Domácí úkol z Matematiky 1 (CM1DR, NM1DR)
číslo 3

výsledky jsou bez záruky

Každý student dostane emailem podmnožinu čísel těchto příkladů, které pak musí vypočítat. V příkladech $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor a $r = |\mathbf{r}|$ je jeho velikost.

1. Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, který se pohybuje po cykloidě $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$.
2. Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, který se pohybuje po křivce $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2 - t, 2\sin t)$.
3. Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, který se pohybuje po křivce $\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, t, t^3 + 3t^2)$.
4. Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}$.
5. Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^r$.
6. Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = \sin r$.
7. Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = xyz$.
8. Vypočtěte gradient skalárního pole $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, kde $\mathbf{a}$ je konstantní vektor.
9. Elektrický potenciál bodového náboje je $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + \varphi_0$, kde Q, ε a φ_0 jsou kontanty. Určete intenzitu elektrického pole, víte-li, že $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$.
10. Uvažujme potenciál gravitačního pole $\varphi(\mathbf{r}) = gz$, kde g je konstanta. Určete intenzitu tohoto gravitačního pole, víte-li, že $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$. O jaké pole jde?
11. Vypočtěte divergenci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^n}$.
12. Vypočtěte divergenci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}}{r}$, kde $\mathbf{v}$ je konstantní pole.
13. Vypočtěte divergenci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \times \mathbf{r}$, kde $\mathbf{v}$ je konstantní pole.
14. Vypočtěte rotaci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}}{r}$, kde $\mathbf{v}$ je konstantní pole.
15. Vypočtěte rotaci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.
16. Vypočtěte rotaci vektorového pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \times \mathbf{r}$, kde $\mathbf{v}$ je konstantní pole.
17. Dokažte vztah $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} \varphi$.

    Návod: Rozepište si výrazy na levé i pravé straně ve složkách.

18. Dokažte identitu $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$.

19. Dokažte vztah $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\operatorname{rot}\mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\operatorname{rot}\mathbf{b})$.

Návod: Rozepište si výrazy na levé i pravé straně ve složkách.

20. Aplikujte Laplaceův operátor na skalární pole $\varphi = \frac{1}{r^n}$.

21. Aplikujte Laplaceův operátor na vektorové pole $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}}{r}$, kde $\mathbf{v}$ je konstantní pole.

Výsledky:
4. $-\frac{2\mathbf{r}}{r^4}$, 5. $\mathrm{e}^r\frac{\mathbf{r}}{r}$, 6. $\cos r\frac{\mathbf{r}}{r}$, 7. (yz, xz, xy), 8. $\mathbf{a}$, 9. $\frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^3}$, 10. $(0, 0, -g)$, 11. $\frac{3-n}{r^n}$, 12. $-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$, 13. 0, 14. $\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}$, 15. $\mathbf{0}$, 16. $2\mathbf{v}$, 20. $\frac{n(n-1)}{r^{n+2}}$, 21. $\mathbf{0}$.