Domácí úkol z MATEMAT1 číslo 3

výsledky jsou bez záruky

1. Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, který se pohybuje po cykloidě $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$.

2. Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}$.

   Výsledek: $-\frac{2\mathbf{r}}{r^4}$

3. Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, kde $\mathbf{a}$ je konstantní vektor.

   Výsledek: $\mathbf{a}$

4. Vypočtěte divergenci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^n}$.

   Výsledek: $\frac{3-n}{r^n}$

5. Vypočtěte divergenci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}}{r}$, kde $\mathbf{v}$ je konstantní pole.

   Výsledek: $-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r^3}$

6. Dokažte vztah $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} \varphi$.

   Návod: Rozepište si výrazy na levé i pravé straně ve složkách.

7. Vypočtěte rotaci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}}{r}$, kde $\mathbf{v}$ je konstantní pole.

   Výsledek: $\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$

8. Aplikujte Laplaceův operátor na skalární pole $\varphi = \frac{1}{r^n}$.

   Výsledek: $\frac{n(n-1)}{r^{n+2}}$

9. Dokažte identitu $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$.