z www: http://sites.millersville.edu/bikenaga/math-proof/truth-tables/truth-tables.html

[4] Isibalo, Matematika, výuková videa. Dostupné z www: https://isibalo.com/matematika

[5] Kopáček, J. Matematická analýza pro fyziky I Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-89-8.

[6] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky I. Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-90-1.

[7] Math Tutor. FEL ČVUT v Praze, Praha. Dostupné z www: http://math.feld.cvut.cz/mt/

[8] Moravec, L. Webová aplikace pro výuku matematické logiky na střední škole. Rigorózní práce, UK v Praze, 2012. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/

[9] Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 1995.

[10] Polák, J. Středoškolská matematika v úlohách I. Prometheus, Praha, 2002.

[11] Rokyta, M. Tabulka základních derivací. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/general/tahaky/derivace.htm

[12] Zemánek, P. Hasil, P. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. MU v Brně, Brno, 2012. Dostupné z www: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/index.html