Limita funkce, spojitost

Definice 1. Buď $A, c \in \mathbb{R}$, f funkce definovaná na redukovaném okolí bodu c ($\{x \in \mathbb{R}, 0 < |c - x| < \delta\}$ pro nějaké $\delta > 0$), respektive na levém redukovaném okolí bodu c ($\{x \in \mathbb{R}, 0 < c - x < \delta\}$ pro nějaké $\delta > 0$). Řekneme, že

1. $\lim_{x \to c} f(x) = A$, pokud
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : \quad 0 < |c - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon \,,$$
2. $\lim_{x \to c-} f(x) = A$, pokud
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : \quad 0 < c - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon \,,$$
obdobně pro limitu zprava,
3. $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, pokud
$$\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : \quad 0 < |c - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > E \,,$$
obdobně pro $-\infty$,
4. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$, pokud
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathbb{R} \quad \forall x : \quad x > D \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon \,,$$
obdobně pro $-\infty$,
5. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, pokud
$$\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists D \in \mathbb{R} \quad \forall x : \quad x > D \quad \Rightarrow \quad f(x) < E \,,$$
obdobně pro $x \to -\infty$ a oba případy s limitou rovnou $+\infty$.

Definice 2. Řekneme, že funkce je spojitá v bodě c, pokud je definovaná na okolí bodu c a platí
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \,.$$

Věta 3. *Funkce $f(x)$ má v bodě c limitu, právě když má v tomto bodě současně limitu zleva i zprava a tyto limity se rovnají.*

Věta 4. Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A$, $\lim_{x \to c} g(x) = B$, $d, D \in \mathbb{R}$. Potom
$$\lim_{x \to c} D f(x) = DA \,,$$
$$\lim_{x \to c} |f(x)| = |A| \,,$$
$$\lim_{x \to c-d} f(x + d) = A \,,$$
$$\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B \,,$$
$$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B \,,$$
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{pro } B \neq 0 \,.$$

Věta 5. (o dvou policajtech)
Nechť jsou funkce f, g a h definované na nějakém redukovaném okolí bodu c a existuje $\delta > 0$, že pro všechna x, pro která platí $0 < |c - x| < \delta$, je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Potom platí

1. jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = A$, pak $\lim_{x\to c} g(x) = A$,
2. jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, pak $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$.

Obdobně pro $-\infty$.

Věta 6. Platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= 1\,,\\
\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} &= 1\,,\\
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1\,,\\
\lim_{x\to 0+} x^a \ln x &= 0\,, \quad a > 0\,,\\
\lim_{x\to +\infty} x^a \ln x &= 0\,, \quad a < 0\,,\\
\lim_{x\to +\infty} x^a \mathrm{e}^x &= +\infty\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,\\
\lim_{x\to -\infty} |x|^a \mathrm{e}^x &= 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Věta 7. Je-li $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a $g(x)$ je omezená v nějakém redukovaném okolí bodu c, je $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$. Obdobné tvrzení platí také pro limitu k $+\infty$ nebo $-\infty$.

1 Příklady

Příklad 8. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+7}{x^2+2x-6}$.

Řešení: Přímo dosadíme

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 + 2x - 6} = \frac{2^2 - 6\cdot 2 + 7}{2^2 + 2\cdot 2 - 6} = -\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 9. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

Řešení: Při dosazení dostaneme limitu typu $\frac{0}{0}$. Oba polynomy tedy mají kořen $x = 1$. Pomocí dělení polynomů určíme rozklad čitatele a jmenovatele a členy $(x - 1)$ zkrátíme.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = 2\,.$$

Příklad 10. *Vypočtěte* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$.

Řešení: Máme výraz typu nekonečno mínus nekonečno. Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě. Výraz upravíme a pokrátíme.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1+\sin x)} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 11. *Vypočtěte* $\lim_{x\to 2}\frac{3-x}{(x-2)^2}$.

Řešení: Máme limitu typu $\frac{a}{0}$, která může být plus nekonečno, mínus nekonečno, nebo nemusí existovat. Spočítáme tedy limity zleva a zprava.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{3-x}{(x-2)^2} = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{3-x}{(x-2)^2} = \infty\,.$$

Vidíme, že jak pro x menší než 2, tak pro x větší než 2 je jmenovatel kladný. Čitatel je roven jedné, proto je výsledek plus nekonečno.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-x}{(x-2)^2} = \infty\,.$$

Kdyby se výsledky limit zleva a zprava nerovnaly, limita by neexistovala.

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 3

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 3