Křivkový integrál prvního druhu

verze 1.0

1 Úvod

Následující text popisuje výpočet křivkového integrálu prvního druhu. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT2 k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Teorie

Cílem je určit integrál z funkce f přes křivku C. Předpokládejme, že C je křivka v rovině. Parametrizujeme si ji parametrem t, který běží od a (hodnota t v jednom z krajních bodů křivky) do b (hodnota t ve druhém krajním bodě). Získáme funkce $x(t)$ a $y(t)$, které společně popisují křivku. Potom integrál z f přes tuto křivku je roven

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Důvodem členu s odmocninou je to, že pro element délky křivky platí z Pythagorovy věty

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2\,,$$

a tedy $\mathrm{d}s = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Pro křivku v prostoru do vztahu pro integrál přibyde z':

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pokud je křivka zadaná v polárních souřadnicích jako $r = r(\varphi)$, vypočítá se integrál jako

$$\int_C f(r,\varphi)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(r(\varphi),\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Důvodem tohoto vztahu je vztah pro element délky

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}r^2 = \left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]\mathrm{d}\varphi^2\,.$$

3 Řešené příklady

Příklad 3.1. *Parametrizujte následující křivky:*

a) *úsečka* AB, $A = [2, 5]$, $B = [-1, 3]$,

b) *úsečka* AB, $A = [-2, 2]$, $B = [1, 7]$,

c) *dolní polokružnice* $x^2 + y^2 = 9$,

d) *levá část kružnice* $x^2 + y^2 = 25$,

e) *pravá část kružnice* $(x - 3)^2 + y^2 = 16$,

f) *pravá polovina elipsy* $4x^2 + y^2 = 4$,

g) *část elipsy v 1. kvadrantu* $4x^2 + 9y^2 = 36$,

h) *prostorová křivka* $x^2 + y^2 + z^2 = 19$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y = \sqrt{3}$.

Řešení:

a) Jde o parametrizaci úsečky, proto můžeme zvolit $x = a + bt$ a $y = c + dt$ a poté vypočítat parametry a, b, c, d. Úsečku budeme parametrizovat parametrem t, který jde od 0 do 1, přičemž bod $t = 0$ odpovídá bodu A a $t = 1$ odpovídá bodu B. Pro $t = 0$ dostáváme $a = 2$ a $c = 5$, pro $t = 1$ máme $-1 = a + b$, $3 = c + d$. Odsud $b = -3$, $d = -2$. Parametrizace tedy je $x = -3t + 2$, $y = -2t + 5$, $t \in [0, 1]$.

b) Obdobně jako v předchozím případě volíme $x = a + bt$ a $y = c + dt$ a t jdoucí od 0 do 1. Pro $t = 0$ dostaneme $a = -2$ a $c = 2$, pro $t = 1$ získáme $1 = a+b$, $7 = c+d$, dosud $b = 3$, $d = 5$. Parametrizace tedy je $x = -2+3t$, $y = 2 + 5t$, $t \in [0, 1]$.

c) Daná kružnice má střed v bodě $[0, 0]$ a poloměr 3. Můžeme ji parametrizovat goniometrickými funkcemi. Z obrázku plyne, že $x = 3\cos t$ a $y = 3\sin t$. Zajímá nás dolní polovina kružnice, t musíme volit v interalu $t \in [\pi, 2\pi]$.

d) Tato kružnice má střed v bodě $[0, 0]$ a poloměr 5. Potřebná parametrizace v tomto případě je $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$. Abychom dostali levou polovinu kružnice, musíme volit $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

e) Tato kružnice má střed v bodě $[3, 0]$ a poloměr 4. Obdobně jako v předchozích dvou případech parametrizujeme kružnici pomocí sinů a kosinů, k x však musíme přičíst kvůli poloze středu 3. Parametrizace tedy je $x = 3 + 4\cos t$, $y = 4\sin t$. Protože máme pravou část kružnice, bereme interval $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

f) Elipsu parametrizujeme podobně jako kružnici, kvůli rozdílnosti délek poloos musíme vzít různé konstanty před sinem a kosinem. Naše elipsa má hlavní poloosu 2 a vedlejší poloosu 1. Předpokládejme tvar $x = a\cos t$,

$y = b\sin t$. Dosazením do rovnice elipsy získáváme $4a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = 4$. Aby tato rovnice identicky platila, musíme zvolit $a = 1$, $b = 2$. Poté dostaneme identitu $4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$. Parametrizace tedy je $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, abychom dostali pravou polovinu elipsy, volíme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

g) Postup je podobný jako v předchozím případě. Volbou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ dostáváme $4a^2\cos^2 t + 9b^2\sin^2 t = 36$, tedy je nutno volit $a = 3$, $b = 2$. Parametrizace je $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

h) Jedná se o čtvrtkružnici v prostoru. Vyjdeme nejdříve ze vztahu $y = \sqrt{3}$, dosazením a odečtením trojky od obou stran rovnice objevíme rovnici kružnice v rovině $x^2 + z^2 = 16$. Máme tedy parametrizaci $x = 4\cos t$, $y = \sqrt{3}$, $z = 4\sin t$; protože z pohledu souřadnic x a z bereme čtvrtkružnici v prvním kvadrantu, t patří do intervalu $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Příklad 3.2. *Vypočtěte $\int_C \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$, kde C je úsečka AB, $A = [0, -2]$, $B = [4, 0]$.*

Řešení: Úsečku si parametrizujeme jako v předchozím příkladě, vyjde $x = 4t$, $y = 2t - 2$, $t \in [0, 1]$. Podle vztahu v teorii vypočteme

$$\int_C \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \\ = \int_0^1 \frac{1}{4t - (2t-2)}\sqrt{4^2 + 2^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{t+1} = \sqrt{5}\ln 2\,.$$

Příklad 3.3. *Vypočtěte integrál $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, kde C je obvod trojúhelníka ABC s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [0, 1]$.*

Křivku, přes kterou integrujeme, si rozdělíme do tří úseček, které parametrizujeme následovně (postup je popsán v prvním příkladě)

$$\begin{aligned} C_1 = AB: &\quad x = t, \quad y = 0, \quad t \in [0, 1]\,, \\ C_2 = BC: &\quad x = -t + 1, \quad y = t, \quad t \in [0, 1]\,, \\ C_3 = CA: &\quad x = 0, \quad y = -t + 1, \quad t \in [0, 1]\,. \end{aligned}$$

Výsledný integrál spočteme jako tři nezávislé integrály.

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} (x+y)\,\mathrm{d}s + \int_{C_3} (x+y)\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^1 t\sqrt{1^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 1\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (-t+1)\sqrt{1}\,\mathrm{d}t = \\ = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \sqrt{2}\,[t]_0^1 + \left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + [t]_0^1 = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Příklad 3.4. *Vypočtěte $\int_C y^2\,\mathrm{d}s$, kde C je oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.*

V tomto případě máme přímo zadanou parametrizaci křivky, můžeme proto dosadit do vztahu a vypočítat integrál.

$$\int_C y^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} a^3\sqrt{2}(1-\cos t)^{5/2}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} a^3(1-\cos t)^{5/2}\,\mathrm{d}t =$$
$$2\sqrt{2}a^3 2^{5/2}\int_0^{\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} u = t/2 \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}u \end{array}\right| = 32a^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 u)^2(-\cos u)'\mathrm{d}u =$$
$$= \left|\begin{array}{c} v = \cos u \\ \mathrm{d}v = -\sin u\mathrm{d}u \end{array}\right| = 32a^3\int_1^0 (-1)(1-2v^2+v^4)\,\mathrm{d}v = 32a^3\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{256}{15}a^3\,.$$

Příklad 3.5. *Určete délku asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Určujeme délku křivky, proto integrujeme jedničku.

$$\int_C \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 3a\int_0^{2\pi}|\cos t\sin t|\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} u = \sin t \\ \mathrm{d}u = \cos t\mathrm{d}t \end{array}\right| =$$
$$= 12a\int_0^{\pi/2} u\,\mathrm{d}u = 6a\,.$$

Příklad 3.6. *Určete délku oblkouku kardiody parametrizované polárními souřadnicemi $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.*

Využijeme vztah pro polární souřadnice.

$$s = \int_C \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left|\begin{array}{c} 2t = \varphi \\ 2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi \end{array}\right| = 4a\int_0^{\pi/2}\cos t2\,\mathrm{d}t = 8a\sin\frac{\pi}{2} = 8a\,.$$

Využili jsme vztahu $\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$, který plyne z $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$.

Příklad 3.7. *Určete délku jednoho závitu šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Použijeme vztah pro křivku ve 3D.

$$s = \int_C \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Příklad 3.8. *Určete* $\int_C xy\,\mathrm{d}s$*, kde* C *je elipsa* $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Nejdříve si parametrizujeme elipsu: $x = 3\cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_C xy\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \sqrt{(-3\sin t)^2 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t \sqrt{1 + 8\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \sin t \\ \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1 3u\sqrt{1 + 8u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left| \begin{array}{c} v = 1 + 8u^2 \\ \mathrm{d}v = 16u\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int_1^9 \frac{3}{16} v^{1/2}\,\mathrm{d}v = \frac{3}{16}\frac{2}{3}[v^{3/2}]_1^9 = \frac{13}{4}\,.$$

4 Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky III., Matfyzpress, Praha, 2002, kapitola 4

2. Šibrava Zdeněk, Příklady k Matematice 3 – křivkové integrály, dostupné z www: `http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/kriv_int.pdf`