Komplexní čísla

Komplexní čísla $\mathbb{C}$ jsou čísla zapsatelná ve tvaru $z = a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka, pro niž platí $i^2 = -1$. Tento tvar se nazývá algebraický. Máme-li převést zlomek $\frac{a+bi}{c+di}$ na algebraický tvar, musíme jej rozšířit komplexním sdružením jmenovatele $c - di$. V komplexní rovině čísla znázorňujeme tak, že na x-ovou osu vyneseme reálnou část čísla a a na y-ovou osu imaginární část b.

Dále existuje goniometrický tvar komplexního čísla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, kde $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ a $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Při násobení dvou čísel v goniometrickém tvaru se absolutní hodnoty násobí a úhly sčítají. Lze to dokázat součtovými vztahy pro sinus a kosinus.

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\,.$$

Pro mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru platí tzv. *Moivreova věta*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin n\varphi)\,.$$

Dá se jí využít například pro výpočet mocnin a odmocnin komplexního čísla.

1 Příklady

Příklad 1. *Převeďte na algebraický tvar číslo* $\frac{3+4i}{1-2i}$.

Řešení: Nejdříve celý zlomek rozšíříme $1+2i$, tj. komplexně sdruženým jmenovatelem. Dostaneme

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{3+4i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1-4i^2} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i\,.$$

Příklad 2. *Převeďte na goniometrický tvar číslo* $-1+\sqrt{3}\,i$.

Řešení: Nejdříve určíme absolutní hodnotu čísla:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\,.$$

Dále máme

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}\,, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Vidíme, že úhel je ve druhém kvadrantu. Z jednotkové kružnice určíme $\varphi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$. Goniometrický tvar čísla tedy je $2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Příklad 3. *Vypočtěte* $\sqrt[4]{-4}$ *(určete všechny kořeny rovnice* $z^4 = -4$*).*

Řešení: Vyjdeme z Moivreovy věty. Nechť je neznámá odmocnina $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. Pak podle Moiverovy věty platí

$$z^4 = r^4\,\mathrm{e}^{4i\varphi} = r^4\,\mathrm{e}^{4i\varphi+2m\pi i}\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,, \tag{1}$$

kde jsme ve druhém kroku číslo vynásobili jedničkou, tedy $1 = \mathrm{e}^{2m\pi i}$, kde m je celé číslo. Víme, že $z^4 = -4$, tedy $r = \sqrt[4]{|-4|} = \sqrt{2}$. Vynesením čísla do komplexní roviny vidíme, že $4\varphi = \pi$, tedy $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Odmocněním rovnice (1) dostáváme

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi + \frac{m\pi i}{2}}\,.$$

Protože n-tá odmocnina má n kořenů, můžeme brát $m = 0, 1, 2, 3$, pro další čísla budeme dostávat stejné kořeny. Pro naše hodnoty máme

$$z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4} + im\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right)\right)\,.$$

Konkrétně

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i\,,\\
z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i\,,\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i\,,\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i\,.
\end{aligned}$$

Použitá a doporučená literatura

1. `http://cs.wikipedia.org/wiki/Komplexn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo`
2. `http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number`