Lineární algebra

verze 1.4

1 Úvod

Následující text popisuje základy lineární algebry. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT1 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Vektorové prostory

Jedním z nejužívanějším pojmů v lineární algebře je pojem vektorového prostoru. Abychom ho zavedli správně, začněme dvěma definicemi.

2.1 Definice tělesa

Číselným tělesem nazveme podmnožinu komplexních čísel T, která má alespoň dva prvky a pro kterou platí:

1. $\alpha \in T, \beta \in T \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta \in T\,,$
2. $\alpha \in T, \beta \in T \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \in T\,,$
3. $\alpha \in T \quad \Rightarrow \quad -\alpha \in T\,,$
4. $\alpha \in T, \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1/\alpha \in T\,.$

Tělesem jsou například komplexní čísla, reálná čísla nebo racionální čísla: Méně triviálním tělesem jsou zbytkové třídy $\mathbb{Z}_p$ po dělení prvočíslem p (dělení je zde definováno jako násobení inverzním prvkem).

2.2 Definice vektorového prostoru

Nyní zadefinujeme *vektorový prostor*.

Nechť jsou dány

1. číselné těleso T,
2. neprázdná množina V,
3. zobrazení $\oplus\ V \times V \to V$,
4. zobrazení $\odot\ T \times V \to V$.

Máme tedy číselné těleso, neprázdnou množinu, která bude vektorovým prostorem, a dvě zobrazení, která udávají sčítání vektorů a násobení vektoru číslem. Řekneme, že V je vektorový prostor nad tělesem T s operacemi $\oplus$ a $\odot$, pokud platí.

1. V s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu
   (a) existuje nulový vektor $\mathbf{0}$, že pro všechna $\mathbf{v} \in V$ platí $\mathbf{v} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{v}$,
   (b) pro všechna $\mathbf{v}$ existuje inverzní prvek $\mathbf{w}$, že $\mathbf{v} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{0}$,
   (c) sčítání vektorů je asociativní $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w})$,
   (d) sčítání vektorů je komutativní $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$,
2. násobení skalárem je asociativní $a \odot (b \odot \mathbf{v}) = (ab) \odot \mathbf{v}$,
3. $1 \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, kde 1 je jednotkový prvek tělesa T,
4. sčítání a násobení je distributivní
   (a) $a \odot (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (a \odot \mathbf{v}) \oplus (a \odot \mathbf{w})$,
   (b) $(a + b) \odot \mathbf{v} = (a \odot \mathbf{v}) \oplus (b \odot \mathbf{v})$.

2.3 Příklady vektorových prostorů

Příklad 2.1. *Asi nejznámějším příkladem vektorového prostoru je $\mathbb{R}^n$. Vektory zapíšeme jako uspořádané n-tice čísel*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Sčítáme a násobíme číslem po složkách

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} , \quad \alpha \odot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} .$$

Příklad 2.2. *Dalším příkladem vektorového prostoru je prostor všech matic typu $m \times n$, tj. tabulky komplexních čísel $m \times n$ $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$. Sčítání matic je definováno následovně*

$$M \oplus N = \begin{pmatrix} m_{11} + n_{11} & m_{12} + n_{12} & \dots & m_{1n} + n_{1n} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} & \dots & m_{2n} + n_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} + n_{m1} & m_{m2} + n_{m2} & \dots & m_{mn} + n_{mn} \end{pmatrix}$$

a násobení skalárem takto

$$\alpha \odot M = \begin{pmatrix} \alpha m_{11} & \alpha m_{12} & \dots & \alpha m_{1n} \\ \alpha m_{21} & \alpha m_{22} & \dots & \alpha m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha m_{m1} & \alpha m_{m2} & \dots & \alpha m_{mn} \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.3. *Dále můžeme uvést třeba vektorový prostor všech polynomů s operacemi*

$$(p \oplus q)(x) = p(x) + q(x)\,, \quad (\alpha \odot p)(x) = \alpha p(x)\,.$$

2.4 Lineárně nezávislé vektory

Množina vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ je *lineárně závislá*, pokud existují taková komplexní čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (přičemž alespoň jedno z nich je nenulové), pro která platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}\,.$$

V opačném případě je pak tato množina lineárně nezávislá.

Příklad 2.4. *Určete, zda vektory* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *jsou lineárně závislé.*

Řešení: Když sečteme první vektor s dvojnásobkem druhého vektoru a (-1)-násobkem třetího vektoru, dostaneme ve všech složkách nulu. Vektory jsou tedy lineárně závislé.

Příklad 2.5. *Zkonstruujte lineárně nezávislý vektor k vektorům* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Pokud bychom zvolili vektor, jehož třetí složka je nulová, např. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, byl by a-násobkem prvního vektoru plus b-násobkem druhého vektoru. Stačí tedy zvolit libovolný vektor, který má třetí složku nenulovou, protože žádnou kombinací těchto dvou vektorů ho nedostaneme. Například zvolíme $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.5 Báze prostoru

Bází vektorového prostoru V je taková množina lineárně nezávislých vektorů, jejíž lineární obal je V. *Lineární obal* podmnožiny M vektorového prostoru V je průnik všech podprostorů V, které obsahují M. Jinými slovy je to množina všech lineárních kombinací vektorů z M.

Příklad 2.6. *Zkonstruujte bázi prostoru všech hermitovských matic 2×2. Matice M je hermitovská, pokud je rovna svému hermitovskému sdružení, tj. transpozici a komplexnímu sdružení $M = M^{*\mathrm{T}}$.*

Řešení: Nejdříve si napíšeme libovolnou komplexní matici typu 2×2.

$$M = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{pmatrix} .$$

Vidíme, že má osm nezávislých parametrů, tj. báze prostoru komplexních matic 2×2 má osm prvků. Její hermitovské sdružení je

$$M^{*\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a-bi & c-di \\ e-fi & g-hi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & g-hi \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{pmatrix} .$$

Odsud vidíme $b = 0$, $h = 0$, $e = c$, $f = -d$. Tvar obecné hermitovské matice 2×2 je

$$M = \begin{pmatrix} a & c+di \\ c-di & g \end{pmatrix} .$$

Bázi můžeme najít např. tak, že budeme postupně pokládat jeden z koeficientů rovnen jedné a ostatní rovné nule. Jednou z bází tedy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Častěji se však používá báze matic, které jsou zároveň unitární (platí pro ně $M \cdot M^{*\mathrm{T}} = I$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Prvním třem maticím se říká Pauliho matice a používají se pro popis částice se spinem $\frac{1}{2}$.

3 Násobení matic

Mějme $P \times Q$ matici M (má P řádků a Q sloupců) a $Q \times R$ matici N. Potom maticovým součinem matic M a N myslíme matici velikosti $P \times R$, která má v r-tém řádku a s-tém sloupci součin r-tého řádku matice M a s-tého sloupce matice N. Matice tedy násobíme systémem „řádek krát sloupec“. Jasnější to bude na následujícím příkladu.

Příklad 3.1. *Vynásobte matice* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 5+3\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 7+2\cdot 3+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 3+3\cdot 3+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot 1+3\cdot 1+(-1)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 5+0\cdot 1+1\cdot(-1) & (-1)\cdot 7+0\cdot 2+1\cdot 2 & (-1)\cdot 3+0\cdot 3+1\cdot(-3) & (-1)\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 3\cdot 5+5\cdot 1+1\cdot(-1) & 3\cdot 7+5\cdot 2+1\cdot 2 & 3\cdot 3+5\cdot 3+1\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 & 5 \\ -6 & -5 & -6 & -1 \\ 19 & 33 & 21 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.2. *Vynásobte matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 6 & 11 & 5 \end{pmatrix}$.

4 Inverzní matice

Řekneme, že matice N je inverzní maticí ke čtvercové matici M, pokud platí:

$$N \cdot M = M \cdot N = I\,,$$

kde I je jednotková matice, která má na diagonále jedničky a všude jinde nuly.

Příklad 4.1. *Najděte inverzní matici k matici* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Při výpočtu postupujeme podobně jako při hledání řešení systému lineárních rovnic s pravou stranou. Místo pravé strany dáme jednotkovou matici. Poté provedeme Gaussovu-Jordanovu eliminaci. První řádek odečteme od obou ostatních, abychom v prvním sloupci dostali všude kromě prvního pole nulu. Stejnou úpravu provedeme i na jednotkové matici. Poté prohodíme druhý a třetí řádek, protože je v druhém řádku a třetím sloupci nula. Druhý i třetí řádek vydělíme -2, poté odečteme od prvního řádku druhý a od druhého řádku třetí. Všechny úpravy opakujeme i vpravo. Tak dostaneme vlevo jednotkovou matici a vpravo výslednou inverzní matici k původní.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&0\\0&-2&0&-1&0&1\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&0&-1&0&1\\0&0&-2&-1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&1/2&0&-1/2\\0&0&-2&-1&1&0\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1/2&0&1/2\\0&1&0&1/2&0&-1/2\\0&0&-2&-1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1/2&0&1/2\\0&1&0&1/2&0&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&0\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1/2&1/2\\0&1&0&1/2&0&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&0\end{array}\right).$$

Inverzní matice tedy je $\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&-1/2\\1/2&-1/2&0\end{pmatrix}$.

Příklad 4.2. *Najděte inverzní matici k matici* $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\2&1&3&0&1&0\\-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&2&1&1&0&1\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-1&1&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&3&-3&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-1&1&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&1&-1&2/3&1/3\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1/3&-2/3\\0&1&0&1&-1/3&1/3\\0&0&1&-1&2/3&1/3\end{array}\right).$$

5 Determinant

Determinant je zobrazení, které každé čtvercové matici přiřadí číslo. K tomu, abychom ho mohli zadefinovat, definujeme nejdříve permutaci. *Permutace* n *prvků* je jedno z možných uspořádání těchto prvků, kde výsledná uspořádaná n-tice má stejný počet prvků jako původní množina. *Znaménko permutace* udává, zda musíme udělat sudý či lichý počet přehození dvou prvků permutace, abychom dostali původní uspořádání. Sudé permutaci odpovídá kladné znaménko, liché záporné. Determinant je pak sumou všech permutací diagonály matice, přičemž každá permutace se bere s kladným znaménkem, pokud je sudá, a se záporným znaménkem, pokud je lichá. Pro matici typu $n \times n$ máme

$$\det M = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} M_{i,\sigma(i)} .$$

V předchozí rovnici sgn je znaménko permutace. Uvažujeme tedy všechny možné součiny prvků matice z různých řádků a sloupců se znaménkem příslušné permutace.

Pro matici typu 2×2 máme pouze dvě permutace a dostáváme tedy

$$\det M = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} .$$

Pro výpočet matice 3×3 využijeme tzv. Sarusova pravidla:

$$\begin{aligned}\det M = M_{11}M_{22}M_{33} + M_{13}M_{21}M_{32} + M_{12}M_{23}M_{31} - {} \\ - M_{13}M_{22}M_{31} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{12}M_{21}M_{33} .\end{aligned}$$

Determinanty matic vyšších řádů vypočteme podle věty o rozvoji podle řádku nebo sloupce

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(-1)^{i+j}C_{ij} ,$$

kde C_{ij} je determinant matice, která vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce v matici M.

Příklad 5.1. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot1\cdot2+(-1)\cdot0\cdot2+3\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot2-3\cdot(-1)\cdot2-1\cdot1\cdot0 = 9 .$$

Příklad 5.2. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: 5.

Příklad 5.3. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Všimněme si, že první a druhý řádek matice jsou lineárně závislé. Determinant matice s lineárně závislými řádky je nula.

Příklad 5.4. *Vypočtěte determinant matice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Provedeme rozvoj podle prvního řádku

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \\ - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -29 + 19 + 17 = 7\,.$$

6 Vlastní čísla

Platí-li pro danou čtvercovou matici M rovnice

$$Mv = \lambda v\,, \tag{1}$$

kde v je vektor a λ komplexní číslo, nazveme λ vlastním číslem matice M a v vlastním vektorem této matice. Přepíšeme-li si rovnici do tvaru $(M - \lambda I)v = 0$, kde I je jednotková matice, vidíme, že matice $M - \lambda I$ má lineárně závislé sloupce. Existují totiž čísla $v_1, \dots, v_N$, kterými když vynásobíme jednotlivé sloupce, dostaneme nulu. Pro $N \times N$ matici M má matice $M - \lambda I$ má tedy hodnost menší než N, a tudíž platí

$$\det (M - \lambda I) = 0\,. \tag{2}$$

Toho využijeme při počítání vlastních čísel.

Vlastní čísla a vlastní vektory se hojně používají v kvantové mechanice; hodnota pozorovatelé je totiž vyjádřena vlastním číslem daného operátoru a vlastní stavy jsou dány vlastními vektory.

Příklad 6.1. *Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: Využijeme rovnice $\det (M - \lambda I) = 0$. Dostáváme

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0\,,$$

máme tedy tři řešení $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 3$. Z rovnice (1) pak určíme vlastní vektor v. Přepíšeme si ji do tvaru

$$(M - \lambda I)v = 0\,. \tag{3}$$

Pro λ_1 dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

odsud $v_2 = 0$ a $v_3 = 0$. Takže vlastní vektor můžeme zvolit jako $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Možný je také libovolný jeho nenulový násobek.

Pro λ_2 máme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tedy $v_1 = 0$ a $v_3 = 0$. Vlastní vektor můžeme zvolit jako $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pro λ_3 máme

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tedy $v_1 = 0$ a $v_2 = 0$. Vlastní vektor můžeme zvolit jako $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 6.2. *Určete vlastní vektory a vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z rovnice (2) máme

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1\,.$$

Odsud $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Pro $\lambda_1 = 1$ máme z rovnice (3)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

$-v_1 + v_2 = 0$, tedy $v_1 = v_2$. Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme z rovnice (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

$v_1 + v_2 = 0$, tedy $v_1 = -v_2$. Odpovídající vlastní vektory tedy jsou pro λ_1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pro λ_2 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Příklad 6.3. *Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Řešení: Nyní už budeme postupovat stručněji. Dostáváme rovnici $\lambda^2 - 4 = 0$ s řešeními $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$. Pro vlastní vektory získáme z rovnice

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

respektive

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

vlastní vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ -(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ -(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}$.

Příklad 6.4. *Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z rovnice $(\lambda-1)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2) = 0$ dostáváme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

Pro $\lambda_1 = 0$ máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tj. $v_1 + v_2 = 0$, pro $\lambda_2 = 2$ máme

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tj. $v_1 - v_2 = 0$. Vlastní vektory tedy jsou $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 6.5. *Najděte vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z (2) dostáváme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0\,,$$

jejímž řešením jsou vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\,.$$

Příklad 6.6. *Najděte vlastní čísla a jeden vlastní vektor matice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Z rovnice (2) máme $\lambda^3 - 1 = 0$, což se dá rozložit jako $(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0$, máme tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

Najdeme vlastní vektor odpovídající číslu λ_1. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tj. $-v_1 + v_3 = 0$, $v_1 - v_2 = 0$, tedy $v_1 = v_2 = v_3$. Jako vlastní vektor tedy zvolíme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 6.7. *Určete vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Vlastní čísla určíme ze vztahu

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -3 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)\,.$$

Máme tedy řešení $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Příklad 6.8. *Najděte vlastní čísla matice* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Řešení: Vlastní čísla určíme ze vztahu

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+6\lambda^2+\left(8+\frac{15}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)(-\lambda)+$$

$$+\frac{1}{8}(60+2-2-10+4-6) = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\,.$$

Máme tedy řešení $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Kořeny polynomu třetího řádu nalezneme tak, že jeden z nich uhodneme a následně vyřešíme kvadratickou rovnici.

7 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 7.1. *Dokažte, že prostor matic $m \times n$ je vektorovým prostorem.*

Příklad 7.2. *Určete, zda vektory*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé nebo lineárně závislé.

Příklad 7.3. *Najděte bázi prostoru reálných polynomů řádu 5. Jakou má dimenzi?*

Příklad 7.4. *Určete součin dvou matic*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.5. *Vypočtěte*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Příklad 7.6. *Vypočtěte*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Příklad 7.7. *Vypočtěte*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.8. *Vypočtěte*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.9. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 11 & -15 \\ 2 & -3 & 7 \\ 2 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.10. *Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.11. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.12. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} -1 & -8 & -6 \\ 1 & 6 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.13. *Najděte vlastní čísla matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8 Řešení příkladů k samostatnému procvičování

7.1 Postupně dokažte, že jsou splněny všechny body definice vektorového prostoru.
7.2 Lineárně závislé: $0 = 3u + v - w$.
7.3 $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Báze má 6 prvků, dimenze je tedy 6.
7.4 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
7.5 $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
7.6 Inverze neexistuje, řádky nebo sloupce jsou lineárně závislé.
7.7 5.
7.8 -6.
7.9 0, 2, 4.
7.10 Vlastní čísla $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, vlastní vektory odpovídající těmto vlastním číslům postupně $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.
7.11 -1, 1, 1.
7.12 0, 1, 2.
7.13 1, 1, 2.

9 Použitá a doporučená literatura

1. `http://tjn.fjfi.cvut.cz/~humhal/ALGEBRA1.pdf`

2. Marvan Michal, Vektorové prostory, dostupné z www:
   `http://www.slu.cz/math/cz/knihovna/docs/algebra1/9.-vektorove-prostory`

3. `www.mff.cz/data/LA_VP.pps`

4. Olšák Petr, Lineární algebra, dostupné z www:
   `ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/linal/linal2.pdf`