Příklady k matematické analýze 3

Veronika Borůvková

Tento materiál vznikl v rámci realizace projektu Strategický rozvoj Univerzity Hradec Králové, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002427

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Obsah

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Namísto úvodu

Víš, z jakých prvků sestává
periodická soustava?
Z probděných nocí a pokusů bezpoču,
z pochyb a nadějí, stálého učení,
z tápání, zkoušek a z tisíce výpočtů,
z čirého pramínku jasného myšlení.

Emil Calda: Mendělejev, Dmitrij Ivanovič

Dostáváte do ruky studijní text, který má pomoci pochopit látku předmětu Matematická analýza 3 oboru Finanční a pojistná matematika a hlavně pomoci s řešením úloh. V každé kapitole jsou nejprve shrnuty základní pojmy, definovány jsou stejným způsobem jako na přednáškách doktorky Francové. Kontrolní otázky mají za cíl ověřit porozumění definicím a větám. Pečlivě pročtěte definice pojmu, nakreslete obrázek, vymyslete příklad, pokuste se najít protipříklad a poté odpovězte na otázku.

> Takto jsou označeny poznámky, které mají přiblížit daný pojem, dávají příklad z reálného světa nebo vysvětlují problematiku. Rozhodně tak není označen text, který byste měli přeskočit.

Konec řešeného příkladu je označen symbolem $\bigcirc$.

Vřele doporučuji pokusit se vymyslet k dané problematice vlastní příklad a vyřešit ho. Na tom se naučíte nejvíce. Také to umožní odhadnout, jaké jsou limity námi používaných metod.

Tento text nemá být jediným vyčerpávajícím studijním materiálem, ale spíše jakýmsi průvodcem. Propočítání těchto příkladů s pravděpodobností blížící se jedné nebude stačit ke splnění zkouškové písemky.

Pokud v textu najdete nějakou nepřesnost, překlep nebo chybu, upozorněte mě, prosím, na adrese: *veronika.boruvkova@uhk.cz*. Děkuji.

1 Taylorova věta

Polynomické funkce patří k těm, se kterými se snadno pracuje. Jsou definované na celém $\mathbb{R}$, spojité, všude spojitě diferencovatelné do libovolného řádu, všude integrovatelné. Pokud bychom dokázali funkci alespoň přibližně nahradit polynomickou, můžeme s ní snáze pracovat. Ukazuje se, že ne vždy je možné nahradit funkci polynomickou na celém definičním oboru, ale lze tak učinit na okolí nějakého bodu, pokud je v něm funkce několikrát diferencovatelná. Nejjednodušší z těchto polynomů už znáte, je to tečna k funkci v daném bodě. Pojem tečny lze zobecnit následujícím způsobem:

Základní pojmy

Definice 1 *Nechť f je reálná funkce jedné proměnné, $a \in \mathbb{R}$ a f má v bodě a vlastní derivace až do řádu n. Pak polynom*

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazveme **Taylorovým polynomem n-tého řádu funkce f v bodě** a.

Čím vyššího stupně je polynom, tím přesněji aproximuje funkci na okolí nějakého bodu $a \in \mathbb{R}$.

Definice 2 *Nechť f je reálná funkce jedné proměnné, $a \in \mathbb{R}$ a f má v bodě a vlastní derivace všech řádů. Pak řadu*

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazveme **Taylorovou řadou funkce f v bodě** a.

Pokud určujeme Taylorův polynom v bodě $x = 0$, často se mu také říká **Maclaurinův polynom**, odvozené Taylorově řadě pak **Maclaurinova řada**.

Taylorův polynom je jen přiblížením k dané funkci, proto se bude na okolí bodu skutečná hodnota funkce f lišit od Taylorova polynomu. Tomuto rozdílu říkáme zbytek. Uvědomte si, že zbytek není konstanta. Tento rozdíl závisí na vzdálenosti od bodu, v němž funkci rozvíjíme. Zbytek je tedy reálnou funkcí.

Věta 1 *(Taylorova věta) Nechť a, x jsou dvě různá čísla, n celé číslo, $n \geq 0$. Nechť $f(x)$ je funkce, která má derivace až do řádu $n+1$ včetně na uzavřeném intervalu I s krajními body a a x. Definujme $R_{n+1}(x)$ rovnicí*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x).$$

Nechť $g(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, která má v každém vnitřním bodě intervalu I derivaci různou od nuly. Potom existuje vnitřní bod ξ intervalu I takový, že platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{g(x)-g(a)}{g'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi).$$

Volbou $g(t) = (x-t)^{n+1}$ dostaneme

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

což je tzv. **Lagrangeův tvar zbytku**. *Volbou $g(t) = t$ dostaneme*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n,$$

což je tzv. **Cauchyův tvar zbytku**.

Věta 2 *Nechť x_0, a jsou dvě čísla, $x_0 \neq a$. Nechť funkce f má derivace všech řádů v uzavřeném intervalu, jehož krajní body jsou x_0, a. Potom platí*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots,$$

právě když $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Věta 3 *Má-li funkce f derivace v bodě a do řádu n včetně, pak*

$$R_n(x) = o(x-a)^n \quad \text{(Peanův tvar zbytku)},$$

kde symbol o značí: $f = o(g(x))$, $x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Tvrzení $R_n(x) = o(x-a)^n$ je tedy ekvivalentní s $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n}{(x-a)^n} = 0$.
Například můžeme říct, že $3x^5 + x^7 = o(x^4), x \to 0$, jelikož platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^5 + x^7}{x^4} = \lim_{x\to 0} 3x + x^3 = 0.$$

Zřejmě lze totéž tvrdit o každém polynomu s mocninami vyššími než 4 a toto tvrzení lze samozřejmě zobecnit.
Díky tomu můžeme Taylorovu řadu psát ve tvaru

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

jelikož do onoho $o((x-a)^n)$ jsou zahrnuty všechny další členy. Tento zápis zjednodušuje manipulaci s řadami.

Kontrolní otázky:

1. V čem se liší Taylorův polynom a Taylorova řada?
2. Lze Taylorovu řadu upravit na Taylorův polynom?
3. Lze Taylorův polynom upravit na Taylorovu řadu?

Odpovědi:

1. Taylorův polynom má jen konečně mnoho členů, řada nekonečně mnoho.
2. Ano, Taylorův polynom je částečným součtem Taylorovy řady.

   > Laicky řečeno, určete si, kolikátého stupně daný polynom chcete a ostatní členy vynechte.

3. Obecně ne. Pokud nevíme, že existují derivace všech řádů, nelze řadu sestavit.

Přehled Taylorových řad elementárních funkcí

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \forall\, x \in (-1,1)$$

$$\text{kde } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \qquad \forall\, x \in (-1,1]$$

Řešené příklady

Příklad 1 *Z definice určete Taylorův polynom 7. řádu funkce $f(x) = \cos x$ v bodě $a = 0$. Určete a prozkoumejte Taylorovu řadu.*

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= \cos 0 = 1, \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= -\sin 0 = 0, \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -\cos 0 = -1, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= \sin 0 = 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= \cos 0 = 1, \\ f^{(5)}(x) &= -\sin x, & f^{(5)}(0) &= -\sin 0 = 0. \end{aligned}$$

Teď už by mělo být jasné, že hodnoty derivací se pravidelně opakují v pořadí $1, 0, -1, 0$. (A lze to snadno indukcí dokázat.) Dále tedy není třeba počítat. Dosadíme:

$$\begin{aligned} T(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ x \to a. \\ T(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7 = \\ &= 1 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7),\ x \to 0. \end{aligned}$$

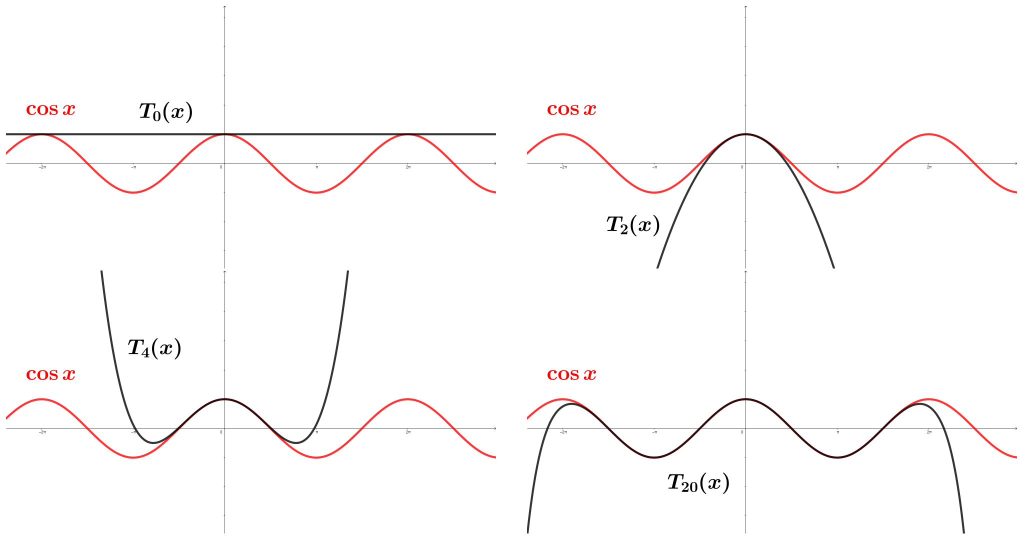
Polynom lze zobecnit na Taylorovu řadu následujícím způsobem:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Pro předchozí rovnost je třeba ověřit, pro která $x \in \mathbb{R}$ vlastně platí, tedy pro která $x \in \mathbb{R}$ řada na pravé straně konverguje. K tomu nám pomůže D'Alembertovo podílové kritérium. Pro naši řadu platí $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n(-1)^1 x^{2n} x^2 (2n)!}{(2n+2)!(-1)^n x^{2n}} \right| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)x^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \right| == \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = \\ &= |x^2| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = |x^2| \cdot 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme užili faktu, že vzhledem k limitě je výraz x^2 konstantou, lze ji tedy "vytknout" před limitu. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je limita rovna $0 < 1$, tedy podle D'Alembertova kritéria řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.



Obrázek 1.1: Taylorův polynom funkce $\cos x$.

Příklad 2 *Určete Taylorův polynom 4. řádu funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na okolí bodu $a = -1$. Určete a prozkoumejte Taylorovu řadu.*

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2}, & f(-1) &= \frac{1}{(-1)^2} = 1,\\
f'(x) &= \frac{-2}{x^3}, & f'(-1) &= \frac{-2}{(-1)^3} = 2,\\
f''(x) &= \frac{6}{x^4}, & f''(-1) &= \frac{6}{(-1)^4} = 6,\\
f'''(x) &= \frac{-24}{x^5}, & f'''(-1) &= \frac{-24}{(-1)^5} = 24,\\
f^{(4)}(x) &= \frac{120}{x^6}, & f^{(4)} &= \frac{120}{(-1)^6} = 120.
\end{aligned}
$$

Teď už by mělo být vidět, že stupeň jmenovatele roste, znaménka se střídají a v čitateli se objevuje faktoriál. Můžeme zobecnit na:

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \qquad f^{(n)}(-1) = (n+1)!.
$$

Toto zobecnění bychom ovšem měli ověřit důkazem indukcí. Nejprve ověříme platnost pro $n = 1$: $f'(x) = (-1)^1 \dfrac{(1+1)!}{x^{1+2}} = \dfrac{-2}{x^3}$, což je pravdivé. Předpokládejme tedy platnost pro $n \in \mathbb{N}$ a ověříme tvrzení pro n+1: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)' = \left((-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right)' = (-1)^n (n+1)!(-(n+2))\frac{1}{x^{n+3}} =$
$= \frac{(-1)^{n+1}(n+2)!}{x^{n+3}}$.
Indukční přechod je splněn a tvrzení je tedy platné.

Dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom:

$$\begin{aligned}
T(x) &= f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1)^1 + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \cdots + \\
&\qquad + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4 + o((x+1)^4), x \to -1 = \\
&= 1 + \frac{2}{1}(x+1) + \frac{6}{2}(x+1)^2 + \frac{24}{6}(x+1)^3 + \frac{120}{24}(x+1)^4 = \\
&= 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + 4(x+1)^3 + 5(x+1)^4 = \\
&= 1 + 2x + 2 + 3(x^2 + 2x + 1) + 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + \\
&\qquad + 5(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) = \\
&= 5x^4 + x^3(4 + 5.4) + x^2(3 + 4.3 + 5.6) + x(2 + 3.2 + 4.3 + 5.4) + \\
&\qquad + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \\
&= 5x^4 + 24x^3 + 45x^2 + 40x + 15 + o((x+1)^4),\ x \to -1.
\end{aligned}$$

Při vykreslování jednotlivých Taylorových polynomů nestačí jen použít část předpisu $5x^4 + 24x^3 + 45x^2 + 40x + 15 + o((x+1)^4)$, to by například znamenalo $T_1(x) = 40x + 15$ (tato přímka ani neprochází bodem $(1, 1)$) ale je třeba užít část neupraveného předpisu $1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + 4(x+1)^3 + 5(x+1)^5 + \cdots$, tedy $T_1(x) = 1 + 2(x+1) = 2x + 3$. To je způsobeno závorkami ve tvaru $(x+1)^k$, $k \in \mathbb{N}$.
Pokud bychom hledali Taylorův polynom v bodě 0, bude systém "použijme všechny členy až do řádu ..." fungovat ve všech tvarech Taylorova polynomu.

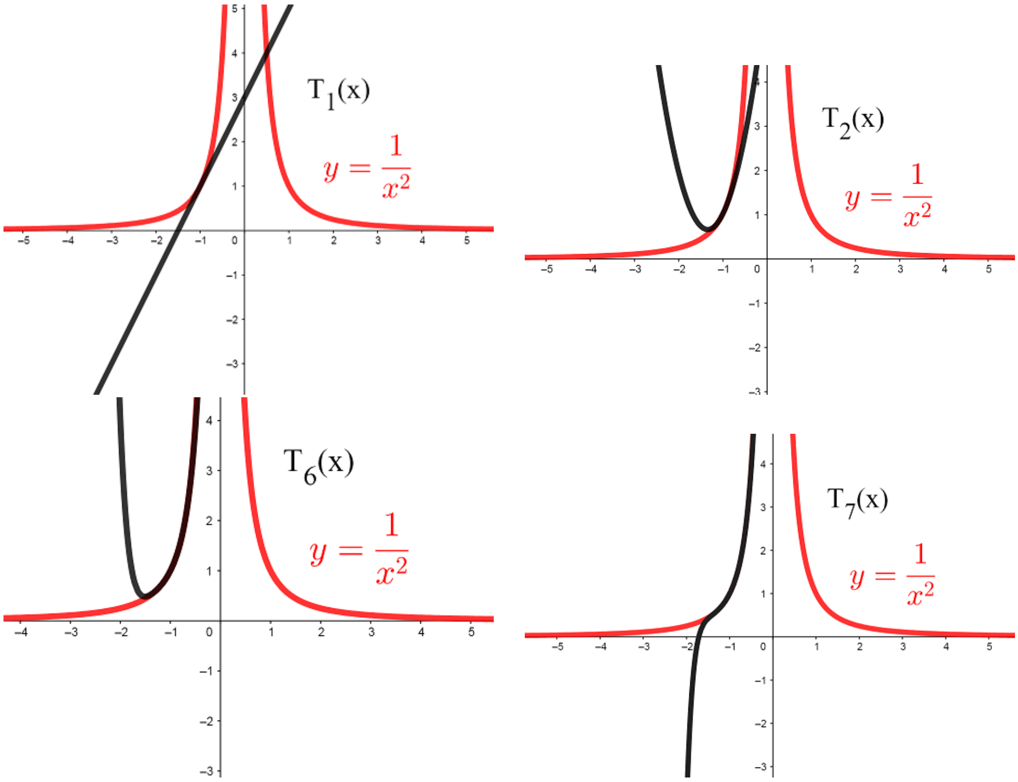
Taylorův polynom lze na okolí bodu -1 zobecnit na řadu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(n+1)!(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n.$$

Ověříme, pro která $x \in \mathbb{R}$ je řada konvergentní. Pomocí D'Alembertova kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+2)(x+1)^{n+1}\|}{(n+1)(x+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}.|x+1| = |x+1|.$$

Řada je konvergentní tam, kde platí $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 0$, tedy pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x+1| < 1$, tedy $x \in (-2, 0)$. Podle téhož kritéria je řada divergentní pro $x \in (\infty, -2) \cup (0, \infty)$, krajní



Obrázek 1.2: Taylorův polynom funkce $\frac{1}{x^2}$.

body je třeba ověřit zvlášť. Pro $x = 0$ dostáváme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(0+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)$, která nesplňuje nutnou podmínku konvergence ($a_n \to 0$) a tedy diverguje.

Pro $x = 0$ dostáváme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-2+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$. Ani ta nesplňuje nutnou podmínku konvergence, takže funkci lze rozvinout v řadu jen na intervalu $(-2, 0)$.

> Taylorova řada je speciálním případem mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, pro kterou lze definovat střed (a), poloměr (ϱ) a interval konvergence (interval $(a-\varrho, a+\varrho)$). V předchozím příkladu je střed konvergence bod $a = -1$, poloměr konvergence $\varrho = 1$ a tedy interval konvergence je $(-2, 0)$. Mocninná řada k dané funkci konverguje uvnitř intervalu konvergence, vně tohoto intervalu vždy diverguje a krajní body je třeba vyšetřit zvlášť.

○

Příklad 3 *Určete Taylorův polynom 7. řádu funkce* $f(x) = e^{x^2}$ *na okolí bodu* $a = 0$.

Řešení: K výpočtu využijeme Taylorovu řadu funkce

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

a dosadíme vnitřní funkci x^2

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \cdots = \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots . \end{aligned}$$

V tomto rozvoji se vyskytují pouze členy se sudými mocninami, můžeme si představit, že obsahuje i členy lichého stupně, které mají koeficient 0. Potom

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + 0.x^7 + o(x^7). = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^7).$$

Taylorův polynom 7. stupně je tedy

$$T(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}.$$

○

Příklad 4 *Určete Taylorův polynom 4. řádu funkce $f(x) = \cos(\sin x)$ na okolí bodu $a = 0$.*

Řešení: K řešení této úlohy použijeme známé rozvoje na okolí bodu 0:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Jelikož $\sin 0 = 0$, rozvíjíme funkci cos také na okolí bodu 0.

$$\begin{aligned} \cos u &= 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4), && \text{(dosadíme } \sin x\text{)}, \\ \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^4}{4!} + o((\sin x)^4), && \text{(dosadíme rozvoj sinu)}, \\ \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^4}{4!} + o(x^4), && \text{kde jsme navíc použili:} \end{aligned}$$

$o((\sin x)^4)$ je zbytek zanedbatelný vůči $(\sin x)^4$, který můžeme srovnat s funkcí x^4

$$\lim_{x \to 0} \frac{o((\sin x)^4)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{o((\sin x)^4)}{(\sin x)^4} \cdot \frac{(\sin x)^4}{x^4} = 0.1 = 0,$$

$o((\sin x)^4) = o(x^4)$ a symbol $o((\sin x)^4)$ můžeme nahradit $o(x^4)$.

Výraz umocníme (pomocí binomické věty nebo násobením) a upravíme:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2 - 2x\frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{36}}{2!} + \frac{x^4 - 4x^3\frac{x^3}{6} + 6x^2\frac{x^6}{36} - 4x\frac{x^9}{6^3} + \frac{x^{12}}{6^4}}{4!} + o(x^4) =$$

(členy s mocninou vyšší než x^4 jsou $o(x^4)$, zahrneme je do zbytku)

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4), x \to 0.$$

○

Příklad 5 *Určete Taylorův polynom 6. řádu funkce $f(x) = e^{x^2+3x}$ na okolí bodu 0.*

Řešení: Při řešení můžeme použít stejný postup jako v příkladu 3, dostaneme výraz

$$e^{x^2+3x} = 1 + x^2 + \frac{(x^2+3x)^2}{2!} + \frac{(x^2+3x)^3}{3!} + \frac{(x^2+3x)^4}{4!} + \cdots .$$

Druhou možností je uvědomit si, že lze upravit $e^{x^2+3x} = e^{x^2} \cdot e^{3x}$, oba členy rozvinout a vynásobit. Využijeme již upravný rozvoj e^{x^2} z příkladu 3.

$$T(x) = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) \cdot \left(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + \right.$$
$$\left. + \frac{(3x)^5}{5!} + \frac{(3x)^6}{6!} + o(x^6)\right) =$$

$$= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)\left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8} + \frac{81x^5}{40} + \right.$$
$$\left. + \frac{81x^6}{80} + +o(x^6)\right) =$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8} + \frac{81x^5}{40} + \frac{81x^6}{80} + \\ &\quad + x^2 + 3x^3 + \frac{9x^4}{2} + \frac{9x^5}{2} + \frac{27x^6}{8} + o(x^6) + \qquad \text{(stupeň 7 a výše)} \\ &\quad + \frac{x^4}{2} + \frac{3x^5}{2} + \frac{9x^6}{4} + o(x^6) + \\ &\quad + \frac{x^6}{6} + o(x^6) = \end{aligned}$$

$$= 1 + 3x + x^2\left(\frac{9}{2} + 1\right) + x^3\left(\frac{9}{2} + 3\right) + x^4\left(\frac{27}{8} + \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right) +$$
$$+ x^5\left(\frac{81}{40} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\right) + x^6\left(\frac{81}{80} + \frac{27}{8} + \frac{9}{4} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= 1 + 3x + \frac{11}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^3 + \frac{67}{8}x^4 + \frac{321}{40}x^5 + \frac{1633}{240}x^6 + o(x^6).$$

○

Taylorův polynom přibližně popisuje funkci na okolí nějakého bodu. Limita také zkoumá chování funkce na okolí bodu. Pro výpočet limity lze tedy Taylorův polynom použít, pokud budeme rozvíjet v tomto limitním bodě.

Příklad 6 *Vypočtěte limitu pomocí Taylorova polynomu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x.\sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Řešení: Ve jmenovateli je polynom třetího stupně, v čitateli tedy také provedeme rozvoj do 3. stupně.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),\\
e^x \cdot \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o(x^3) =\\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) =\\
&= x - \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + o(x^3) =\\
&= x + x^2 + x^3(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) + o(x^3) =\\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3),\ x \to 0.
\end{aligned}$$

Při roznásobování je třeba sledovat členy patřičného řádu, nestačí přestat násobit ve chvíli, kdy narazíme na první člen vyššího stupně. Zde po členu x^4 následuje znovu člen x^3. Není třeba vše skutečně vynásobit a napsat, stačí jen zkontrolovat jakého stupně budou další členy.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x.\sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} =\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

(užili jsme definici symbolu o).

Zde je vidět, proč stačí užít rozvoj do třetího stupně. Pokud bychom rozvíjeli například do 5. stupně, v čitateli by zůstaly mocniny x a v limitě by se vynulovaly. Také platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot o(x^5)}{x^5} = 0\cdot \lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^5} = 0.$$

○

Příklad 7 *Vypočtě limitu pomocí Taylorova polynomu*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + \ln(1+x)}{2x^3}.$$

Řešení: Jmenovatel je opět třetího stupně, čitatel rozvíjíme do téhož stupně.

Rozvoj funkce $\ln(1+x)$ na okolí bodu 0 je uveden v tabulce na straně 5.

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),\\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + \ln(1+x)}{2x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{2x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x(4-x)}{4x^3} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4-x}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{4-0}{0^+} = \infty.\end{aligned}$$

○

Příklad 8 *Určete přibližně hodnotu* $\ln(1,2)$ *s chybou menší než* 10^{-4}.

Řešení: Použijeme Taylorův rozvoj funkce $\ln(x+1)$ na okolí bodu 0. Nevíme přesně do jakého řádu, zvolíme si například $n = 7$ a případně přidáme nebo ubereme.

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + o(x^7),\\ \ln(1,2) &\doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\bigg|_{x=0,2} = \\ &= 0,2 - \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{3} - \frac{0,0016}{4} + \underbrace{\frac{0,00032}{5}}_{>10^{-4}} - \underbrace{\frac{0,000064}{6}}_{>10^{-4}} + \underbrace{\frac{0,0000128}{7}}_{<10^{-4}} =\end{aligned}$$

Poslední člen už nepoužijeme, tento a všechny další už změní hodnotu jen velmi málo, určitě o méně než 10^5.

$$= \frac{0,2 \cdot 120 - 0,04 \cdot 60 + 0,008 \cdot 40 - 0,0016 \cdot 30 + 0,00032 \cdot 24 - 0,000064 \cdot 20}{120} =$$
$$= 0,18232.$$

> Při sčítání jednotlivých členů nepoužívejte desetinná čísla, byli byste nuceni zaokrouhlovat a to by ovlivnilo výsledek. Zlomky a společný jmenovatel zajistí, že žádná další chyba kromě námi zvolené nevznikne. To samozřejmě předpokládá nechybujícího počtáře, jemuž se po propočítání této sbírky budete limitně blížit.

> Počet desetinných míst výsledné hodnoty nemusí být stejný jako řád chyby a nemusí to ani znamenat, že do tohoto řádu budou mít odhad a skutečná hodnota stejné cifry. Víme, že námi spočítaná hodnota se od té skutečné bude lišit o méně než $0,0001$, můžeme tedy odhadnout, že skutečná hodnota leží v intervalu $(0,18222; 0,18242)$. Pokud bychom chtěli být přesnější, víme, že následující člen bude se znaménkem $+$, tudíž skutečná hodnota leží v intervalu $(0,18232; 0,18242)$. (Další hodnoty, které budeme odčítat budou výrazně menší, takže pod $0,18232$ už nelze klesnout.)

Neřešené příklady

1. Z definice určete Taylorův polynom 4. řádu funkce $f(x) = \mathrm{tg}(x^2)$ v bodě 0.
2. Určete Taylorův polynom 6. řádu funkce $f(x) = \cos^2 x$ v bod2 0.
3. Pomocí Taylorova polynomu určete limitu funkce
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2}{x^2}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x)$ (Nápověda: převeďte na jeden zlomek.)
4. Určete přibližně hodnotu $\sqrt{\frac{4}{5}}$ s chybou menší než 10^{-3}.

Řešení

1. $T(x) = x^2$,
2. $T(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45}$,
3. (a) 1, (b) $\frac{1}{2}$,

2 Metrické prostory

2.1 Definice a otevřená koule

Jak název napovídá, v metrických prostorech je možné nějakým způsobem měřit vzdálenost mezi jednotlivými prvky. Toto měření ovšem chceme zobecnit, takže tato vzdálenost nemusí být pouze v jednotkách délky. Pokud vezmeme nějakou množinu lidí, řekněme obyvatel Hradce Králové, pro každé dva můžeme určit například jejich geografickou vzdálenost v nějakém okamžiku, ale třeba také délku řetězce lidí, kteří se vzájemně znají a tím je spojují.
Při tomto zobecnění bychom ovšem rádi zachovali některé vlastnosti vzdálenosti. Například, aby nebyla nikdy záporná, nulová tehdy a jen tehdy, je-li cíl stejný jako počátek a cesta tam i zpět byla stejně dlouhá. Pokud k těmto požadavkům přidáme ještě trojúhelníkovou nerovnost, dostaneme definici metrického prostoru.

Základní pojmy

Definice 3 *Nechť je dána libovolná množina P a konečná reálná funkce ρ s definičním oborem $P \times P$ (tzn. ke každému $x \in P$ a $y \in P$ je definováno reálné číslo $\varrho(x,y)$), která má tyto vlastnosti:*

(i) $\forall\, x \in P : \varrho(x,x) = 0$,

(ii) $\forall\, x,y \in P : x \neq y \Rightarrow \varrho(x,y) > 0$ *(pozitivita),*

(iii) $\forall\, x,y \in P : \varrho(x,y) = \rho(y,x)$ *(symetrie),*

(iv) $\forall\, x,y,z \in P : \varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$ *(trojúhelníková nerovnost).*

Potom se funkce ϱ nazývá ***metrika*** *v množině P a množina P spolu s funkcí ϱ se nazývá* ***metrický prostor****, označuje se (P,ϱ). Prvky metrického prostoru se nazývají* ***body****. Pro dva body $x,y \in P$ se číslo $\varrho(x,y)$ nazývá* ***vzdálenost bodů*** *x a y.*

Body (i), (ii) v definici 3 mohou být nahrazeny ekvivalentními:

(1) $\forall\, x \in P : \varrho(x,x) \geq 0$,

(2) $\forall\, x,y \in P : \varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

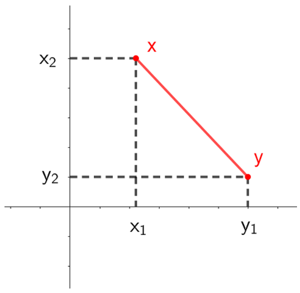
> V následujících prostorech bychom správně předtím, než dvojici (P, ϱ) prohlásíme za metrický prostor, měli dokázat, že ϱ je skutečně metrika a teprve pak sestavit definici. Níže zmíněná zobrazení však skutečně tvoří metriku na $\mathbb{R}^n$ a proto je zapisujeme do definic.

Definice 4 *Nechť* $P = \mathbb{R}^n$ *a*

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. *Pak se metrika* ϱ *nazývá* **euklidovská metrika** *v množině* $\mathbb{R}^n$ *a prostor* $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ *se nazývá* n**-rozměrný euklidovský prostor**, *označuje se* E_n.

> Euklidovská metrika je způsob, jakým jsme zvyklí měřit (nejkratší) vzdálenosti mezi body v reálném světě, pokud užijeme kolmý souřadnicový systém.
> Pro $n = 1$ se jedná o měření vzdálenosti bodů na reálné ose a předpis metriky je $\varrho(x, y) = \sqrt{(x - y)} = |x - y|$, pro body $x, y \in \mathbb{R}$
> Pro $n = 2$ měříme vzdálenost bodů v rovině a pro $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ platí $\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)}$. Z obrázku 2.1 je vidět, že metrika se spočítá jako délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku pomocí Pythagorovy věty.



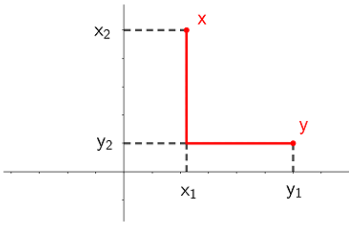
Obrázek 2.1: Euklidovská metrika v $\mathbb{R}^2$.

Definice 5 *Nechť* $P = \mathbb{R}^n$ *a*

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. *Pak* $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ *je metrický prostor. Tato metrika se nazývá* **taximetrika**.

> Taximetrika sčítá vzdálenosti v jednotlivých souřadnicích. Jelikož tím připomíná cestu v obdélníkové síti, jakou tvoří streets a avenues na Manhattanu, říká se jí často také **newyorská** nebo **manhattanská metrika**.



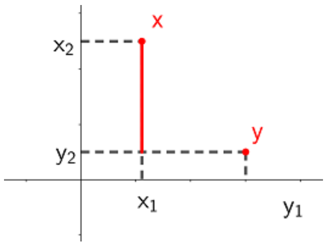
Obrázek 2.2: Taximetrika v $\mathbb{R}^2$.

Definice 6 *Nechť $P = \mathbb{R}^n$ a*

$$\sigma(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Pak $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ je metrický prostor. Nazývá se **maximetrika***.*

> Maximetrika zkoumá vzdálenosti v jednotlivých souřadnicích a vybere si tu největší.



Obrázek 2.3: Maximetrika v $\mathbb{R}^2$.

Definice 7 *Pro každé $x, y \in P$ položíme*

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Potom (P, ϱ) je metrický prostor. Tato metrika se nazývá **diskrétní metrika***.*

> Diskrétní metrika rozlišuje jen dvě možnosti: "tady"a "jinde". Příklady otevřených koulí v této metrice najdete v příkladu 12.

Definice 8 *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, nechť $a \in P$ a nechť $\varepsilon > 0$. Množina všech bodů $x \in P$, pro které platí $\varrho(x, a) < \varepsilon$, se nazývá* **otevřená koule** *se středem v bodě a a poloměrem ε, označuje se $B(a, \varepsilon)$, $B_\varepsilon(a)$ tj.*

$$B(a, \varepsilon) = B_\varepsilon(a) = \{x \in P \mid \varrho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Otevřená koule se středem a a poloměrem ε se také nazývá **ε-okolí bodu** *a. Množina $B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ se nazývá* **prstencové (redukované) ε-okolí bodu** *a, označíme ho $P(a, \varepsilon)$, $P_\varepsilon(a)$.*
Okolím *$O(a)$ bodu a se nazývá každá množina, jejíž podmnožinou je nějaké sférické ε-okolí bodu a.* **Prstencovým (redukovaným) okolím** *bodu a se nazývá každá množina $O(a) \setminus \{a\}$, kde $O(a)$ je libovolné okolí bodu a.*

Otevřenou kouli si lze představit jako oblast, kam lze dojet na poslední litr paliva. Pro euklidovský prostor E_3 se skutečně jedná o trojrozměrnou kouli.
Je třeba mít na paměti, že tvar koule závisí na metrice, takže na téže množině s různými metrikami bude otevřená koule vypadat jinak. Příklady koule vzhledem různým metrikám najdete v příkladu 13.

Kontrolní otázky

1. Platí trojúhelníková rovnost i v případě, že "přeházíme" body x, y, z?
2. Je prostor budovy univerzity metrickým prostorem?
3. Jaký je předpis euklidovské, taxi a maximetriky v $\mathbb{R}$?

Odpovědi:

1. Ano, nerovnost platí pro libovolnou trojici z metrického prostoru, tedy i pro tu přeházenou.
2. Samotný prostor budovy metrickým prostorem nemůže být, dokud v něm nedefinujeme metriku.
3. Ve všech třech případech platí $\varrho(x, y) = |x - y|$, tyto metriky v $\mathbb{R}$ splývají.

Řešené příklady

V prostoru $\mathbb{R}^2$ budeme souřadnice bodů značit (x, y) namísto (x_1, x_2).

Příklad 9 *Rozhodněte, jak vypadá otevřená koule $B_4(-2)$ v $\mathbb{R}$ s euklidovskou metrikou.*

Řešení: Koule $B_4(-2)$ je množina $\{x \in \mathbb{R} \mid \varrho(x, -2) < 4\}$. Můžeme počítat

$$\varrho(x, -2) = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$$

a řešíme tedy nerovnici $|x - 2| < 4$. Buď situaci rozdělíme na dva případy nebo, což je jednodušší, využijeme geometrický význam absolutní hodnoty a hledáme všechna reálná čísla, jejichž vzdálenost od 2 je menší než 4. Získáme interval $(2, 6)$.

○

Příklad 10 *Rozhodněte, jak vypadá otevřená koule $B_{(-2)}(4)$ v $\mathbb{R}$s euklidovskou metrikou.*

Řešení: Koule $B_{(-2)}(4)$ neexistuje v žádném prostoru, jelikož by měla mít poloměr $r = -2$, což nelze, poloměr musí být kladné číslo.

○

Příklad 11 *Rozhodněte, jak vypadá otevřená koule $B_6(4)$ v $\mathbb{N}$ s euklidovskou metrikou.*

Řešení: Koule $B_6(4)$ je množina $\{x \in \mathbb{N} \mid \varrho(x,4) < 6\}$. Víme, že body, které v této kouli leží musí splňovat $|x-4| < 6$. Tomu přesně odpovídá interval $(-2,10)$. Nesmíme však zapomenout na prostor, ve kterém kouli hledáme. Nejsme na množině $\mathbb{R}$, ale $\mathbb{N}$. Řešením je tedy množina $(-2,10) \cap \mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$\bigcirc$

Příklad 12 *V prostoru $(\mathbb{N}, \varrho)$ s diskrétní metrikou určete otevřené koule $B_{\frac{1}{2}}(5)$, $B_1(5)$, $B_7(5)$.*

Řešení: Otevřená koule $B_{\frac{1}{2}}(5)$ je množina $\{x \in \mathbb{N} \mid \varrho(x,5) < \frac{1}{2}\}$. Vzhledem k tomu, že vzdálenost v diskrétní metrice může být jen 0 nebo 1. Do této otevřené koule patří jen body, jejichž vzdálenost od bodu 5 je přesně rovna nule. Podle definice diskrétní metriky je tedy $B_{\frac{1}{2}}(5) = \{5\}$.
Otevřená koule $B_1(5)$ je množina $\{x \in \mathbb{N} \mid \varrho(x,5) < 1\}$, což stejně jako v předchozí části splňují pouze body, jejichž vzdálenost od bodu 5 je nula, tedy $B_1(5) = \{5\}$.
Otevřená koule $B_7(5)$ je množina $\{x \in \mathbb{N} \mid \varrho(x,5) < 7\}$, což znamená, že do této množiny patří všechny body, jejichž vzdálenost od bodu 5 je nula i jedna. Jinou možnost nemáme. Otevřenou koulí je tedy celý prostor, v tomto případě $B_7(5) = \mathbb{N}$.

> Všimněte si, že v posledním případě stačí poloměr s jakýmkoli číslem větším než 1 a koulí bude vždy celý prostor.

$\bigcirc$

Příklad 13 *Rozhodněte, jak vypadá otevřená koule $B_2((3,4))$ na množině $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou, maximovou a taximetrikou.*

Řešení: Nezávisle na metrice platí, že

$$B_2((3,4)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varrho((x,y),(3,4)) < 2\}.$$

V euklidovské metrice:

$$\begin{aligned} \varrho((x,y),(3,4)) &< 2, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} &< 2, && \text{(umocníme, obě strany jsou kladné)} \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 &< 4. && \text{Toto je předpis kruhu.} \end{aligned}$$

V maximové metrice:

$$\begin{aligned} \varrho((x,y),(3,4)) &< 2, \\ \max\{|x-3|, |y-4|\} &< 2, && \text{(nerovnost musí platit pro obě abs. hodnoty)} \\ |x-3| < 2 \wedge |y-4| &< 2 && \text{(geometrický význam absolutní hodnoty)} \\ x \in (1,5) \wedge y &\in (2,6). && \text{Toto je čtverec.} \end{aligned}$$

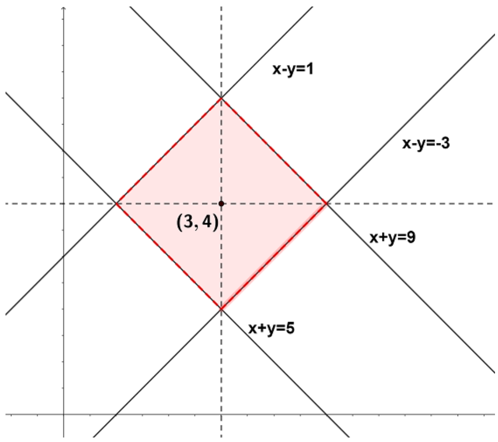
V taximetrice:

$$\varrho\,((x,y),(3,4)) < 2,$$
$$|x-3| + |y-4| < 2, \qquad \text{je třeba rozdělit na intervaly podle bodů } x = 3,\ y = 4.$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x < 3,\ y < 4:} \\ -(x-3)-(y-4) &< 2, \\ -x-y &< -5. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{x \geq 3,\ y < 4:} \\ (x-3)-(y-4) &< 2, \\ x-y &< 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x \geq 3,\ y \geq 4:} \\ (x-3)+(y-4) &< 2, \\ x+y &< 9. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{x < 3,\ y \geq 4:} \\ -(x-3)+(y-4) &< 2, \\ -x+y &< 3. \end{aligned}$$

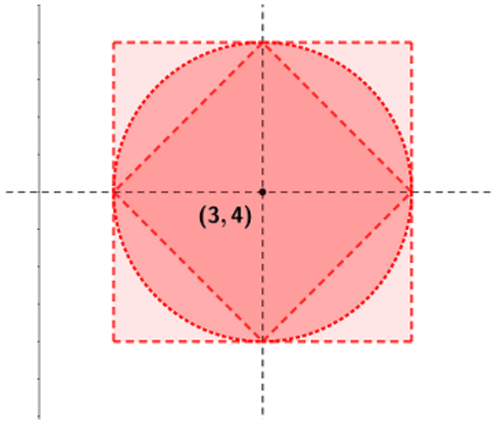
Podmínky $x = 3$, $y = 4$ rozdělí rovinu do čtyř částí, v každé z nich pak platí nerovnost. Výsledkem jsou čtyři trojúhelníky, které po sjednocení dají čtverec. Najdete ho na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Otevřená koule v taximetrice.

Pokud všechny koule zakreslíme najednou, získáme obrázek 2.5, kde uvnitř je koule v taximetrice, prostřední je koule vzhledem k euklidovské metrice a vnější je v maximetrice.
Koule vzhledem k těmto metrikám budou vždy tohoto tvaru a tohoto uspořádání, nezávisle na středu a poloměru koule.

○



Obrázek 2.5: Otevřená koule v různých metrikách.

Příklad 14 *Rozhodněte, zda je dvojice* (P, ϱ) *metrickým prostorem, jestliže* $P = \mathbb{R}^2$ *rozdělené přímkou* h *na dvě části a* ϱ *je metrika hraničního přechodu definovaná takto:*

- *Bod* H *je hraniční přechod, platí* $H \in h$.
- *Pokud se dva body nachází na stejném území, jejich vzdálenost je určena euklidovskou metrikou* ϱ_e.
- *Pokud se body* A, B *nachází na různých územích musíme přes hraniční přechod. Definujeme* $\varrho(A, B) = \varrho_e(A, H) + \varrho_e(H, B)$.

Dále vyšetřete tvar otevřené koule v tomto metrickém prostoru.

Řešení: Ověříme, že se jedná o metrický prostor:

(i) $\forall A \in \mathbb{R}^2$ platí, že A je ve stejném území jako A, tedy podle euklidovské metriky $\varrho(A, A) = 0$.

(ii) Zvolme A, $B \in \mathbb{R}^2$ libovolně. Pokud leží na stejném území, pak $\varrho(A, B) > 0$ podle euklidovské metriky. Pokud leží v různých územích, platí $\varrho(A, B) = \varrho_e(A, H) + \varrho_e(H, B)$. Jelikož $A \neq B$, alespoň jedna z euklidovských metrik je nenulová, tedy kladná, odtud $\varrho(A, B) > 0$.

(iii) Symetrie plyne z definice pomocí euklidovské metriky.

(iv) Zvolme $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Mohou nastat následující možnosti:

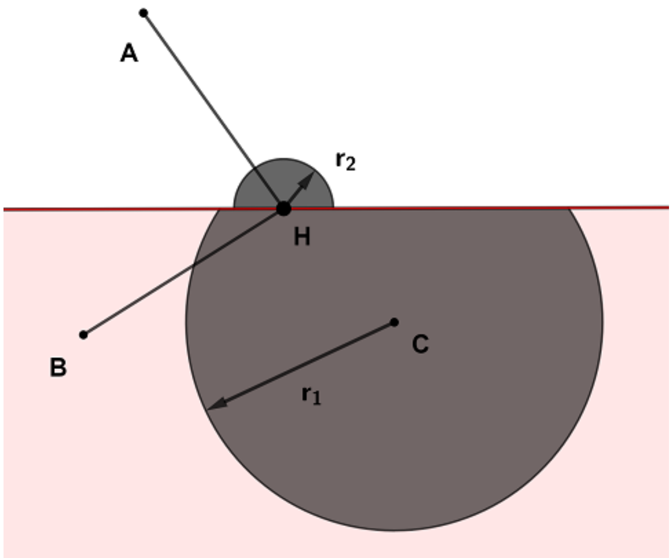
- A, B, C leží ve stejné polorovině: Nerovnost plyne z euklidovské metriky.
- A, B leží ve stejné polorovině, C nikoliv:

$$\begin{aligned} \varrho(A, C) = \varrho_e(A, H) + \varrho_e(H, C) &\leq \text{(podle euklid. metriky)} \\ &\leq \varrho_e(A, B) + \varrho_e(B, H) + \varrho_e(H, C) = \\ \text{(vzdálenost přes hranici)} \quad &= \varrho(A, B) + \varrho(B, C). \end{aligned}$$

- B, C leží ve stejné polorovině, A nikoliv: dokáže se stejně jako předchozí případ.
- A, C leží ve stejné polorovině, B nikoliv:

$$\begin{aligned}\varrho(A,C) &= \varrho_e(A,C) \quad \text{(podle euklid. metriky)}\\ &\leq \varrho_e(A,H)+\varrho_e(H,C) \leq \quad (\text{zvětšíme o } 2\varrho_e(H,B))\\ &\leq \varrho_e(A,H)+\varrho_e(H,B)+\varrho_e(B,H)+\varrho_e(H,C) =\\ \text{(přes hranici)} \quad &= \varrho(A,B)+\varrho(B,C).\end{aligned}$$

Okolí bodu je v každém z území stejné, jako v euklidovské metrice, Pokud se okolí potká s přímkou h, nepřekročí ji. Jednu takovou otevřenou kouli $B_{r_1}(C)$ najdete na obrázku 2.6. Poloměr $r_2 = r_1 - \varrho(C,H)$.



Obrázek 2.6: Otevřená koule v metrickém prostoru hraničního přechodu.

○

Příklad 15 *Rozhodněte, zda je dvojice (P,ϱ) metrickým prostorem, jestliže $P=(0,\infty)$, $\varrho(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$. Určete otevřenou kouli $B_{\frac{1}{2}}(1)$.*

Řešení:

(i) Zvolme libovolně $x \in (0,\infty)$. Pak $\varrho(x,y) = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right| = |0| = 0$.

(ii) Zvolme $x, y \in (0,\infty)$ libovolná, různá. Platí $\varrho(x,y) = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \geq 0$ z vlastností absolutní hodnoty.

(iii) Zvolme $x, y \in (0, \infty)$ libovolná, různá.

$$\varrho(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|-1.\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \varrho(y,x).$$

(iv) Pro libovolná $x, y, z \in (0, \infty)$ platí

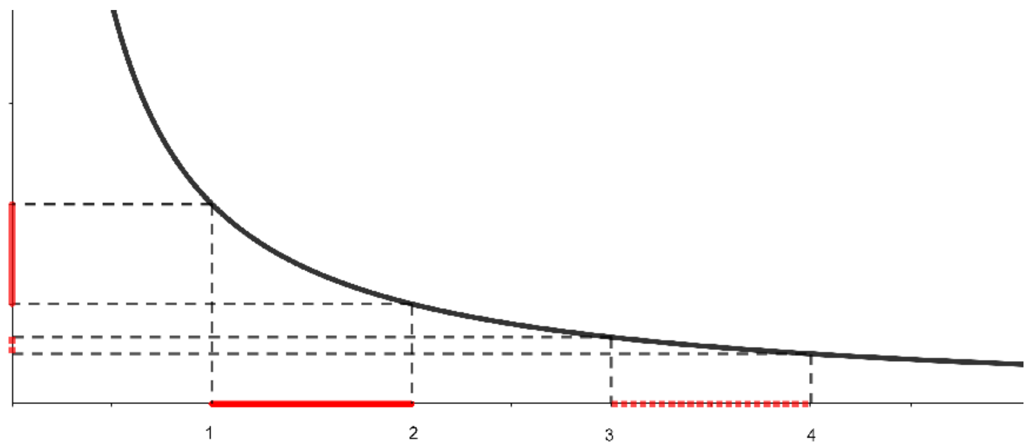
$$\varrho(x,z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = \varrho(x,y) + \varrho(y,z),$$

kde jsme užili trojúhelníkovou nerovnost pro reálná čísla.

Tímto jsme ověřili, že uspořádaná dvojice (P, ϱ) tvoří metrický prostor. Pojďme tento metrický prostor prozkoumat hlouběji a podívejme se na některé vzdálenosti.

$$\varrho(1,2) = \left|\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},$$
$$\varrho(4,3) = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-4}{12}\right| = \left|-\frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12}.$$

Znázornění příslušných vzdáleností najdete v obrázku 2.7. Nezapomeňte, že množinou, na které definujeme metriku, je pouze interval $(0, \infty)$, který zde znázorňuje vodorovná osa. Vše ostatní je pouze pomocná konstrukce. (Pro snazší porozumnění si lze představit, že jsme k našemu prostoru přiblížili nekonečné konvexní hyperbolické zrcadlo a vzdálenosti měříme v obrazu tohoto zrcadla.)



Obrázek 2.7: Vzdálenost v metrice ϱ.

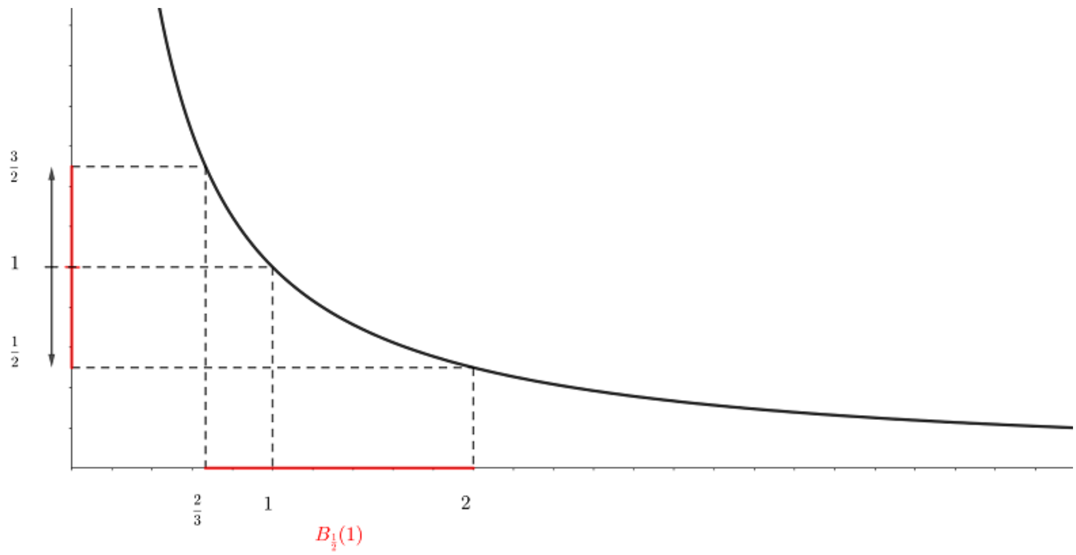
Určete otevřenou kouli $B_{\frac{1}{2}}(1)$.
Platí $B_{\frac{1}{2}}(1) = \left\{x \in (0,\infty) \mid \varrho(x,1) < \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in (0,\infty) \mid \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{1}\right| < \frac{1}{2}\right\}$.
Jelikož $x \in (0, \infty)$, lze v nerovnicích násobit neznámou. Mohou nastat následující možnosti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}-1\right) &\geq 0, \\ \frac{1}{x} &\geq 1, \\ 1 &\geq x. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \left(\frac{1}{x}-1\right) &< 0, \\ \frac{1}{x} &< 1, \\ 1 &< x. \end{aligned}$$

Platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}-1 &< \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} &< \frac{3}{2}, \\ \frac{2}{3} &< x, \\ \\ x &\in (\frac{2}{3}, 1\rangle. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\left(\frac{1}{x}-1\right) &< \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x}-1 &> -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} &> \frac{1}{2}, \\ 2 &> x, \\ x &\in (1, 2). \end{aligned}$$

Sjednocením obou intervalů získáme $B_{\frac{1}{2}}(1) = \left(\frac{2}{3}, 2\right\rangle$.



Obrázek 2.8: Okolí bodu v metrice ϱ.

Všimněte si, že okolí bodu $B_{\frac{1}{2}}(1)$ není v eukleidovské metrice (ve které jsme zvyklí přemýšlet) symetrickým intervalem se středem v bodě 1. Okolí bodu a tudíž i pojmy otevřené a uzavřené množiny vždy závisí nejen na množině, ale také na metrice na ní definované.

> Pro metriku má smysl se ptát, jestli je tzv. invariantní vůči posunutí, jestli se posunutím obou bodů stejným směrem nezmění jejich vzdálenost, tedy $\varrho(x, y) = \varrho(x+v, y+v)$, $v \in P$.
> Metrika v tomto příkladu není invariantní vůči posunutí.

○

Neřešené příklady

1. Určete otevřenou kouli $B_1(-2, 4)$ na množině $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou, maximovou a taximetrikou.
2. V metrickém prostoru z příkladu 15: $P = (0, \infty)$, $\rho(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ určete otevřenou kouli $B_1(1)$.
3. V prostoru $(\mathbb{R}, \varrho)$ s diskrétní metrikou určete otevřené koule $B_{\frac{1}{3}}(2)$, $B_1(2)$, $B_7(2)$.

Řešení:

1. Koule mají stejný tvar jako v obrázku 2.5, jen jsou posunuté do středu $(-2, 4)$ a mají poloměr 1.
2. $B_1(1) = (\frac{1}{2}, \infty)$,
3. $B_{\frac{1}{3}}(2) = \{2\}$. $B_1(2) = \{2\}$, $B_7(2) = \mathbb{R}$.

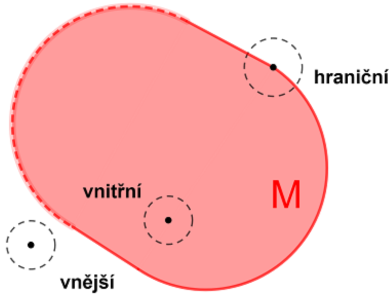
2.2 Otevřené a uzavřené množiny

Základní pojmy

Definice 9 *Nechť M je libovolná podmnožina v metrickém prostoru (P, ϱ).*

- *Bod $x \in P$ se nazývá* **vnitřní bod množiny** *M, právě když existuje takové okolí $O(x)$ bodu x, které celé náleží množině M, tj. platí $O(x) \subseteq M$.*
- *Bod $x \in P$ se nazývá* **vnější bod množiny** *M, právě když existuje takové okolí $O(x)$ bodu x, které neobsahuje žádný bod množiny M, tj. platí $O(x) \cap M = \emptyset$.*
- *Bod $x \in P$ se nazývá* **hraniční bod množiny** *M, právě když v každém okolí $O(x)$ bodu x leží body, které patří množině M, i body, které nepatří množině M.*

Definice 10 *Nechť M je libovolná podmnožina v metrickém prostoru (P, ϱ). Množina M se nazývá* **ohraničená (omezená) množina** *v P, právě když existuje takový bod $x \in P$, že platí $M \subseteq O(x)$.*



Obrázek 2.9: Typy bodů v metrickém prostoru.

Definice 11 *Nechť M je libovolná podmnožina v metrickém prostoru (P, ϱ).*

- *Bod $x \in P$ se nazývá* **hromadný bod množiny** *M, právě když každé okolí $O(x)$ bodu x obsahuje alespoň jeden bod množiny M různý od bodu x (tj. každé prstencové okolí $P(x)$ bodu x obsahuje alespoň jeden bod množiny M).*
- *Bod $x \in M$ se nazývá* **izolovaný bod množiny** *M, právě když není jejím hromadným bodem.*

Definice 12 *Nechť M je libovolná podmnožina v metrickém prostoru (P, ϱ).*

- *Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá* **hranice množiny** *M, označíme ji $h(M)$.*
- *Množina M se nazývá* **otevřená množina***, právě když každý její bod je jejím vnitřním bodem.*
- *Množina M se nazývá* **uzavřená množina***, právě když obsahuje všechny své hraniční body, tj. platí $h(M) \subseteq M$.*
- *Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá* **vnitřek množiny** *M, označuje se M°.*
- *Množina $M \cup h(M)$ se nazývá* **uzávěr množiny** *M, označuje se $\overline{M}$.*
- *Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá* **derivace množiny** *M, označuje se M'.*

> Ukazovat otevřenost či uzavřenost množiny z definice může být někdy obtížné, často se hodí užít některého z následujících tvrzení:

Věta 4 *Nechť M je libovolná podmnožina v prostoru (P, ϱ). Platí*

(i) $\overline{M} = M^\circ \cup h(M)$,

(ii) $M^\circ \cap h(M) = \emptyset$,

(iii) $\overline{M} = M \cup M'$.

Věta 5 *(Vlastnosti uzavřených množin) Nechť M je libovolná podmnožina v prostoru (P, ϱ). Platí*

(i) *Hranice a uzávěr každé množiny M je uzavřená množina.*

(ii) $M \subseteq \overline{M}$, $h(M) \subseteq \overline{M}$.

(iii) *Množina M je uzavřená, právě když $M = \overline{M}$.*

(iv) *Množina M je uzavřená, právě když $h(M) \subseteq M$.*

(v) *Množina M je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body nebo nemá žádné hromadné body.*

(vi) *Množina M je uzavřená, právě když její doplněk $P \setminus M$ je otevřenou množinou.*

(vii) *Každý bod uzávěru množiny M je buď jejím hromadným bodem nebo izolovaným bodem.*

(viii) *Průnik dvou uzavřených množin je opět uzavřenou množinou.*

Věta 6 *(Vlastnosti otevřených množin) Nechť M je libovolná podmnožina v prostoru (P, ϱ). Platí*

(i) *Vnitřek každé množiny M je otevřená množina.*

(ii) $M^\circ \subseteq M$

(iii) *Množina M je otevřená, právě když $M = M^\circ$.*

(iv) *Množina M je otevřená, právě když její doplněk $P \setminus M$ je uzavřenou množinou.*

(v) *Otevřená množina neobsahuje žádný svůj hraniční bod.*

(vi) *Sjednocení dvou otevřených množin je opět otevřenou množinou.*

Definice 13 *Nechť M je libovolná podmnožina v metrickém prostoru (P, ϱ).*

- *Množina M se nazývá* **kompaktní množina***, právě když je uzavřená a ohraničená.*

- *Otevřená množina M se nazývá* **oblast***, právě když každé dva její body lze spojit lomenou čárou, která celá náleží množině M.*

- *Množina M se nazývá* **uzavřená oblast***, právě když je uzávěrem nějaké oblasti.*

Kontrolní otázky

1. Je otevřená koule otevřenou množinou?
2. Jestliže je bod vnitřním bodem množiny, náleží této množině?
3. Jestliže je bod vnějším bodem množiny, náleží této množině?
4. Jestliže je bod hraničním bodem množiny, náleží této množině?
5. Jestliže je bod hromadným bodem množiny, náleží této množině?
6. Jestliže je bod izolovaným bodem množiny, náleží této množině?
7. Může být množina zároveň otevřená i uzavřená?
8. Existuje množina, která není otevřená a současně není uzavřená?

Odpovědi:

1. Ano, je, každý bod otevřené koule je jejím vnitřním bodem, neboť existuje okolí tohoto bodu, které celé, tj. i se zkoumaným bodem, náleží otevřené kouli.
2. Ano, platí $x \in O(x) \subseteq M$.
3. Ne. Okolí bodu a množina nemají žádný společný bod.
4. Nelze rozhodnot.
5. Nelze rozhodnout.
6. Ano, z definice.
7. Ano, může, takovým množinám se říká obojetné. Příkladem je třeba prázdná množina v libovolném metrickém prostoru.
8. Ano, existuje. Například interval $(-5, 12\rangle$ v euklidovském prostoru E_1 (reálná osa s "obvyklým"měřením vzdáleností).

Řešené příklady

Příklad 16 *Rozhodněte, zda jsou množiny otevřené/uzavřené v $\mathbb{R}$, určete jejich vnitřek a uzávěr. Prostor je opatřen euklidovskou metrikou.*

a) $A = (-5, \frac{1}{3}) \cup (4, \infty)$,

b) $B = (-\infty, \pi\rangle$,

c) $C = \mathbb{N}$.

Řešení:

a) Množina A je otevřená, jelikož s každým bodem obsahuje i nějaké jeho okolí. Krajní body do A nepatří, takže se k nim jen můžeme přiblížit. Ale i když si zvolíme bod velmi blízko, například $4,001$, můžeme kolem tohoto bodu najít otevřenou kouli $(4,0005; 4,0015)$, která do množiny spadá.
Hranice množiny je množina obsahující tři body $\{-5, \frac{1}{3}, 4\}$, která do A nepatří a A tedy není uzavřená.
Otevřená množina je sama sobě vnitřkem, tedy $A^\circ = A = (-5, \frac{1}{3}) \cup (4, \infty)$.
Uzávěr množiny získáme jako $\overline{A} = A \cup h(A) = \langle -5, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle 4, \infty)$.

b) V bodě π bude každá otevřená koule přesahovat množinu B, takže B není otevřená. Zleva není množina nijak omezená, hranicí je jediný bod $h(B) = \{\pi\}$, který je v B obsažen, množina B je tedy uzavřená.
Uzavřená množina je sama sobě uzávěrem, tedy $\overline{B} = (-\infty, \pi\rangle$.
Vnitřek množiny získáme odstraněním hranice:

$$B^\circ = \overline{B} \setminus h(B) = (-\infty, \pi\rangle \setminus \{\pi\} = (-\infty, \pi).$$

c) Okolí každého z bodů přesáhne mimo množinu C, množina tedy není otevřená.
U této množiny je obtížnější představit si její hranici, můžeme tedy uzavřenost množiny ukázat jako otevřenost jejího doplňku. $C' = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \ldots$, což je sjednocení otevřených množin, tedy opět množina otevřená. Její doplněk, původní množina C je pak uzavřená.
Množina je sama sobě uzávěrem.
Pro každý bod z množiny C každé okolí přesáhne mimo množinu, žádný bod tedy není vnitřním a $C^\circ = \emptyset$.

○

Příklad 17 *Rozhodněte, zda jsou množiny otevřené/uzavřené v $\mathbb{R}^2$, určete jejich vnitřek a uzávěr. Prostor je opatřen euklidovskou metrikou.*

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$,

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, -1 \leq y \leq 1\}$,

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 2y + 3 > 0\}$,

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y^2 - 1 \leq x \leq y^2 + 2\}$,

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2,\ y = 2\}$,

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 2,\ y = 2\}$.

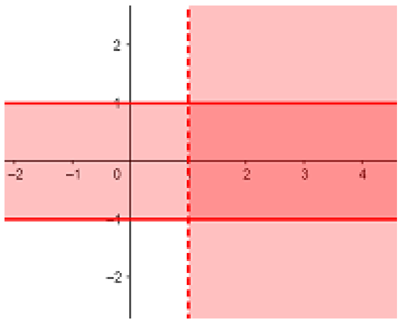
Řešení:

a) Množinou A je elipsa a její vnitřek, hranici tvoří samotná elipsa. Jsou to přesně body, jeichž každé okolí zasahuje i do množiny A i do jejího doplňku. Hranice je obsažena v množině a A je uzavřená.
Množina A obsahuje své hraniční body, nemůže tedy být otevřená. (Okolí bodu nepadne celé do A.)
Z uzavřenosti množiny plyne $\overline{A} = A$.
Vnitřek získáme po odečtení hranice

$$A^\circ = \overline{A} \setminus h(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\}.$$

b) Otevřenost: Bod $(2, 1)$ je hraničním bodem přitom je v množině obsažen. B není otevřenou množinou.
Část přímky $x = 1$ tvoří hranici B, ale nepatří do ní. Množina B pak neobsahuje celou svou hranici a není uzavřená.
Uzávěr získáme přidáním hranice,

$$\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$



Vnitřek získáme odstraněním hranice,

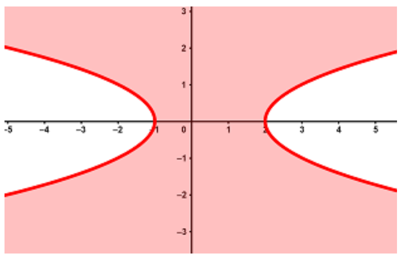
$$B^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, -1 < y < 1\}.$$

c) Množina C je polorovina ohraničená přímkou $5x - 2y + 3 = 0$, ale svou hranici neobsahuje. Zřejmě je otevřenou množinou a není množinou uzavřenou.
Otevřená množina je sama sobě vnitřkem, uzávěr získáme přidáním hranice.

$$\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 2y + 3 \geq 0\}.$$

d) Množina D je sevřená mezi dvě paraboly. Obsahuje celou svoji hranici, tudíž je uzavřená a není otevřená.
Uzávěrem množiny je přímo množina D.
Vnitřek získáme odstraněním hranice,

$$D^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y^2 - 1 < x < y^2 + 2\}.$$



e) Množina E je úsečkou. Je důležité uvědomit si, že v prostoru $\mathbb{R}^2$.
V každém bodě množiny E okolí bodu přesáhne množinu, takže není otevřená.
Uzavřenost množiny určíme pomocí jejího doplňku. Doplňkem je prostor, ze kterého vyloučíme tuto úsečku. Můžeme ho zapsat takto:

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 2,\ y < 2 \vee y > 2\}.$$

Je zřejmé, že tato množina je otevřená, z toho plyne uzavřenost původní množiny E. Uzavřená množina je sama sobě uzávěrem. Nemá žádný vnitřní bod, $E^\circ = \emptyset$.

f) Množina F se od množiny E liší pouze tím, že je to úsečka bez svých krajních bodů. Užitím téhož argumentu jako předtím ukážeme, že množina není otevřená a vnitřek je prázdnou množinou.
Uzavřenost množiny opět prozkoumáme pomocí doplňku:

$$F' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2,\ y < 2 \vee y > 2\}.$$

F' obsahuje pouze část své hranice, takže není ani otevřenou ani uzavřenou množinou. Původní množina F pak není ani uzavřenou ani otevřenou množinou.
hranicí množiny F je množina E.

○

Neřešené příklady

1. Rozhodněte, zda jsou množiny otevřené/uzavřené v $\mathbb{R}$, určete jejich vnitřek a uzávěr. Prostor je opatřen euklidovskou metrikou.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \wedge \frac{2}{3} \leq x \leq 5\}$,

   (b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} > 5\}$.

2. Rozhodněte, zda jsou množiny otevřené/uzavřené v $\mathbb{R}^2$, určete jejich vnitřek a uzávěr. Prostor je opatřen euklidovskou metrikou.

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 2x - 1, y < -2x^(2) - 5x - 2\}$,

   (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x^3 + x - 1\}$.

Řešení

1. (a) $A = \langle -2, 0\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 5\rangle$, uzavřená, není otevřená, $A^\circ = (-2,0) \cup (\frac{2}{3}, 5)$, $\overline{A} = A$.

   (b) $B = \{26, 27, 28, 29, \dots\}$, uzavřená, není otevřená, $\overline{B} = B$, $B^\circ = \emptyset$.

2. (a) $A = \emptyset$, otevřená a uzavřená zároveň, $A^\circ = \overline{B} = \emptyset$.

   (b) B je otevřená, není uzavřená, $B^\circ = B$, $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x^3 + x - 1\}$.

2.3 Posloupnosti bodů v euklidovském prostoru

Základní pojmy

Definice 14 *Zobrazení f množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel do množiny E_n se nazývá* **bodová posloupnost** *v E_n nebo* **posloupnost bodů** *v E_n a označuje se $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ nebo $\{x_m\}$.*

Definice 15 *Bodová posloupnost v E_n se nazývá* **ohraničená (neohraničená) posloupnost**, *právě když množina všech jejích členů je ohraničená (neohraničená).*

Definice 16 *Nechť $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ je bodová posloupnost v E_n a nechť $a \in E_n$. Říkáme, že* **bod** *a* **je limitou bodové posloupnosti** *$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ nebo že* **bodová posloupnost** *$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$* **konverguje k bodu** *a, a píšeme $\lim_{m\to\infty} x_m = a$, jestliže $\lim_{m\to\infty} \varrho(x_m, a) = 0$. To znamená, že*

$$\lim_{m\to\infty} x_m = a \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \varrho(x_m, a) = 0.$$

Věta 7 *(Ekvivalentní definice limity)*

(i) Bodová posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ v E_n má limitu a, právě když pro libovolné okolí $O(a)$ existuje takové $m_0 \in \mathbb{N}$, že platí $x_m \in O(a)$ pro každé $m > m_0$, tj.

$$\lim_{m\to\infty} x_m = a \Leftrightarrow \forall\, O(a)\ \exists\, m_0 \in \mathbb{N}:\ m > m_0 \Rightarrow x_m \in O(a).$$

(ii) Bodová posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ v E_n má limitu a, právě když pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $m_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m > m_0$ platí $\varrho(x_m, a) < \varepsilon$, tj. $x_m \in O(a, \varepsilon)$.

$$\lim_{m\to\infty} x_m = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m_0 \in \mathbb{N} : m > m_0 \Rightarrow \varrho(x_m, a) < \varepsilon.$$

> Následující vlastnosti jsou shodné s vlastnostmi reálné posloupnosti. Všimněte si, že pro $n = 1$ a euklidovskou metriku se skutečně jedná o reálné posloupnosti.

Věta 8 *Nechť $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ je bodová posloupnost v E_n. Platí*

(i) Každá bodová posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ v E_n má nejvýše jednu limitu.

(ii) Každá konvergentní bodová posloupnost je ohraničená.

(iii) Jestliže bodová posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ má limitu a, potom každá z ní vybraná bodová posloupnost má také limitu a.

Věta 9 *Nechť $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ je bodová posloupnost v E_n, nechť $x_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ a nechť $a \in E_n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Potom platí $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$, právě když pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mi} = a_i$.*

> Pro skutečný výpočet limity je toto velmi důležitá věta. Říká, že limitu bodové posloupnosti lze určit po složkách, přičemž v každé složce už se jedná o limitu reálné posloupnosti. K výpočtu pak můžeme použít všechna pravidla známá z určování limit reálných posloupností: věty o aritmetice limit, větu o dvou strážnících, 0·omezená, D'Alembertovo kritérium a další.

Kontrolní otázky

1. Jaká metrika je použita k určení limity posloupnosti?
2. Z předchozích vět určete nutné podmínky konvergence bodové posloupnosti.
3. Kolik reálných limit bude třeba spočítat pro bodovou posloupnost v prostoru E_4?

Odpovědi:

1. Euklidovská. Bodovou posloupnost definujeme v E_n, který je jí opatřen.
2. Nutné podmínky jsou dvě. První je omezenost (ohraničenost) posloupnosti, druhá je existence limity vybrané posloupnosti.
3. Nejvýše čtyři. Pokud některá z nich nebude existovat nebo se bude blížit k $\pm\infty$, můžeme prohlásit že posloupnost není konvergentní a zbylé už nedopočítávat.

Řešené příklady

Příklad 18 *Určete limitu bodové posloupnosti*

$$\left(\frac{3^m + \left(\frac{1}{2}\right)^m}{(-1)^m - 3^{m+1}}, \cos(4m\pi), \frac{1+2+3+\cdots m}{1+3+5+\cdots+(2m-1)}\right)_{m=1}^{\infty}.$$

Řešení: Limity určíme po složkách: v té první vytkneme mocninu s nejvyšším základem

$$\lim_{m\to\infty} \frac{3^m + \left(\frac{1}{2}\right)^m}{(-1)^m - 3^{m+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{3^m\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{3}\right)^m\right)}{3^m\left((-1)^m\left(\frac{1}{3}\right)^m - 3\right)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^m}{\left(-\frac{1}{3}\right)^m - 3} =$$
$$= \frac{1+0}{0-3} = \frac{1}{3},$$

podle věty o aritmetice limit a $q^n \to 0$ pro $q \in (-1, 1)$.

$$\lim_{m\to\infty} \cos(4n\pi) =$$

zkusíme určit několik členů

$$\left.\begin{array}{ll} n=1 & \cos(4\pi)=\cos 0=1 \\ n=2 & \cos(8\pi)=\cos 0=1 \\ n=3 & \cos(12\pi)=\cos 0=1 \\ & \vdots \end{array}\right\}\text{pro každé } n \text{ je hodnota rovna jedné,}$$

jedná se o konstantní posloupnost, limita $\lim_{m\to\infty}\cos(4n\pi)=1$.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots m}{1+3+5+\cdots+(2m-1)}=$$

v čitateli i jmenovateli se vyskytuje aritmetická posloupnost, můžeme určit její součet.

$$\begin{aligned} AP1: a_1=1,\ d=1,\ a_m=m,\ s&=\frac{(1+m)m}{2}, \\ AP2: a_1=1,\ d=2,\ s&=\frac{(1+2m-1)m}{2}=\frac{2m^2}{2}=m^2, \\ \lim_{m\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots m}{1+3+5+\cdots+(2m-1)}&=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(1+m)m}{2}}{m^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^2(\frac{1}{m}+1)}{2m^2}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Limita původní posloupnosti je $\left(\frac{1}{3},1,\frac{1}{2}\right)$.

○

Příklad 19 *Určete limitu bodové posloupnosti*

$$\left(\frac{\sqrt{25n-4}-\sqrt{n+7}}{\sqrt{4n+6}-\sqrt{9n-3}},\frac{5^m}{m!},\frac{m^2-9}{\sqrt{2m+3}-\sqrt{4m-3}}\right)_{m=1}^{\infty}$$

Řešení: Limitu posloupnosti určíme po složkách:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{25m-4}-\sqrt{m+7}}{\sqrt{4m+6}-\sqrt{9m-3}}=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{25m-4}-\sqrt{m+7}}{\sqrt{4m+6}-\sqrt{9m-3}}\cdot\frac{\sqrt{25m-4}+\sqrt{m+7}}{\sqrt{25m-4}+\sqrt{m+7}}\cdot\frac{\sqrt{4m+6}+\sqrt{9m-3}}{\sqrt{4m+6}+\sqrt{9m-3}}=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{(25m-4)-(m+7)}{(4m+6)+(9m-3)}\cdot\frac{\sqrt{4m+6}+\sqrt{9m-3}}{\sqrt{25m-4}+\sqrt{m+7}}=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{24m-11}{-5m+9}\cdot\frac{\sqrt{m(4+\frac{6}{m})}+\sqrt{m(9-\frac{3}{m})}}{\sqrt{m(25-\frac{4}{m})}+\sqrt{m(1+\frac{7}{m})}}=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{24-\frac{11}{m}}{-5+\frac{9}{m}}\cdot\frac{\sqrt{4+\frac{6}{m}}+\sqrt{9-\frac{3}{m}}}{\sqrt{25-\frac{4}{m}}+\sqrt{1+\frac{7}{m}}}=\frac{24-0}{-5+0}\cdot\frac{\sqrt{4}+\sqrt{9}}{\sqrt{25}+1}=$$
$$=\frac{-24}{5}\cdot\frac{5}{6}=-4.$$
$$\lim_{m\to\infty}\frac{5^m}{m!}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

využijeme pomocnou limitu $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_{m+1}}{a_m}$.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{m+1}}{a_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{5^{m+1}}{(m+1)!}}{\frac{5^m}{m!}}=\lim_{m\to\infty}\frac{5^m\cdot 5\cdot m!}{(m+1)\cdot m!\cdot 5^m}.=\lim_{m\to\infty}\frac{5}{m+1}=0<1,$$

potom původní limita $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{5^m}{m!}=0.$

Na předešlou limitu jsme vlastně použili D'Alembertovo kritérium konvergence řady $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{5^m}{m!}$ a jelikož je pomocná limita menší než 1, řada konverguje. Z toho plyne nutná podmínka konvergence řady, $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{5^m}{m!}=0$.

Při použití D'Alembertova podílového kritéria nastávají tři možnosti.

- pomocná limita <1, původní limita $=0$,
- pomocná limita >1, původní limita $=\infty$,
- pomocná limita $=1$, o původní limitě nelze rozhodnout.

Nezapomeňte, že toto kritérium platí pro řady s nezápornými členy. Pro řadu, která mění znaménko se použít nedá.

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\frac{m^2-9}{\sqrt{2m+3}-\sqrt{4m-3}} &= \lim_{m\to\infty}\frac{m^2-9}{\sqrt{2m+3}-\sqrt{4m-3}}\cdot\frac{\sqrt{2m+3}+\sqrt{4m-3}}{\sqrt{2m+3}+\sqrt{4m-3}} = \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(m^2-9)\cdot\left(\sqrt{2m+3}+\sqrt{4m-3}\right)}{(2m+3)-(4m-3)} = \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(m-3)(m+3)\left(\sqrt{2m+3}+\sqrt{4m-3}\right)}{-2m+6} = \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(m-3)(m+3)\left(\sqrt{2m+3}+\sqrt{4m-3}\right)}{-2(m-3)} = \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(m+3)\left(\sqrt{2m+3}+\sqrt{4m-3}\right)}{-2} = -\infty
\end{aligned}$$

V případě, že limita jedné souřadnice se blíží k nekonečnu nebo neexistuje, nemůže existovat limita bodové posloupnosti a posloupnost je tedy divergentní.

> Nemá smysl psát, že limitou je "bod" $(-4, 0, \infty)$. Nemůže existovat bod, k němuž tato posloupnost konverguje.
> Mimo jiné lze také použít fakt, že posloupnost není ohraničená, což je nutnou podmínkou konvergence.

○

Příklad 20 *Určete limitu bodové posloupnosti*

$$\left(\frac{m^2+4m-7\cos m}{3m^2-4m+\sin m}, \left(1-\frac{4}{m}\right)^m, \cos(m\pi)\right)_{m=1}^{\infty}.$$

Řešení: Opět řešíme limity v jednotlivých složkách:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m^2+4m-7\cos m}{3m^2-4m+\sin m} =$$

Pro určení limity můžeme použít větu o sevření (větu o dvou strážnících). Obě goniometrické funkce lze odhadnout shora 1, zdola -1. Je třeba si uvědomit, že zlomek bude pro dostatečně velká n kladný. Zvětšením čitatele se zvětší zlomek, zmenšením jmenovatele se zlomek zvětší a naopak. Pro každé $n \leq 2$ platí

$$\begin{aligned}
\frac{m^2+4m-7\cos m}{3m^2-4m+\sin m} &\leq \frac{m^2+4m+7}{3m^2-4m+\sin m} \leq \frac{m^2+4m+7}{3m^2-4m-1} \quad \text{(odhad shora)},\\
\frac{m^2+4m-7\cos m}{3m^2-4m+\sin m} &\geq \frac{m^2+4m-7}{3m^2-4m+\sin m} \geq \frac{m^2+4m-7}{3m^2-4m+1} \quad \text{(odhad zdola)}.
\end{aligned}$$

Posloupnost je sevřená mezi horní a dolní odhad. Pokud ukážeme, že "oba strážníci" konvergují k téže hodnotě, bude podle věty o dvou strážnících existovat i limita původní posloupnosti a bude též rovna této hodnotě. Využijeme větu o aritmetice limit

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m^2+4m+7}{3m^2-4m-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^2\left(1+\frac{4}{m}+\frac{7}{m^2}\right)}{m^2\left(3-\frac{4}{m}-\frac{1}{m^2}\right)}=\frac{1+0+0}{3-0-0}=\frac{1}{3},$$

limita druhé posloupnosti se spočte analogicky, obě limity se rovnají. Odtud je

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m^2+4m-7\cos m}{3m^2-4m+\sin m}=\frac{1}{3}.$$

Existuje ještě jedna možnost, jak limitu spočítat. Vytkneme a zkrátíme m^2 hned v prvním kroku

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m^2\left(1+\frac{4}{m}-\frac{7\cos m}{m^2}\right)}{m^2\left(3-\frac{4}{m}+\frac{\sin m}{m^2}\right)}=\frac{1+0-\lim\frac{7\cos m}{m^2}}{3-0+\lim\frac{\sin m}{m^2}}=$$

Věta o aritmetice limit platí, pokud limity vpravo existují a výraz je definován. To musíme ještě ukázat. Na obě zbývající limity můžeme použít argument o součinu posloupností ve tvaru "0.omezená", který se blíží k nule. Oba goniometrické výrazy dávají omezenou posloupnost, a $\frac{1}{m^2}\to 0$. Dohromady

$$=\frac{1+0-0}{3-0+0}=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{4}{m}\right)^m=$$

využijeme vzorec pro limitu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$. Potřebujeme upravit tak, aby znaménko mezi členy bylo $+$.

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m-4}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{m}{m-4}}\right)^m=\frac{1}{\lim\left(\frac{m-4+4}{m-4}\right)^m}=\frac{1}{\lim\left(1+\frac{4}{m-4}\right)^m}=$$

$$=\frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{\frac{m-4}{4}}\right)^{\frac{m}{4}\cdot 4}}=\frac{1}{\left(\lim\left(1+\frac{1}{\frac{m-4}{4}}\right)^{\frac{m-4}{4}+1}\right)^4}=$$

$$=\frac{1}{\left(\lim\left(1+\frac{1}{\frac{m-4}{4}}\right)^{\frac{m-4}{4}}\right)^4}\cdot\frac{1}{\left(\lim\left(1+\frac{1}{\frac{m-4}{4}}\right)^1\right)^4}=\frac{1}{e^4}\cdot\frac{1}{1^4}=\frac{1}{e^4}$$

$$\lim_{m\to\infty}\cos(m\pi)=$$

prozkoumáme chování posloupnosti:

$$\left.\begin{array}{ll} n=1 & \cos(\pi)=-1 \\ n=2 & \cos(2\pi)=\cos 0=1 \\ n=3 & \cos(3\pi)=\cos(\pi)=-1 \\ n=4 & \cos(4\pi)=\cos 0=1 \\ & \vdots \end{array}\right\} \text{střídají se hodnoty } \pm 1, \text{ limita neexistuje.}$$

Limita poslední složky neexistuje, tudíž neexistuje ani limita bodové posloupnosti.

$\bigcirc$

Neřešené příklady

Určete limitu bodové posloupnosti

1. $\left(\sin(m\pi), \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{3n-5}-\sqrt{n-3})\cdot n} \left(\dfrac{m+3}{m}\right)^m\right)_{m=1}^{\infty}$
2. $\left(\dfrac{3m^3+m\cdot\sin m}{m(m+2)(3-m)}, \dfrac{(-1)^m-5^m}{6^m+\left(\frac{2}{3}\right)^m}, \dfrac{3\cdot m!}{(m+2)!}\right)_{m=1}^{\infty}$

Řešení:

1. $(0, e^3, 0)$,
2. $(-3, 0, 0)$.

3 Funkce více proměnných

3.1 Definiční obor

Základní pojmy

Definice 17 *Nechť M je neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{R}^n$.* **Reálnou funkcí n reálných proměnných** *se nazývá zobrazení f množiny M do množiny $\mathbb{R}$. Množina M se nazývá* **definiční obor funkce** *f, označíme ho $D(f)$. Číslo $y \in \mathbb{R}$, které je funkcí f přiřazeno bodu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(f)$, se nazývá* **funkční hodnota funkce f v bodě** *x, označujeme ho $f(x)$ nebo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Množina všech funkčních hodnot funkce f se nazývá* **obor hodnot funkce** *f, označujeme ho $H(f)$. Proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se nazývají* **argumenty** *nebo* **nezávisle proměnné funkce** *f. Proměnná y se nazývá* **závisle proměnná**, *$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

> Příkladem reálné funkce více proměnných může být přiřazení váženého průměru ze známek a kreditů $(Z_1, K_1, Z_2, K_2 \ldots, Z_n, K_n)$, což je pro n předmětů funkce $2n$ proměnných podle následujícího vzorce:
>
> $$P_V = \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} K_p.Z_p}{\sum\limits_{p=1}^{n} K_p}.$$

Vzhledem k jednoduchosti výpočtů a snadné geometrické představě se budeme převážně věnovat reálným funkcím dvou reálných proměnných, tedy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, body v prostoru $\mathbb{R}^2$ budeme značit (x, y).

Definice 18 **Grafem funkce** *$f(x, y)$ s definičním oborem $D(f)$ se nazývá množina všech bodů $(x, y, z) \in E_3$, pro které platí $(x, y) \in D(f)$ a $z = f(x, y)$.* **Vrstevnicí (hladinou) funkce** *$f(x, y)$ se nazývá množina $\{(x, y) \in D(f) : \ f(x, y) = c\}$, kde c je konstanta.*

> Pojem vrstevnice se shoduje s vrstevnicí, jakou najdete na mapě, pokud si představíme, že graf funkce shora ohraničuje nějaký geografický útvar. Ten pak "řežeme" vodorovnými rovinami a sledujeme tvary těchto řezů. Podobně jako v geografii nám vrstevnice umožňují udělat si představu o tvaru grafu funkce.

Definice 19 **Funkce** *f se nazývá* **shora ohraničená** *(resp.* **zdola ohraničená***) na množině $M \subseteq D(f)$, jestliže existuje takové reálné číslo k, že platí $f(x) \leq k$ (resp. $f(x) \geq k$) pro všechny body $x \in M$. Funkce f se nazývá* **ohraničená na množině** *$M \subseteq D(f)$, jestliže je na množině M ohraničená shora a zároveň zdola.*

Definice 20 *Nechť jsou na množině $M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ definovány reálné funkce*

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\; u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Nechť $M_2 \subseteq R^m$ taková, že

$$M_2 = \{(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\; \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M_1\}.$$

Pak se funkce $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ definovaná na množině M_2 nazývá **složená funkce** *n* **proměnných**. *Funkce f se nazývá* **vnější funkce**, *funkce φ_1,$\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ se nazývají* **vnitřní funkce**.

Kontrolní otázky

1. Může být funkce definovaná na prázdné množině?
2. Může být funkce definovaná na celé $\mathbb{R}^n$?
3. Musí být funkce definovaná na celé $\mathbb{R}^n$?
4. Na kolika nezávisle proměnných závisí proměnná y?
5. Musí vrstevnice ležet v definičním oboru?
6. Může být vrstevnice prázdnou množinou?
7. Co musí splňovat číslo c, aby jím určená vrstevnice byla neprázdnou množinou?
8. Jestliže na množině M platí $|f(x)| < k$ pro $k \in \mathbb{R}$, je funkce ohraničená, případně ohraničená shora, zdola?

Odpovědi:

1. Nemůže, podle definice je M neprázdná.
2. Ano, může. Například polynomická funkce $f(x, y) = 3x^5 - 2x^3y - 5xy^3 - 1$ nemá žádné podmínky a je tedy definovaná na $\mathbb{R}^2$. Toto platí pro všechny polynomické funkce a nejen pro ně.
3. Ne, nemusí. Například $f(x, y) = y. \log(x)$ je definovaná jen pro kladná x, tedy pouze na polorovině.

4. To závisí na prostoru, v němž je funkce definovaná. Pro $\mathbb{R}^n$ nejvýše n proměnných. Pokud je funkce konstantní nezávisí na proměnných vůbec.

5. Rozhodně musí. Přímo z definice je vidět, že jsou to body z definičního oboru s nějakou vlastností. Přesnější by bylo říci, že vrstevnice je podmnožinou definičního oboru. Pokud si situaci nakreslíme, graf vrstevnice skutečně "leží" v grafu definičního oboru.

6. Ano, může. Zkuste například pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ hledat vrstevnici pro $c = -2$.

7. Pokud $c \in H(f)$, bude vrstevnice neprázdná.

8. Nerovnici s absolutní hodnotou lze přepsat takto: $f(x) < k$ pro $f(x) \geq 0$ nebo $-f(x) < k$ pro $f(x) < 0$, analogicky $f(x) > -k$ a funkce je omezená.

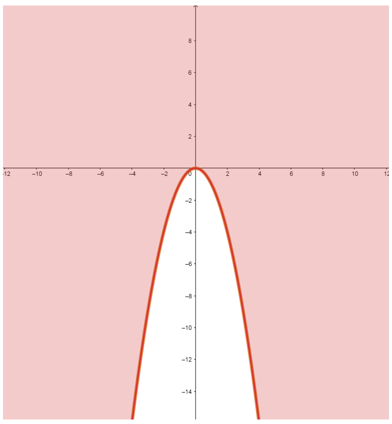
Řešené příklady:

Příklad 21 *Určete definiční obor a několik vrstevnic funkce* $f(x, y) = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$.

Řešení:

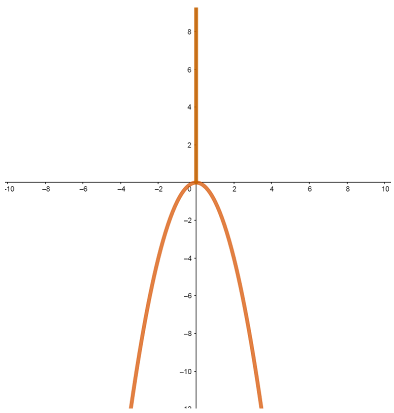
Definiční obor:

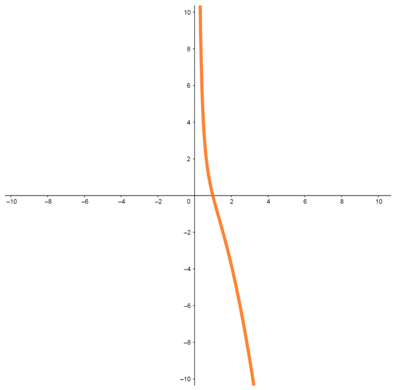
$$x^2 + y \geq 0,$$
$$y \geq -x^2.$$



Vrstevnice:

$$0 = x \cdot \sqrt{x^2 + y},$$
$$x = 0$$
$$\text{nebo } x^2 + y = 0,$$
$$y = -x^2.$$

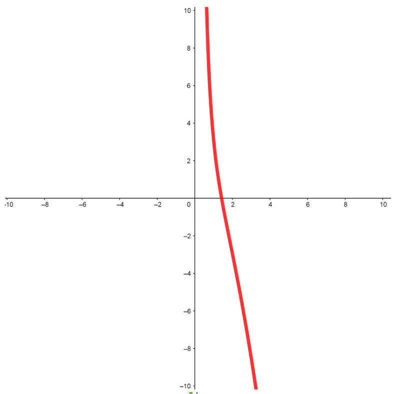




$$1 = x \cdot \sqrt{x^2 + y},$$
$$\frac{1}{x} = \sqrt{x^2 + y},$$

výraz vpravo je vždy kladný,

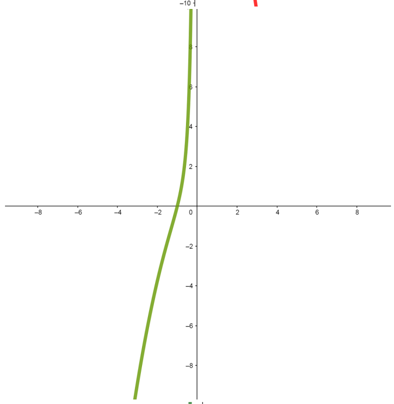
$$\text{tedy } x > 0\text{: } \frac{1}{x^2} = x^2 + y,$$
$$y = \frac{1}{x^2} - x^2,\ x > 0.$$



$$2 = x \cdot \sqrt{x^2 + y},$$
$$\frac{2}{x} = \sqrt{x^2 + y},$$

nutně $x > 0$,

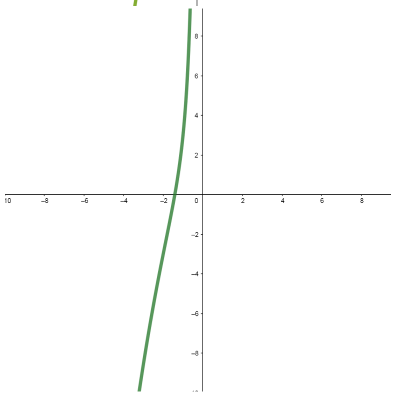
$$\frac{4}{x^2} = x^2 + y,$$
$$y = x^2 - \frac{4}{x^2},\ x > 0.$$



$$-1 = x \cdot \sqrt{x^2 + y},$$
$$\frac{-1}{x} = \sqrt{x^2 + y},$$

nutně $x < 0$,

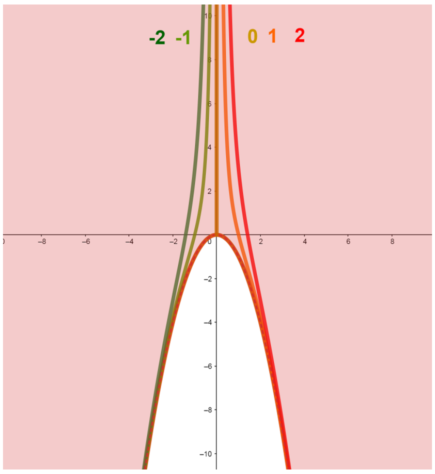
$$\frac{1}{x^2} = x^2 + y,$$
$$y = x^2 - \frac{1}{x^2},\ x < 0.$$



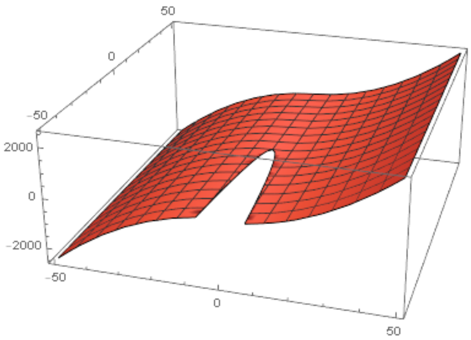
$$-2 = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$$

podobně vede na

$$y = x^2 - \frac{4}{x^2},\ x < 0.$$



Obrázek 3.1: Vrstevnice funkce $f(x, y) = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$.



Obrázek 3.2: Graf funkce $f(x, y) = x \cdot \sqrt{x^2 + y}$.

Příklad 22 *Pro složenou funkci* $f(x, y) = \ln(3x^5 - 7xy + e) - \dfrac{\sin(5x^2 + 5y^3)}{x^4 - y^6} - e^{\cos(x)}$ *určete funkci vnější i funkce vnitřní.*

Řešení: Vnější funkce: $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \ln(u_1) - \dfrac{\sin u_2}{u_3} - e^{u_4}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}$, vnitřní funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ jsou zobrazeními z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ definovány následujícím způsobem: $\varphi_1(x, y) = 3x^5 - 7xy + e$, $\varphi_2(x, y) = 5x^2 + 5y^2$, $\varphi_3(x, y) = x^4 - y^6$, $\varphi_4(x, y) = \cos(x)$.
Tento rozklad není ovšem jednoznačně určen. Pokud bychom například druhý člen funkce upravili do následujícího tvaru
$f(x, y) = \ln(3x^5 - 7xy + e) - \dfrac{\sin 5(x^2 + y^3)}{(x^2 - y^3)(x^2 + y^3)} - e^{\cos(x)}$, dostaneme:
vnější funkce: $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \ln(u_1) - \dfrac{\sin 5u_2}{u_2.u_3} - e^{u_4}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}$,

vnitřní funkce jsou: $\varphi_1(x) = 3x^5 - 7xy + e$, $\varphi_2 = x^2 + y^2$, $\varphi_3 = x^2 - y^3$, $\varphi_4 = \cos(x)$.

Neřešené příklady:

1. Určete definiční obor a několik vrstevnic funkce:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{y}{e^x}$,

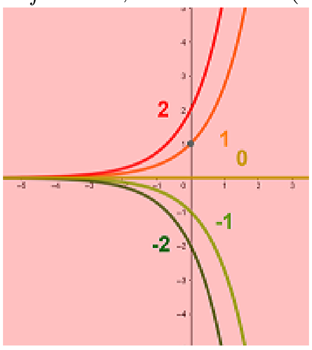
   (b) $f(x, y) = (x + y)^2$,

   (c) $f(x, y) = \frac{y}{x}$,

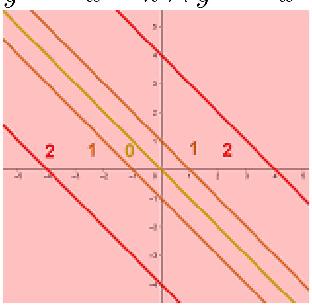
   (d) $f(x, y) = \ln(xy)$.

Řešení:

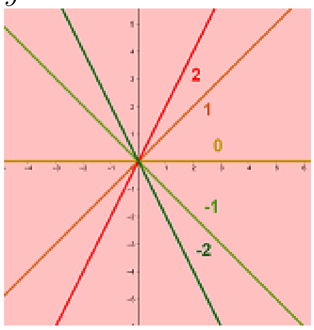
1. (a) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice (k): $y = k.e^x$.



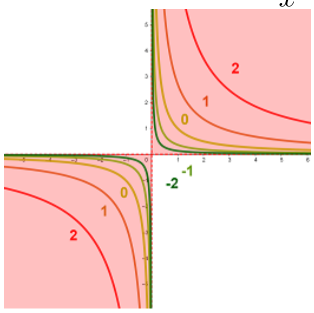
   (b) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice (k): $y = -x - k \wedge y = -x + k$.



   (c) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice (k): $y = kx$.



   (d) $D_f = \{(x, y) \mid x.y > 0\}$, vrstevnice (k): $y = \dfrac{e^k}{x}$.



3.2 Limita funkce

Základní pojmy

Definice 21 *Nechť f je funkce n proměnných, nechť $M \subseteq D(f)$, nechť a je hromadný bod množiny M a nechť $b \in \mathbb{R}$. Říkáme, že číslo b je (vlastní)* **limitou funkce f v bodě** *a* **vzhledem k množině** *M, právě když ke každému okolí $B(b,\varepsilon)$ čísla b existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ bodu a tak, že pro každý bod $x \in P(a,\delta) \cap M$ je $f(x) \in B(b,\varepsilon)$, píšeme*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b.$$

Tj.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\ B(b,\varepsilon)\ \exists\ P(a,\delta) :\ x \in P(a,\delta) \cap M \Rightarrow f(x) \in B(b,\varepsilon).$$

Podobně jako pro funkci jedné proměnné tahle definice říká, že čím blíže jsme k bodu $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, tím více se funkční hodnota blíží číslu b. Oproti funkci jedné proměnné, kde jsme se k bodu přibližovali zleva a zprava, se nyní k bodu a můžeme přiblížit z libovolného směru v rámci množiny M, a to nejen po přímkách, ale po jakékoli křivce ležící v M. To značně ztěžuje výpočet limity.

Definice 22 *Nechť f je funkce n proměnných, nechť $M \subseteq D(f)$ a nechť a je hromadný bod množiny M. Říkáme, že* **funkce f má v bodě** *a* **nevlastní limitu** *$+\infty$ (resp. $-\infty$)* **vzhledem k množině** *M, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ bodu a tak, že pro každý bod $x \in P(a,\delta) \cap M$ je $f(x) > \varepsilon$ (resp. $f(x) < -\varepsilon$), píšeme*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = \infty.$$

Existence limity funkce f v bodě a vzhledem k nějaké množině je lokální vlastnost dané funkce.
Je-li v předchozích dvou definicích $M = \mathbb{R}^n$, pak mluvíme o limitě funkce v bodě a a ve znaku limity vynecháváme $x \in M$.
Pokud existuje prstencové okolí bodu a, které celé leží v množině M, pak je lhostejné, zda uvažujeme o limitě v bodě a vzhledem k množině M nebo vzhledem k $\mathbb{R}^n$. Symbol $x \in M$ vynechat nesmíme, ale na výpočet to nemá vliv.

Aby mělo smysl vůbec mluvit o pojmu limita, musí být určena jednoznačně. To zaručuje následující věta:

Věta 10 *Funkce f n proměnných má v bodě a vzhledem k množině M nejvýše jednu limitu.*

Pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ (množina $M \subseteq D(f)$ a bod $a = (a_1, a_2)$, který je hromadným bodem množiny M) lze limitu zapsat takto:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (a_1,a_2) \\ (x,y) \in M}} f(x,y).$$

Tuto limitu nazýváme **dvojná limita funkce dvou proměnných**.

Věta 11 *Nechť f je funkce n proměnných, nechť $M \subseteq D(f)$ a nechť a je hromadný bod množiny M. Funkce f má v bodě a limitu b vzhledem k množině M, právě když pro každou posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ bodů množiny $M \setminus \{a\}$, která konverguje k bodu a, konverguje posloupnost $\{f(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ funkčních hodnot k číslu b.*

> Vzpomeňte si na větu o limitě vybrané posloupnosti. Jen tentokrát nevybíráme podposloupnost nějaké posloupnosti, ale vybíráme posloupnost z hodnot nějaké funkce.

Definice 23 *Nechť je dána funkce $f(x, y)$, množina $M \subseteq D(f)$ a bod $a = (a_1, a_2)$, který je hromadným bodem množiny M. Definujme funkce g a h takto:*

$$g(y) = \lim_{\substack{x \to a_1 \\ (x,y) \in M}} f(x, y), \quad h(x) = \lim_{\substack{y \to a_2 \\ (x,y) \in M}} f(x, y).$$

Pak limity

$$\lim_{y \to a_2} g(y) = \lim_{y \to a_2} \left(\lim_{\substack{x \to a_1 \\ (x,y) \in M}} f(x, y) \right)$$

a

$$\lim_{x \to a_1} h(x) = \lim_{x \to a_1} \left(\lim_{\substack{y \to a_2 \\ (x,y) \in M}} f(x, y) \right)$$

v případě, že existují, nazýváme **dvojnásobné (postupné) limity funkce** *f v bodě a vzhledem k množině M.*

Věta 12 *Jestliže existuje dvojná limita*

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (a_1,a_2) \\ (x,y) \in M}} f(x, y),$$

limity

$$\lim_{\substack{x \to a_1 \\ (x,y) \in M}} f(x, y) \quad \text{pro každé } y \in P(a_2)$$

a limity

$$\lim_{\substack{y \to a_2 \\ (x,y) \in M}} f(x, y) \quad \text{pro každé } x \in P(a_1),$$

pak existují také dvojnásobné limity a platí

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (a_1,a_2) \\ (x,y) \in M}} f(x, y) = \lim_{y \to a_2} \left(\lim_{\substack{x \to a_1 \\ (x,y) \in M}} f(x, y) \right) = \lim_{x \to a_1} \left(\lim_{\substack{y \to a_2 \\ (x,y) \in M}} f(x, y) \right).$$

> Postupné limity představují přiblížení k bodu a ze směrů jedné a druhé osy. Vnější limita je limitou funkce jedné proměnné.
> Věta říká, že pokud existuje dvojná limita a vnitřní limity, pak existují také limity dvojnásobné a rovnají se.
> Nezapomeňte, že tímto způsobem se k bodu a přibližujeme pouze po dvou křivkách, tudíž o existenci dvojné limity nelze rozhodnout.

Věta 13 (Věta o aritmetice limit) *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají v bodě a vlastní limity, nechť $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Potom existují i následující limity a platí:*

i) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$,

ii) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$,

iv) $\lim\limits_{x\to a} r \cdot f(x) = rb$, *kde* $r \in \mathbb{R}$,

v) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ *pro* $c \neq 0$.

Předchozí věta mluví o aritmetice limit v případě, že čísla b, c jsou reálná. Analogická věta platí i pro nevlastní limity, vždy s podmínkou, že výraz vpravo musí mít smysl. Dalšími větami, které můžeme při výpočtu použít, je věta o uspořádání a limitě, věta o dvou strážnících a limita ve tvaru "nula·omezená".

Věta 14 (Věta o limitě složené funkce) *Nechť funkce $u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, mají v bodě $a \in M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, kde a je hromadný bod množiny M_1, limity b_i vzhledem k množině M_1. Nechť funkce $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ má limitu v bodě $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ vzhledem k množině $M_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, b je hromadný bod množiny M_2. Jestliže existuje takové prstencové okolí $P(a)$ bodu a, že $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)) \in M_2 \setminus \{b\}$ pro $x \in P(a) \cap M_1$, pak*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\substack{u\to b\\ u\in M_2}} f(u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

Dosazením $n = 1$ do definic a vět pro funkce více proměnných obdržíme definice a věty, které jsou ekvivalentní těm už známým z teorie funkce jedné proměnné.

Kontrolní otázky

1. Musí limita v daném bodě vždy existovat?
2. Pokud se k bodu a přiblížíme po dvou různých křivkách a limity budou různé, co z toho plyne?
3. Pokud se k bodu a přiblížíme po dvou různých křivkách a obě limity budou rovny číslu b, co z toho plyne?

Odpovědi:

1. Nemusí.
2. Limita v tomto bodě neexistuje.
3. Stále nevíme, jestli limita existuje, ale pokud ano, pak musí být rovna číslu b. Tedy jsou jen dvě možnosti - buď neexistuje a nebo je právě rovna b.

Řešené příklady:

Příklad 23 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x+y}{x^2+y}.$$

Řešení: Nejprve zkusíme dosadit:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x+y}{x^2+y} = \frac{3\cdot 0+0}{0^2+0} \text{ není definováno.}$$

Vypočítáme postupné limity:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3x}{x^2+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{x} = 0,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = 1,$$

a limita funkce neexistuje.

○

Příklad 24 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(x)}{\sqrt{y^2-x}-\sqrt{y^2+x}}.$$

Řešení: Dosazením získáme nedefinovaný výraz $\frac{0}{0}$. Pokusíme se výraz upravit. Zbavíme se odmocnin ve jmenovateli rozšířením podle vzorce.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(x)}{\sqrt{y^2-x}-\sqrt{y^2+x}} \cdot \frac{\sqrt{y^2-x}+\sqrt{y^2+x}}{\sqrt{y^2-x}+\sqrt{y^2+x}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(x)\left(\sqrt{y^2-x}+\sqrt{y^2+x}\right)}{(y^2-x)-(y^2+x)} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(x)\left(\sqrt{y^2-x}+\sqrt{y^2+x}\right)}{-2x} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin x}{-2x} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(\sqrt{y^2-x}+\sqrt{y^2+x}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right) = -1.$$

○

Příklad 25 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Řešení: Dosazením dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, určíme postupné limity.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0+(x)^2}=\lim_{x\to 0}0=0,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{0+(-y)^2}=\lim_{x\to 0}0=0.$$

Zkusíme se k bodu $(0,0)$ přiblížit po přímce $y=x$.

$$\lim x \to 0\frac{x^2x^2}{x^2x^2+(x-x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1.$$

Přiblížením po různých křivkách získáváme různé hodnoty, limita funkce neexistuje.

○

Příklad 26 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{x^2+2xy-1}{xy}.$$

Řešení: Přímým dosazením dostaneme výraz $\frac{0}{0}$, což není definováno. Zkusíme se k bodu přiblížit po přímkách, nemůžeme ovšem použít předpis $y=kx$, jelikož tyto přímky neprochází bodem $(1,0)$.

> Svazek přímek, který prochází bodem (x_0,y_0) má předpis $y-y_0=k(x-x_0)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Přiblížíme se po přímce $y=(x-1)$. Počítáme

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x(x-1)-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=$$

(dosazením dostaneme $\frac{0}{0}$, tedy výraz lze rozložit a zkrátit)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(x+1)}=3.$$

Přiblížíme se po přímce $y=-(x-1)$. Počítáme

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x(-x+1)-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+2x-1}{-x^2+1}=$$

(dosazením dostaneme $\frac{0}{0}$, tedy výraz lze rozložit a zkrátit)

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)^2}{-x\cdot(x-1)} = 0.$$

Přiblížením po dvou různých přímkách jsme získali různé hodnoty a limita neexistuje.

○

Příklad 27 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+3xy)^{\left(\frac{4}{3xy}\right)}.$$

Řešení: Výraz, který se opakuje, vede na použití věty o složené funkci. Tvar limity podezřele připomíná limitu výrazu $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$, která se blíží Eulerovu číslu e pro z jdoucí k nekonečnu. Limitu upravíme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+3xy)^{\left(\frac{4}{3xy}\right)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{1}{\frac{1}{3xy}}\right)^{\left(\frac{4}{3xy}\right)} =$$

použijeme větu o limitě složené funkce

$$\begin{aligned} &\text{vnitřní funkce} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{3xy} = \infty, \\ &\text{vnější funkce} \quad \lim_{z\to\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z} = \left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right)^4 = e^4, \end{aligned}$$

přitom musí platit podmínka, že na nějakém prstencovém okolí bodu $(0,0)$ vnitřní funkce nenabývá limity. Nekonečna se nikdy nenabývá, podmínka tedy automaticky platí a můžeme říct, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+3xy)^{\left(\frac{4}{3xy}\right)} = e^4.$$

○

Příklad 28 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Řešení: Zkusíme postupné limity:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{|x|}=0.$$

Role x a y je symetrická. Prohození limit by vedlo ke stejnému výsledku.
Přiblížíme se po přímkách:

$$y=kx:\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{|x|\cdot\sqrt{1+k^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{k|x|^2}{|x|\cdot\sqrt{1+k^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{k|x|}{\sqrt{1+k^2}}=0.$$

Přiblížíme se po parabole:

$$y=x^2:\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{|x|\sqrt{1+x^2}}=0.$$

> Výpočet limity $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{|x|\sqrt{1+x^2}}$ lze provést několika způsoby. Jedná se o limitu funkce jedné proměnné, můžeme zvlášť spočítat limitu zleva a zprava, kde výraz $|x|$ bude buď x nebo $-x$.
> Druhou možností je zapsat absolutní hodnotu pomocí funkce signum, která přiřazuje číslu jeho znaménko, případně nulu.
>
> $$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$
>
> Absolutní hodnotu pak můžeme zapsat jako $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}(x)$ a v limitě x zkrátit. Limita funkce signum v nule neexistuje, ale nám postačí, že na okolí bodu 0 je signum nenulová funkce. Pokud si tím nejste jistí, je možné i na funkci $\frac{x^2}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1+x^2}}$ použít oboustranné limity.

Zdá se, že limita by skutečně mohla existovat, ovšem to je třeba ověřit jinak. Křivek, po kterých se lze přiblížit k bodu $(0,0)$ je totiž nekonečně mnoho a nelze prozkoumat všechny. Použijeme odhad:

$$|2xy|\le x^2+y^2.$$

> Odhad získáme úpravou známých vzorců. Pro libovolná reálná čísla x a y platí:
>
> $$\begin{aligned}0&\le (x)^2,\\ 0&\le (x^2\pm 2xy+y^2),\\ \mp 2xy&\le x^2+y^2,\\ |2xy|&\le x^2+y^2.\end{aligned}$$

Použijeme větu o sevření (o dvou strážnících) pro funkce více proměnných. Jelikož odhadujeme, že limitou bude nula, můžeme na funkci použít absolutní hodnotu, která tuto limitu nezmění a zdola ji odhadnout nulovou konstantní funkcí. Shora pak užijeme výše zmíněný odhad. Pro všechna x, $y \in \mathbb{R}$ platí:

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$

kde jsme (u druhé nerovnosti) využili faktu, že jmenovatel je kladný, tudíž se zvětšením čitatele zvětší celý zlomek. Limita konstantní funkce je nula, limita horního odhadu je také nula. Z toho plyne existence limity původní funkce, která je rovna nule.

○

> Použitý odhad může být v trochu jiném tvaru, na místě x i y může být nějaký výraz, například $3x$, nebo x^2, což se bude hodit v následujícím příkladu.

Příklad 29 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}.$$

Řešení: Použijeme odhad $|2xy^2| \leq x^2 + y^4$:

$$0 \leq \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \right| = \frac{|x^2y^2|}{x^2+y^4} \leq \frac{|x^2y^2|}{|2xy^2|} = \frac{|x|}{2},$$

kde jsme ke kladnému čitateli zmenšili jmenovatel a tím zvětšili celý zlomek.
Oba odhady se v limitě blíží nule, původní funkce má tedy limitu a ta je také rovna nule.

> Odhad lze provést stejným způsobem jako v předchozím příkladu, pokud upravíme výraz následujícím způsobem:
>
> $$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \right| = \frac{|xy^2| \cdot |x|}{x^2+y^4} \leq \frac{(x^2+y^4) \cdot |x|}{2(x^2+y^4)}$$

○

Příklad 30 *Určete limitu funkce*

$$\lim_{(x,y)\to(4,-1)} \frac{\sin(3x)(x-4)+y}{3x-2y}.$$

Řešení: Zde nastává problém s dosazením, neumíme určit hodnotu $\sin(12)$. Naštěstí je funkce sinus omezená. Můžeme buď použít větu o dvou strážnících nebo následující úvahu:

$\lim_{(x,y)\to(4,-1)} \sin(3x)(x+4)$ je ve tvaru 0·omezená. Víme, že tato limita se bude blížit k nule. Pomocí věty o aritmetice limit pak můžeme psát:

$$\lim_{(x,y)\to(4,-1)} \frac{\sin(3x)(x-4)+y}{3x-2y} = \frac{\lim_{(x,y)\to(4,-1)} \sin(3x)(x-4) + \lim_{(x,y)\to(4,-1)} y}{\lim_{(x,y)\to(4,-1)} 3x-2y} =$$
$$= \frac{0+(-1)}{3\cdot 4 - 2\cdot(-1)} = -\frac{1}{14}.$$

Výrazy vpravo mají smysl a věta o aritmetice limit platí.

○

Neřešené příklady:

1. Určete limitu funkce

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{3x^2+3y^2}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} (1+2x+y)^{\frac{1}{2x+y}}$,

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$,

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

Řešení

1. (a) Přímým dosazením $\ln(2)$,
   (b) věta o limitě složené funkce, $\frac{1}{3}$,
   (c) věta o limitě složené funkce, e,
   (d) neexistuje,
   (e) neexistuje.

3.3 Spojitost funkce

Základní pojmy

Definice 24 *Nechť f je funkce n proměnných, $M \subseteq D(f)$, nechť $a \in M$.* **Funkce** f *se nazývá* **spojitá v bodě** a **vzhledem k množině** M, *právě když ke každému okolí $B(f(a),\varepsilon)$ funkční hodnoty $f(a)$ existuje okolí $B(a,\delta)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in B(a,\delta)\cap M$ leží jeho funkční hodnota $f(x)$ v ε-okolí $B(f(a),\varepsilon)$ funkční hodnoty $f(a)$, tj.*

$$\forall B(f(a),\varepsilon)\ \exists B(a,\delta):\ x \in B(a,\delta)\cap M \Rightarrow f(x) \in B(f(a),\varepsilon).$$

Funkce f *se nazývá* **spojitá v bodě** a, *právě když je spojitá v bodě a vzhledem k $D(f)$. Funkce f se nazývá* **spojitá na množině** M **vzhledem k množině** M, *právě když je* *spojitá v každém bodě množiny M. Je-li funkce f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, pak stručně říkáme, že funkce f je* **spojitá**.

Věta 15 *Nechť f je funkce n proměnných a nechť $a \in M \subseteq D(f)$. Pak je funkce f spojitá v bodě a vzhledem k množině M, právě když platí jedno z následujících tvrzení:*

a) bod a je izolovaný bod množiny M,

b) bod a je hromadný bod množiny M a platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = f(a)$.

Definice 25 *Nechť f je funkce n proměnných, $M \subseteq D(f)$.* **Funkce** *f se nazývá* **stejnoměrně spojitá na množině** *M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dva body $x, y \in M$, pro které je $y \in B(x, \delta)$, platí $f(y) \in B(f(y), \varepsilon)$.*

Kontrolní otázky

1. Je-li funkce spojitá v nějakém bodě, pak má v tomto bodě limitu. Je to pravda?
2. Platí obrácená implikace? (Má-li funkce v nějakém bodě limitu, pak je v tomto bodě spojitá.)
3. Platí tvrzení: Je-li funkce spojitá, je i stejnoměrně spojitá?
4. Platí obrácená implikace?

Odpovědi:

1. Ano, limitou bude právě funkční hodnota.
2. Ne, neplatí. Zde stačí příklady z funkcí jedné proměnné. Například funkce
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$
má v bodě $x = 0$ limitu 0, ale funkční hodnota je rovna -1. Podobně funkce
$$f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+\pi)(x-3)}$$
má v bodě $x = 3$ limitu $\frac{4}{3+\pi}$, ale spojitá není. Není v tomto bodě ani definovaná.
3. Obecně neplatí. U spojitosti hledáme ke každému $a \in M$ a $\varepsilon > 0$ nějaké $\delta > 0$, aby platila podmínka. U stejnoměrné spojitosti nejprve určíme dvojici ε, δ tak, aby platila tatáž podmínka, ale pro všechny body z dané množiny. Stejnoměrná spojitost je tedy striktnější vlastnost a existují funkce, které jsou spojité, ale nejsou stejnoměrně spojité.
4. Ano, stejnoměrná spojitost je striktnější vlastnost, ze stejnoměrné spojitosti plyne automaticky spojitost

Řešené příklady

Příklad 31 *Rozhodněte, zda je funkce* $f(x,y) = \frac{\sin(3x^2)}{5x-3y}$ *spojitá v bodě* $(-1,6)$.

Řešení: Můžeme zkusit přímo dosadit, pokud to půjde, je funkce v tomto bodě spojitá.

$$f(-1,6) = \frac{\sin(3(-1)^2)}{5(-1) - 3 \cdot 6} = \frac{\sin(3)}{-8}.$$

Přestože neumíme přesně vyjádřit hodnotu, číselný výraz má smysl a funkce je v tomto bodě spojitá.

○

Příklad 32 *Rozhodněte, zda je funkce* $f(x,y) = \ln(-2y^2 + 6x^2)$ *spojitá v bodě* $(-2,0)$.

Řešení: Zkusíme dosadit:

$$f(-2,0) = \ln(-2 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot 0^2) = \ln(-8),$$

což je nedefinovaný výraz. Funkce nejen že v tomto bodě není spojitá, ona v něm dokonce není ani definovaná.

○

Příklad 33 *Rozhodněte, ve kterých bodech je funkce* $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+3y^2}}{-4x}$ *spojitá.*

Řešení: Víme, že pokud jsou jednotlivé členy spojité, pak je spojitý i součet, rozdíl, součin, podíl a složená funkce všude tam, kde jsou definované.
Výraz $x + 3y^2$ je spojitý, odmocnina také, ale má smysl jen pro $x + 3y^2 > 0$, tedy pro $x > -3y^2$. Podíl spojitých funkcí je opět spojitou funkcí pro nenulový jmenovatel, $x \neq 0$. To už je ovšem zahrnuto v podmínce $x > -3y^2$, kterou je tak určen definiční obor a funkce je na tomto definičním oboru spojitá.

○

Příklad 34 *Rozhodněte, zda je funkce spojitá:*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & v\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 2, & v\ bod\check{e}\ (0,0). \end{cases}$$

Řešení: Zřejmě je funkce $xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ spojitá na svém definičním oboru, celé $\mathbb{R}^2$ kromě bodu $(0,0)$, kde je dodefinovaná hodnotou 2. Pokud je limita v bodě $(0,0)$ rovná téže hodnotě, pak je funkce spojitá. Určíme nejprve postupné limity:

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x\to 0} 0 \cdot \frac{x^2}{x^2} = 0.$$

Zřejmě nemá smysl počítat dál. Limita je buď rovna 0 nebo neexistuje. Oba případy vylučují hodnotu 2 a funkce tudíž nemůže být spojitá.

○

Příklad 35 *Rozhodněte, zda lze funkci $f(x,y) = xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ dodefinovat tak, aby byla spojitá.*

Řešení: Z předchozího příkladu víme, že je třeba dodefinovat funkci v bodě $(0,0)$. Pokud má funkce limitu, můžeme touto limitou dodefinovat a výsledná funkce bude spojitá. Pokud limita neexistuje, nelze nespojitost odstranit. Určíme limitu. Postupná limita

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 \cdot \frac{-y^2}{y^2} = 0,$$

přiblížíme se po přímkách

$$y = kx: \quad \lim_{x\to 0} xkx\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} kx^2\frac{1-k^2}{1+k^2} = 0.$$

Pokusíme se ověřit, že limita existuje a je rovna nule. Užijeme absolutní hodnoty a odhad $|xy| \leq |2xy| \leq x^2+y^2$:

$$0 \leq \left|xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = |xy| \cdot \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq (x^2+y^2) \cdot \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} = |x^2+y^2|.$$

Oba strážníci se blíží k nule, limita původní funkce tedy existuje a je také rovna nule. Funkci lze spojitě dodefinovat takto:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{v } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{v bodě } (0,0). \end{cases}$$

○

3.4 Parciální derivace a totální diferenciál

Základní pojmy

Definice 26 *Nechť f je funkce n proměnných, nechť $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ a nechť je funkce f definována na nějakém okolí $O(a)$ bodu a. Pokud existuje vlastní limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h},$$

nazýváme ji **parciální derivace funkce f podle proměnné** *x_i v bodě a. Označujeme ji $f_{x_i}(a)$ nebo $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ nebo $f'_{x_i}(a)$.*

> Parciální derivace se počítá pro funkce více proměnných, zároveň se ovšem k funkci chováme tak, jako by všechny proměnné, kromě té, podle níž derivujeme, byly zafixované v konstanty. to nám umožňuje užít pravidla a vzorce, které známe z derivace funkce jedné proměnné.

Věta 16 (O záměnnosti smíšených praciálních derivací) *Nechť funkce f o n proměnných má v nějakém okolí $O(a)$ bodu a parciální derivace $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}$ pro $i \neq j$ a nechť parciální derivace $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bodě a. Potom existuje parciální derivace $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ v bodě a a platí*

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

> Spočítání smíšených parciálních derivací oběma postupy je šikovnou kontrolou správnosti výpočtu.

Nechť funkce f o n proměnných má v každém bodě $x \in M$ parciální derivace $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ podle všech svých proměnných. Pak tyto parciální derivace jsou opět funkcí n proměnných na množině M a můžeme uvažovat jejich parciální derivace na množině M, které nazýváme **parciální derivace druhého řádu** a označujeme je $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}$ nebo $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ pro $i \neq j$. Takto můžeme indukcí zavést **parciální derivace k-tého řádu funkce** f jako parciální derivace parciální derivace $(k-1)$-ního řádu.

Věta 17 (Řetízkové pravidlo) *Nechť F je složená funkce n proměnných, kde $F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x))$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nechť funkce $u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, jsou diferencovatelné v bodě $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, nechť $\varphi_i(a) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Nechť je funkce $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ diferencovatelná v bodě $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Potom složená funkce $F(x)$ je diferencovatelná v bodě a a platí*

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_k},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

> Termínem řetízkové pravidlo, anglicky "chain rule", se často označuje i derivace složené funkce jedné proměnné. Toto je zobecnění pro funkce více proměnných.
> Pro snazší zapamatování je možné zápis výpočtu zjednodušit na
>
> $$\frac{\partial F(a)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i(a)}{\partial x_k},$$
>
> kde je ovšem třeba mít na paměti, že u_i je jednou v roli proměnné a podruhé v roli funkce, takže tento zápis není matematicky přesný.

Definice 27 Tečná rovina *plochy $z = f(x, y)$ v bodě $a = (a_1, a_2, a_3)$ má rovnici*

$$z - a_3 = \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x}(x - a_1) + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y}(y - a_2).$$

Rovina v prostoru je určena bodem a dvěma směry (vektory), v tomto případě funkční hodnotou a vektory určenými parciální derivací. Tečná rovina vždy prochází bodem $f(a)$ a přibližně popisuje chování funkce na okolí tohoto bodu. Pokud bychom "řízli" funkci f ve směru x resp. y, dostaneme funkci jedné proměnné, tečna v tomto směru leží v tečné rovině.
Všimněte si, že vzorec pro tečnu funkce jedné proměnné je zúžením o jednu dimenzi - zůstane pouze jedna derivace, dosazujeme pouze jednu souřadnici. Pokud bychom naopak chtěli dimenzi přidat, dostaneme tzv. "tečnou nadrovinu", což je vždy podprostor o dimenzi menší než ten, v němž se nachází graf funkce.
Tečná rovina je určena lokálními vlastnostmi funkce, nic neříká o chování funkce jinde. Na rozdíl od původní funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$, což funkce splňovat nemusí.

Definice 28 *Nechť f je funkce n proměnných, která je definována na nějakém okolí $O(a)$ bodu $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.* **Funkce** *$f$ se nazývá* **diferencovatelná v bodě** *a, jestliže existují čísla*
$k_1, k_2, \ldots, k_n$ a funkce $\omega(x)$, která je v bodě a spojitá a pro kterou je $\lim_{x\to a} \omega(x) = 0$ taková, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - a_i) + \omega(x)\varrho(a, x).$$

Výraz

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - a_i)$$

z předchozího vztahu se nazývá **totální diferenciál funkce** *f* **v bodě** *a, označuje se $df(a, x)$.*

Věta 18 *Jestliže je funkce f v bodě a diferencovatelná, potom pro čísla k_i v definici 28 platí*

$$k_i = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$. To znamená, že pro totální diferenciál funkce f v bodě a platí

$$df(a, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i).$$

Definice 29 *Nechť funkce f je v bodě a k-krát diferencovatelná.* **Totálním diferenciálem k-tého řádu** *nebo k-tým totálním diferenciálem funkce f v bodě a se nazývá výraz*

$$d^k f(a, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - a_i) \right)^k f(a),$$

kde k-tou mocninou znaku $\frac{\partial}{\partial x_i}$ je parciální derivace k-tého řádu funkce f v bodě a.

Použitím binomické věty na součet lze vyjádřit totální diferenciál druhého řádu ve tvaru

$$d^2 f(a,(x,y)) = \binom{2}{0}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}(x-a_1)^2+\binom{2}{1}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}(x-a_1)(y-a_2)+\binom{2}{2}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2}(y-a_2).$$

Kontrolní otázky:

1. Je parciální derivace v daném bodě vždy definovaná?
2. Jestliže f je funkce třech proměnných ($f(x, y, z)$), kolik nejvýše existuje parciálních derivací (1. řádu)? Kolik parciálních derivací druhého řádu?
3. Má pojem totálního diferenciálu smysl i pro funkce jedné proměnné?

Odpovědi:

1. Nemusí, jelikož nemusí existovat limita.
2. Derivovat obecně můžeme podle každé z proměnných, tedy nejvýše tři derivace prvního řádu. Každá z nich je opět funkcí třech proměnných, a to i v případě, že daná proměnná v předpisu funkce zmizí. Odtud $3 \cdot 3 = 9$ možných parciálních derivací.
3. Ano, má. Totální diferenciál má tvar $df(a) = f'(a)(x - a)$.

Totální diferenciál funkce jedné proměnné nápadně připomíná tečnu, pro funkce dvou proměnných tečnou rovinu. Je ovšem důležité si uvědomit, že totální diferenciál není přímka nebo rovina, ale zobrazení. Grafem tohoto zobrazení už je přímka či rovina. Ovšem od výše zmiňovaných tečných prostorů se liší posunutím. Graf totálního diferenciálu vždy prochází počátkem soustavy souřadnic, graf tečného prostoru bodem $(a, f(a))$.

Řešené příklady:

Příklad 36 *Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce* $f(x, y) = 7x^3y^4 - \frac{3x^2}{y} + 3y^2\cos(xy^3)$.

Řešení: Funkce je definovaná na $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, na svém definičním oboru je spojitá a diferencovatelná.
Pro počítání parciálních derivací je třeba si uvědomit, že i když jsou v předpisu funkce dvě písmena, jedno z nich se chová jako konstanta, proměnnou je pouze ta, podle které derivujeme. Jedná se tedy o derivaci funkce jedné proměnné a můžeme použít známá pravidla pro aritmetiku

derivací (součet, součin, rozdíl, podíl, složená funkce).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 7.3x^2y^4 - \frac{3}{y}.2x + 3y^2(-\sin(xy^3)).y^3 \text{ (derivace složené funkce)} = \\
&= 21x^2y^4 - \frac{6x}{y} - 3y^5\sin(xy^3), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 7x^3.4y^3 - 3x^2(-\frac{1}{y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2\right).\cos(xy^3) + 3y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy^3)\right) = \\
&\text{(derivace součinu)} \\
&= 28x^3y^3 + \frac{3x^2}{y^2} + 6y.\cos(xy^3) + 3y^2(-\sin(xy^3)).(3xy^2) = \\
&= 28x^3y^3 + \frac{3x^2}{y^2} + 6y\cos(xy^3) - 9xy^4\sin(xy^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(21x^2y^4 - \frac{6x}{y} - 3y^5\sin(xy^3)\right) = \\
&= 21.2xy^4 - \frac{6}{y} - 3y^5\cos(xy^3)y^3 = 42xy^4 - \frac{6}{y} - 3y^8\cos(xy^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(21x^2y^4 - \frac{6x}{y} - 3y^5\sin(xy^3)\right) = \\
&= 21x^2.4y^3 - 6x.(-1)\frac{1}{y^2} - 3.5y^4.\sin(xy^3) - 3y^5.\cos(xy^3)x.3y^2 = \\
&= 84x^2y^3 + \frac{6x}{y^2} - 15y^4\sin(xy^3) - 9xy^7\cos(xy^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(28x^3y^3 + \frac{3x^2}{y^2} + 6y\cos(xy^3) - 9xy^4\sin(xy^3)\right) = \\
&= 28.3x^2y^3 + \frac{6x}{y^2} - 6y\sin(xy^3).y^3 - 9y^4\sin(xy^3) - 9xy^4\cos(xy^3).y^3 = \\
&= 84x^2y + \frac{6x}{y^2} - 6y^4\sin(xy^3) - 9y^4\sin(xy^3) - 9xy^7\cos(xy^3) = \\
&= 84x^2y^3 + \frac{6x}{y^2} - 15y^4\sin(xy^3) - 9xy^7\cos(xy^3),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(28x^3y^3 + \frac{3x^2}{y^2} + 6y\cos(xy^3) - 9xy^4\sin(xy^3)\right) =$$
$$= 28x^3.3y^2 + 3x^2.(\frac{-2}{y^3}) + 6\cos(xy^3) + 6y(-\sin(xy^3))x.3y^2 +$$
$$- 9x.4y^3\sin(xy^3) - 9xy^4\cos(xy^3)x.3y^2 =$$
$$= 84x^3y^2 - \frac{6x^2}{y^3} + 6\cos(xy^3) - 18xy^3\sin(xy^3) - 36xy^3\sin(xy^3) +$$
$$- 27x^2y^6\cos(xy^3) =$$
$$= 84x^3y^2 - \frac{6x^2}{y^3} + 6\cos(xy^3) - 54xy^3\sin(xy^3) - 27x^2y^6\cos(xy^3).$$

○

Příklad 37 *Určete parciální derivace prvního a druhého řádu funkce* $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení: Určíme definiční obor. Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, což bude vždy, výraz uvnitř logaritmu musí být kladný, musí platit $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$. Což nastane pro $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Funkce je spojitá a diferencovatelná na svém definičním oboru.
Derivujeme složenou funkci. Vnější je logaritmus, vnitřní $\sqrt{x^2+y^2}$, která je znovu složená.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \frac{x}{x^2+y^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y = \frac{y}{x^2+y^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1.(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{0.(x^2+y^2) - x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1.(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

○

Příklad 38 *Pomocí řetízkového pravidla určete parciální derivace funkce*

$$F(x,y) = \ln(3x^5 - 7xy + e) - \frac{\sin(5x^2+5y^3)}{x^4-y^6} - e^{\cos(x)}.$$

Řešení: Musí platit $3x^5 - 7xy + e > 0$, $x^4 - y^6 \neq 0$. K řešení využijeme rozložení na vnitřní a vnější funkce z příkladu 22. Vnější funkce $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \ln(u_1) - \dfrac{\sin(u_2)}{u_3} - e^{u_4}$ má čtyři proměnné, vnitřní funkce mají dvě proměnné. Parciální derivace spočteme podle vzorce

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_4} \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \ln(u_1) - \frac{\sin(u_2)}{u_3} - e^{u_4},& \\
\frac{\partial f}{\partial u_1} &= \frac{1}{u_1}, \\
\frac{\partial f}{\partial u_2} &= -\frac{\cos(u_2)}{u_3}, \\
\frac{\partial f}{\partial u_3} &= -\sin(u_2) \cdot \frac{-1}{(u_3)^2} = \frac{\sin(u_2)}{(u_3)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial u_4} &= -e^{u_4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 3x^5 - 7xy + e, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= 15x^4 - 7y, \\
\varphi_2 &= 5x^2 + 5y^2, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= 10x, \\
\varphi_3 &= x^4 - y^6, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} &= 4x^3, \\
\varphi_4 &= \cos(x), & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} &= -\sin(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{u_1}(15x^4 - 7y) - \frac{\cos(u_2)}{u_3} \cdot 10x + \frac{\sin(u_2)}{u_3^2} \cdot 4x^3 - e^{u_4} \cdot (-\sin(x)) = \\
&= \frac{(15x^4 - 7y)}{3x^5 - 7xy + e} - \frac{\cos(5x^2 + 5y^2)}{x^4 - y^6} \cdot 10x + \frac{\sin(5x^2 + 5y^2)}{(x^4 - y^6)^2} \cdot 4x^3 + e^{\cos(x)} \cdot \sin(x).
\end{aligned}$$

Zápis $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{u_1}(15x^4 - 7y) - \dfrac{\cos(u_2)}{u_3} \cdot 10x + \dfrac{\sin(u_2)}{(u_3)^2} \cdot 4x^3 - e^{u_4} \cdot (-\sin(x))$ není matematicky správně, neboť v něm mícháme předpisy funkcí s různými proměnnými, berte ho, prosím, spíše jako schéma. Druhý řádek už je parciální derivace funkce $F(x, y)$ se správnými proměnnými.

Pro výpočet parciální derivace podle y použijeme vzorec:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_4} \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}.$$

Tentokrát nahradíme proměnné u_i předpisy φ_i ještě před sestavením derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{1}{u_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1}(x,y) = \frac{1}{3x^5 - 7xy + e},$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = -\frac{\cos(u_2)}{u_3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_2}(x,y) = -\frac{\cos(5x^2+5y^2)}{x^4 - y^6},$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_3} = -\sin(u_2)\cdot\frac{-1}{u_3^2} = \frac{\sin(u_2)}{(u_3)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_3}(x,y) = \frac{\sin(5x^2+5y^2)}{(x^4 - y^6)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_4} = -e^{u_4}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_4}(x,y) = -e^{\cos(x)},$$

$$\varphi_1 = 3x^5 - 7xy + e, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 7x,$$
$$\varphi_2 = 5x^2 + 5y^2, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 10y,$$
$$\varphi_3 = x^4 - y^6, \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = -6y^5,$$
$$\varphi_4 = \cos(x), \qquad \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{3x^5 - 7xy + e}\cdot 7x - \frac{\cos(5x^2+5y^2)}{x^4 - y^6}\cdot 10y + \frac{\sin(5x^2+5y^2)}{(x^4 - y^6)^2}\cdot(-6y^5) + \\ - e^{\cos(x)}\cdot 0 =$$
$$= \frac{7x}{3x^5 - 7xy + e} - \frac{10y.\cos(5x^2+5y^2)}{x^4 - y^6} - \frac{6y^5\cdot\sin(5x^2+5y^2)}{(x^4 - y^6)^2}.$$

Ani tento druhý postup není matematicky úplně správně, jelikož do derivace $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}$, což je funkce proměnných $u_1, ..., u_4$ dosazujeme proměnné x, y. Opět ho tedy považujte za schéma.

○

V předchozím příkladu bychom se bez řetízkového pravidla pro funkce více proměnných dokázali obejít. Parciální derivaci vnímáme jako derivaci funkce jedné proměnné, takže by stačilo použít derivaci složené funkce a vzorec pro derivaci podílu. Pro ten následující je však řetízkové pravidlo vhodné.

Příklad 39 *Určete parciální derivace 1. řádu funkce* $F(x,y) = (3x^2 + y^2)^{2x-y}$.

Řešení: Funkci rozdělíme na vnější a vnitřní.

$$f(u,v) = u^v, \qquad u = 3x^2 + y^2, \quad v = 2x - y,$$

kde kvůli definici exponenciální funkce musí platit $3x^2 + y^2 > 0$, tedy $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v \cdot u^{v-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 6x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = u^v \cdot \ln u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v.u^{v-1}.6x + u^v.\ln u.2 = \\ &= (2x-y)\left(3x^2+y^2\right)^{2x-y-1} 6x + \left(3x^2+y^2\right)^{2x-y}.\ln(3x^2+y^2).2 = \\ &= (12x^2 - 6xy)\left(3x^2+y^2\right)^{2x-y-1} + 2.\left(3x^2+y^2\right)^{2x-y} \ln(3x^2+y^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v.u^{v-1}.2y + u^v.\ln u.(-1) = \\ &= (2x-y)\left(3x^2+y^2\right)^{2x-y-1} 2y - \left(3x^2+y^2\right)^{2x-y}.\ln(3x^2+y^2) = \\ &= (4xy - 2y^2)\left(3x^2+y^2\right)^{2x-y-1} - \left(3x^2+y^2\right)^{2x-y}.\ln(3x^2+y^2).\end{aligned}$$

○

Příklad 40 *Určete tečnou rovinu funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $(e,1)$.*

Řešení: Spočteme parciální derivace a hodnoty v bodě $(e,1)$.

$$f(x,y) = x^y, \qquad f(e,1) = e^1 = e,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot x^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(e,1) = 1 \cdot e^{1-1} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \cdot \ln x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(e,1) e^1 \cdot \ln e = e.$$

$$z = f(e,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(e,1)(x-e) + \frac{\partial f}{\partial y}(e,1)(y-1) = e + 1(x-e) + e(y-1)$$
$$z = x + ey - e.$$

Příklad 41 *Určete totální diferenciál prvního a druhého řádu funkce* $f(x,y) = 7x^3y^4 - \frac{3x^2}{y} + 3y^2\cos(xy^3)$ *v bodě* $(0,1)$.

Řešení:
Využijeme parciální derivace z příkladu 36. Pro funkci dvou proměnných můžeme psát

$$df(a,x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) = \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x - a_1) + \frac{\partial f(a)}{\partial y}(y - a_2).$$

Do předpisů parciální derivace tudíž dosadíme bod $a = (0,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 21x^2y^4 - \frac{6x}{y} - 3y^5\sin(xy^3)\Big|_{(0,1)} = 21.0 - \frac{6.0}{1} - 3.1.\sin(0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 28x^3y^3 + \frac{3x^2}{y^2} + 6y\cos(xy^3) - 9xy^4\sin(xy^3)\Big|_{(0,1)} =$$
$$= 28.0 + \frac{3.0}{1} + 6.1\cos(0) - 9.0\sin(0) = 6.$$

Totální diferenciál je tedy:

$$df = 0.(x-0) + 6.(y-1) = 6y - 6.$$

Pro totální diferenciál druhého řádu dosadíme do parciálních derivací druhého řádu bod $a = (0,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 42xy^4 - \frac{6}{y} - 3y^8\cos(xy^3)\Big|_{(0,1)} = 42.0 - \frac{6}{1} - 3.1.\cos(0) =$$
$$= -6 - 3 = -9,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 84x^2y^3 + \frac{6x}{y^2} - 15y^4\sin(xy^3) - 9xy^7\cos(xy^3)\Big|_{(0,1)} =$$
$$= 84.0 + \frac{0}{1} - 15.\sin(0) - 9.0.\cos(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 84x^3y^2 - \frac{6x^2}{y^3} + 6\cos(xy^3) - 54xy^3\sin(xy^3) +$$
$$- 27x^2y^6\cos(xy^3)\Big|_{(0,1)} =$$
$$= 84.0 - \frac{0}{1} + 6.\cos(0) - 54.0.\sin(0) - 27.0.\cos(0) = 6.$$

Dosadíme do vzorce pro totální diferenciál druhého řádu

$$d^2f(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}(x-a_1)^2 + 2.\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}(x-a_1)(y-a_2) + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2}(y-a_2)^2 =$$
$$= -9.(x-0)^2 + 2.0.(x-0)(y-1) + 6.(y-1)^2 = -9x^2 + 6(y-1)^2.$$

○

Neřešené příklady

1. Určete parciální derivace prvního a druhého řádu funkce
   (a) $f(x,y) = x \cdot \sin(x+y)$,
   (b) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$.
2. Určete tečnou rovinu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1,2)$.

Řešení:

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x+y) + x \cdot \cos(x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x \cdot \sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \cdot \sin(x+y)$,
   (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$ pro body (x,y) splňující $x > -y^2$.
2. $2x + 4y - z - 5 = 0$.

3.5 Taylorova věta pro funkce více proměnných

Základní pojmy

> Cílem této kapitoly je zobecnit pojem Taylorova polynomu a Taylorovy věty pro funkce více proměnných. Ukazuje se, že vzorec pro výpočet je analogický jednorozměrnému Taylorovu polynomu, jen je třeba derivaci nahradit jejím zobecněním, tedy totálním diferenciálem. Platí následující věta:

Věta 19 *Nechť funkce f o n proměnných je $(k+1)$-krát diferencovatelná na okolí $O(a)$ bodu a. Potom platí*

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a,x)}{1!} + \frac{d^2 f(a,x)}{2!} + \cdots + \frac{d^k f(a,x)}{k!} + \\ + \frac{d^{k+1} f(a + t(x-a), x + t(x-a))}{(k+1)!},$$

kde $0 < t < 1$.

Definice 30 *Výraz*

$$T_k(f,a,x) = f(a) + \frac{df(a,x)}{1!} + \frac{d^2 f(a,x)}{2!} + \cdots + \frac{d^k f(a,x)}{k!}$$

z věty 19 se nazývá **Taylorův polynom do členu stupně k funkce f (se středem) v bodě** a *a výraz*

$$\frac{d^{k+1}f(a+t(x-a), x+t(x-a))}{(k+1)!}$$

se nazývá **Lagrangeův tvar zbytku** *Taylorova polynomu do členu stupně k funkce f v bodě a.*

Kontrolní otázky:

1. Co je grafem Taylorova polynomu 1. řádu?

Odpovědi:

1. Tečná rovina.

Řešené příklady:

Příklad 42 *Určete Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x, y) = e^{2x+y}$ v bodě $(0, 0)$.*

Řešení: Pro Taylorův polynom v bodě (x_0, y_0) platí vzorec:
$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \dfrac{df(x_0, y_0)}{1!} + \dfrac{d^2f(x_0, y_0)}{2!}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{2x+y}, & f(0,0) &= e^0 = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{2x+y}\cdot 2, & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= e^0 \cdot 2 = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{2x+y}\cdot 1, & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= e^0 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Totální diferenciál je: $df(0, 0) = 2.(x - 0) + 1.(y - 0) = 2x + y$

$$\begin{aligned} \cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{2x+y}\cdot 2\cdot 2 = 4e^{2x+y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= e^{2x+y}\cdot 2\cdot 1 = 2e^{2x+y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{2x+y}\cdot 1 = e^{2x+y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

Totální diferenciál druhého řádu je:

$$d^2f(0, 0) = 4 \cdot (x - 0)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (x - 0)(y - 0) + (y - 0)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2,$$

a tedy Taylorův polynom druhého řádu:

$$T(x,y) = 1 + \frac{2x-y}{1!} + \frac{4x^2+4xy+y^2}{2!} = 1 + 2x + y + 2x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2.$$

○

Příklad 43 *Určete Taylorův polynom druhého řádu funkce* $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+xy)}{y^2}$ *v bodě* $(e,1)$.

Řešení:

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+xy)}{y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{(x^2+xy)} \cdot (2x+y) = \frac{2x+y}{y^2(x^2+xy)},$$

derivace podle y se spočítá pomocí vzorce pro derivaci podílu

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{(x^2+xy)} \cdot x \cdot y^2 - \ln(x^2+xy) \cdot 2y}{y^4} = \frac{x}{y^2(x^2+xy)} - \frac{2 \cdot \ln(x^2+xy)}{y^3} =$$
$$= \frac{1}{y^2(x+y)} - \frac{2 \cdot \ln(x^2+xy)}{y^3}.$$

Dosadíme:

$$f(e,1) = \frac{\ln(e^2+e)}{1} = \ln(e) + \ln(e+1) = 1 + \ln(e+1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(e,1) = \frac{2e+1}{(e^2+e)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(e,1) = \frac{1}{(e+1)} - \frac{2(1+\ln(e+1))}{1} = \frac{1}{(e+1)} - 2 - 2\ln(e+1).$$

Totální diferenciál je:

$$df(e,1) = (\frac{2e+1}{(e^2+e)}) \cdot (x-e) + \left(\frac{1}{(e+1)} - 2 - 2\ln(e+1)\right)(y-1).$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2y^2(x^2+xy)-(2x+y)y^2(2x+y)}{y^4(x^2+xy)^2} = && \text{(zkrátíme } y\text{)}\\
&= \frac{2(x^2+xy)-(2x+y)^2}{y^2(x^2+xy)^2} = \frac{-2x^2-2xy-y^2}{y^2(x^2+xy)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1\cdot y^2(x^2+xy)-(2x+y)\left(2y(x^2+xy)+y^2x\right)}{y^4(x^2+xy)^2} = && \text{(vytkneme } y\text{)}\\
&= \frac{y^2(x^2+xy)-(2x+y)y\left(2(x^2+xy)+yx\right)}{y^4(x^2+xy)^2} = && \text{(a zkrátíme)}\\
&= \frac{y(x^2+xy)-(2x+y)\left(2(x^2+xy)+yx\right)}{y^3(x^2+xy)^2} = && \text{(upravíme)}\\
&= \frac{-4x^3-7x^2y-2xy^2}{y^3(x^2+xy)^2} = \frac{-\left(4x^2+7xy+2y^2\right)}{xy^3(x+y)^2}.
\end{aligned}
$$

Tato funkce je na svém definičním oboru spojitá, následující derivaci tedy počítáme spíše pro kontrolu a procvičení.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{y^2}\cdot\frac{-1}{(x+y)^2}-\frac{1}{y^3}\cdot\frac{2(2x+y)}{(x^2+xy)} =\\
&= \frac{yx-2(2x+y)(x+y)}{y^3x(x+y)^2} = \frac{-4x^2-7xy-2y^2}{xy^3(x+y)^2}.\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2y(x+y)-y^2\cdot 1}{y^4(x+y)^2} - \frac{\frac{2}{(x^2+xy)}xy^3-2\ln(x^2+xy)\cdot 3y^2}{y^6} && \text{(zkrátíme } y\text{)}\\
&= \frac{-2(x+y)-y}{y^3(x+y)^2} - \frac{2x}{(x^2+xy)y^3} + \frac{6\ln(x^2+xy)}{y^4} =\\
&= \frac{-2x-3y}{y^3(x+y)^2} - \frac{2}{y^3(x+y)^2} + \frac{6\ln(x^2+xy)}{y^4} =\\
&= \frac{-4x-5y}{y^3(x+y)^2} + \frac{6\ln(x^2+xy)}{y^4}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e,1) &= \frac{-2e^2-2e-1}{(e^2+e)^2} = \frac{-(2e^2+2e+1)}{e^2(e+1)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(e,1) &= \frac{-\left(4e^2+7e+2\right)}{e(e+1)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e,1) &= \frac{-4e-5}{(e+1)^2} + 6\ln(e^2+e) = \frac{-(4e+5)}{(e+1)^2} + 6 - 6\ln(e+1).
\end{aligned}
$$

Totální diferenciál druhého řádu je:

$$d^2f(e,1) = \frac{-(2e^2+2e+1)}{e^2(e+1)^2}(x-e)^2 + 2\frac{-(4e^2+7e+2)}{e(e+1)^2}(x-e)(y-1)+ \\ + \left(\frac{-(4e+5)}{(e+1)^2} + 6 - 6\ln(e+1)\right)(y-1)^2.$$

Taylorův polynom druhého řádu je tedy:

$$T(x) = 1 + \ln(e+1) + (\frac{2e+1}{(e^2+e)}) \cdot (x-e) + \left(\frac{1}{(e+1)} - 2 - 2\ln(e+1)\right)(y-1)+ \\ + \frac{-(2e^2+2e+1)}{e^2(e+1)^2}(x-e)^2 + 2\frac{-(4e^2+7e+2)}{e(e+1)^2}(x-e)(y-1)+ \\ + \left(\frac{-(4e+5)}{(e+1)^2} + 6 - 6\ln(e+1)\right)(y-1)^2.$$

Pro lepší představu přibližně určíme hodnoty číselných výrazů:

$$T(x) \doteq 2,313 + 0,637(x-e) - 4,358(y-1) - 0,208(x-e)^2 + \\ - 2,692(x-e)(y-1) - 3,028(y-1)^2.$$

○

Neřešené příklady:

1. Určete Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x,y) = e^{\mathrm{tg}(x-y)}$ v bodě $(0,0)$.

Řešení:

1. $T(x) = 1 + x + y + x^2 + 2xy + y^2$.

3.6 Derivace implicitní funkce

Základní pojmy

Definice 31 *Nechť $F(x,y)$ je spojitá funkce dvou proměnných. Jestliže existuje spojitá funkce $y = f(x)$ taková, že pro každé $x \in D(f)$ platí $F(x,f(x)) = 0$, potom se funkce $f(x)$ nazývá* **funkce zadaná implicitně rovnicí** $F(x,y) = 0$.

Příkladem implicitně zadané funkce může být i obecná rovnice přímky $2x-3y+1=0$, kterou lze explicitně vyjádřit ve tvaru $y=\frac{2x+1}{3}$. Předpis $F(x,y)=2x-3y+1$ pak definuje funkci více proměnných, jejímž grafem je plocha (v tomto případě rovina). Pokud tuto plochu protneme s "vodorovnou" rovinou xy (s předpisem z=0), tedy $F(x,y)=0$, získáme opět původní přímku v implicitním tvaru.

Ne vždy je možné rovnici $F(x,y)=0$ upravit do explicitního tvaru. V takovém případě není zkoumaná křivka funkcí. (Jednomu x je přiřazeno více y). Příkladem může být například parabola $x=y^2$. Přesto, pokud nás zajímá pouze chování funkce na okolí nějakého bodu, za určitých podmínek může předpis definovat na tomto okolí implicitní funkci. Zdánlivě složitý pohled "o dimenzi výš" nám umožní tyto podmínky určit a také spočítat první a druhou derivaci funkce $y=f(x)$ v tomto bodě.

Věta 20 *Nechť $F(x,y)$ je funkce definovaná na okolí bodu (x_0,y_0). Nechť funkce $F(x,y)$ je na nějakém okolí bodu (x_0,y_0) spojitá a má na něm spojité parciální derivace až do k-tého řádu. Nechť je $F(x_0,y_0)=0$ a $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$.*

Potom existují kladná čísla ε a δ taková, že rovnicí $F(x,y)=0$ je na intervalu $I=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ určena jediná spojitá funkce $y=f(x)$ taková, že pro každé $x\in I$ je $F(x,f(x))=0$, $y_0=f(x_0)$ a $f(x)\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$, a funkce $f(x)$ má v intervalu I spojité derivace až do k-tého řádu.

Pro první a druhou derivaci platí

$$f'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}},$$

$$f''(x_0)=-\frac{\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\cdot f'(x_0)+\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial y^2}\cdot (f'(x_0))^2}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}.$$

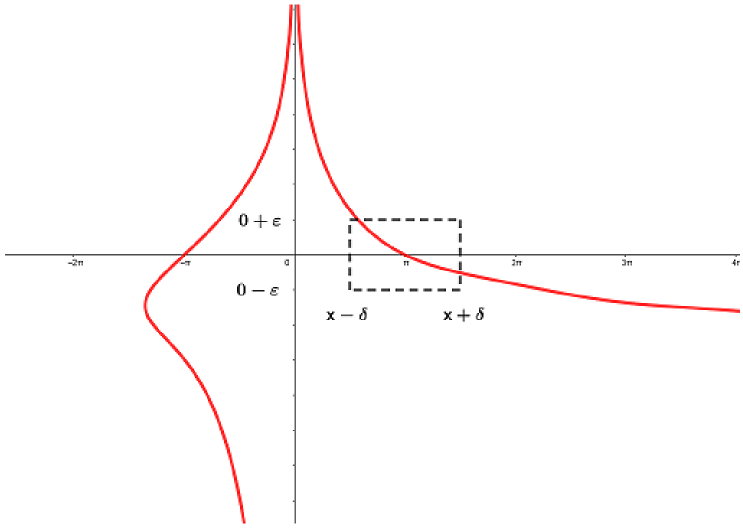
Čísla ε a δ a definují obdélník, na kterém lze křivku s předpisem $f(x,y)=0$ chápat jako funkci jedné proměnné $y=f(x)$. Často také říkáme, že předpis definuje implicitně zadanou funkci na okolí bodu. Jedno takové okolí najdete na obrázku 3.3.

Kontrolní otázky

1. Platí tvrzení: Jestliže lze funkci vyjádřit v explicitním tvaru, pak ji lze vyjádřit i ve tvaru implicitním?
2. Platí tvrzení: Jestliže lze funkci vyjádřit v implicitním tvaru, pak ji lze vyjádřit i ve tvaru explicitním?

Odpovědi:

1. Ano, platí. Každou funkci ve tvaru $y=f(x)$ lze upravit na tvar $y-f(x)=0$.



Obrázek 3.3: Implicitně zadaná funkce na okolí bodu $(\pi, 0)$. Zde je zvoleno $\varepsilon = 1$, $\delta = \frac{\pi}{2}$.

2. Obecně neplatí. Například předpis kružnice $x^2+y^2 = r^2$ nelze přímo upravit do tvaru $y = ...$ To lze učinit jen za podmínek věty 20. Pro výše zmíněnou kružnici to lze ve všech bodech, kromě $[-r, 0]$ a $[r, 0]$, jelikož v těchto bodech je nulová derivace podle y.

Řešené příklady:

Příklad 44 *Ověřte, že rovnice $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$, $a > 0$ definuje na okolí bodu $(a, 0)$ implicitní funkci $y = f(x)$, pokud ano, určete y', y'' a tečnu v tomto bodě.*

Řešení: Nejprve upravíme předpis do tvaru $F(x, y) = 0$, tedy $x^2 + 2xy - y^2 - a^2 = 0$ a definujeme $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - a^2$. Ověříme předpoklady věty:

1. $F(x, y)$ i její parciální derivace jsou spojité v daném bodě:
   Funkce $F(x, y)$ je polynomická, tedy definovaná a spojitá na celé $\mathbb{R}^2$ a tedy i v bodě $(a, 0)$.
   $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 2y \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2x - 2y \end{aligned}\right\} = \text{obě jsou spojité.}$$
2. $F(a, 0) = 0:$
   $$F(a, 0) = x^2 + 2xy - y^2 - a^2\big|_{(a,0)} = a^2 + 0 - 0 - a^2 = 0.$$
3. $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0:$
   $$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 2y|_{(a,0)} = 2a \neq 0.$$

Ověřili jsme, že předpis definuje implicitně zadanou funkci na okolí bodu $(a,0)$. Pro výpočet derivace y' lze zderivovat obě strany rovnice podle x, přičemž y se derivuje jako y', užívají se obvyklá pravidla, zde použijeme vzorec pro derivaci součinu.

$$\begin{aligned} x^2+2xy-y^2-a^2&=0, && \text{(zderivujeme)}\\ 2x+2\cdot 1y+2xy'-2yy'&=0, && \text{(vyjádříme } y'\text{)}\\ y'(2x-2y)&=-2x-2y,\\ y'&=\frac{-x-y}{x-y}. \end{aligned}$$

> Jako kontrolu správnosti můžeme použít vzorec
>
> $$y'=-\frac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{-(2x+2y)}{2x-2y}=\frac{-(x+y)}{x-y}.$$
>
> Nezapomeňte, že tento předpis platí pouze na okolí bodu $(a,0)$, pro ostatní body nemáme ověřeny předpoklady.

Dosadíme bod $(a,0)$:

$$y'(a)=\left.\frac{-(x+y)}{x-y}\right|_{(a,0)}=\frac{-a-0}{a-0}=-1.$$

> Derivace funkce v bodě a je záporná, tudíž je funkce y na okolí bodu klesající.

Pro výpočet druhé derivace y'' znovu zderivujeme rovnici

$$\begin{aligned} 2x+2\cdot 1y+2xy'-2yy'&=0, && \text{(zderivujeme)}\\ 2+2y'+2y'+2xy''-2yy'-2yy''&=0, && \text{(vyjádříme } y''\text{)}\\ y''(2x-2y)&=-2-4y'+2(y')^2,\\ y''&=\frac{-1-2y'+(y')^2}{x-y}. \end{aligned}$$

Dosadíme $x=a$, $y=0$, $y'=-1$.

$$y''(a)=\frac{-1-2(-1)+(-1)^2}{a-0}=\frac{2}{a}.$$

> Jelikož je druhá derivace funkce y kladná $(a>0)$, víme, že funkce y je na okolí bodu a konvexní.

Pro určení tečny v bodě $(x_0,f(x_0))=(a,0)$ použijeme vzorec $y=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$, kde dosadíme $f'(x_0)=-1$.

$$\begin{aligned} t: y&=-1(x-a)+0,\\ y&=-x+a. \end{aligned}$$

Úlohu vyřešíme ještě jednou pomocí dosazení do vzorce. Už jsme viděli, že

$$y' = -\frac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{-(2x+2y)}{2x-2y} = \frac{-(x+y)}{x-y} \text{ a } y'(a) = -1.$$

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2.$$

Jsou to konstantní funkce, takže i pro bod $(a, 0)$ mají stále stejnou hodnotu. Dosadíme do vzorce

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \cdot f'(x_0) + \frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial y^2} \cdot (f'(x_0))^2}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}} =$$
$$= -\frac{2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-2)(-1)^2}{a} = -\frac{2-4-2}{2a} = \frac{2}{a}.$$

○

Příklad 45 *Ověřte, že rovnice $xy + x^2e^y - \cos x = \pi^2 + 1$ definuje na okolí bodu $(\pi, 0)$ implicitní funkci $y = f(x)$, pokud ano, určete y', y'' a tečnu v tomto bodě.*

Řešení: Nejprve upravíme předpis do tvaru $F(x, y) = 0$, tedy $xy+x^2e^y-\cos x-\pi^2-1 = 0$ a proto definujeme $F(x, y) = xy + x^2e^y - \cos x - \pi^2 - 1$. Ověříme následující podmínky:

1. $F(x, y)$ i její parciální derivace jsou spojité v daném bodě:
   Funkce $F(x, y)$ je spojitá v $\mathbb{R}^2$, tedy i v bodě $(\pi, 0)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y + 2xe^y + \sin x \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x + x^2e^y \end{aligned}\right\} = \text{obě jsou spojité.}$$

2. $F(\pi, 0) = 0$:

$$F(\pi, 0) = xy + x^2e^y - \cos x - \pi^2 - 1\big|_{(\pi,0)} = \pi.0 + \pi^2e^0 - \cos\pi - \pi^2 - 1 =$$
$$= \pi^2 - (-1) - \pi^2 - 1 = 0.$$

3. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) \neq 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = x + x^2e^y\big|_{(\pi,0)} = \pi + \pi^2e^0 = \pi + \pi^2 \neq 0.$$

Na okolí bodu $(\pi, 0)$ je předpisem implicitně definovaná funkce. Můžeme derivovat.

$$\begin{aligned} xy + x^2e^y - \cos x - \pi^2 - 1 &= 0, && \text{(zderivujeme)}\\ 1.y + x.y' + 2x.e^y + x^2e^y.y' + \sin x &= 0, && \text{(vyjádříme } y')\\ y'(x + x^2e^y) &= -y - 2xe^y - \sin x,\\ y' &= \frac{-y - 2xe^y - \sin x}{x + x^2e^y}. \end{aligned}$$

> Jako kontrolu správnosti můžeme použít vzorec
>
> $$y' = -\frac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{-(y + 2xe^y + \sin x)}{x + x^2e^y}.$$
>
> Nezapomeňte, že tento předpis platí pouze na okolí bodu $(\pi, 0)$.

Dosadíme bod $(\pi, 0)$:

$$\begin{aligned} y'(\pi) &= \frac{-y - 2xe^y - \sin x}{x + x^2e^y}\bigg|_{(\pi,0)} = \frac{-0 - 2\pi e^0 - \sin 0}{\pi + \pi^2e^0} = \frac{-2\pi}{\pi + \pi^2} =\\ &= \frac{-2}{1+\pi} \doteq -0,48. \end{aligned}$$

Znovu zderivujeme rovnici

$$\begin{aligned} 1.y + x.y' + 2x.e^y + x^2e^y.y' + \sin x &= 0,\\ y' + 1.y' + x.y'' + 2.e^y + 2xe^y.y' + x^2(e^y.y') + \cos x &= 0,\\ y' + y' + xy'' + 2e^y + 2xe^y.y' + 2x(e^y.y') + x^2(e^yy'y' + e^y.y'') + \cos x &= 0,\\ 2y' + xy'' + 2e^y + 4xy'e^y + x^2(y')^2e^y + x^2y''e^y + \cos x &= 0, \end{aligned}$$

(vyjádříme y'')

$$y''(x + x^2e^y) = -2y' - 2e^y - 4xy'e^y - x^2(y')^2e^y - \cos x,$$

$$y'' = \frac{-2y' - 2e^y - 4xy'e^y - x^2(y')^2e^y - \cos x}{x + x^2e^y}.$$

Dosadíme $x = \pi$, $y = 0$, $y' = \dfrac{-2}{1+\pi}$:

$$\begin{aligned}
y''(\pi) &= \frac{-2\left(\frac{-2}{1+\pi}\right) - 2e^0 - 4\pi\frac{-2}{1+\pi}e^0 + \pi^2\left(\frac{-2}{1+\pi}\right)^2 e^0 - \cos\pi}{\pi + \pi^2 e^0} = \\
&= \frac{\frac{4}{1+\pi} - 2 + \frac{8\pi}{1+\pi} + \pi^2\frac{4}{(1+\pi)^2} - (-1)}{\pi+\pi^2} = \\
&= \frac{1}{\pi+\pi^2}\frac{1}{(1+\pi)^2}\big(4(1-\pi) - 2(1+\pi)^2 + 8\pi(1+\pi) + 4\pi^2 + 1(1+\pi)\big) = \\
&= \frac{10\pi^2+\pi+3}{\pi(1+\pi)^3} \doteq 0,47.
\end{aligned}$$

Ještě zbývá určit tečnu v bodě $(\pi, 0)$. Použijeme vzorec $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ a dosadíme: $x_0 = \pi$, $f'(x_0) = \dfrac{-2}{1+\pi}$, $f(x_0) = 0$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-2}{1+\pi}(x-\pi) + 0, \\
y &= \frac{-2x}{1+\pi} + \frac{2\pi}{1+\pi}, \\
y &\doteq -0,48x + 1,48.
\end{aligned}$$

Graf této implicitně zadané funkce najdete na obrázku 3.3.

○

3.7 Lokální extrémy funkce

Základní pojmy

Definice 32 *Říkáme, že funkce f o n proměnných má v bodě a* **lokální maximum (resp. minimum)***, právě když existuje okolí $O(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in O(a)$ platí $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). Říkáme, že funkce f má v bodě a* **ostré lokální maximum (resp. minimum)***, právě když existuje okolí $O(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in P(a)$ platí $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).*

Věta 21 *Jestliže funkce f má v bodě a lokální extrém a jestliže existují parciální derivace $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$.*

> Hledání bodů podezřelých z extrému, tzv. **stacionárních bodů** je analogické jednorozměrnému případu. Spočteme parciální derivace a položíme je všechny rovny nule. Pro funkce více proměnných nejde o jednu rovnici, ale o soustavu rovnic. Pro funkci n proměnných dostaneme soustavu n rovnic.

Věta 22 *Nechť bod a je stacionární bod funkce $f(x,y)$ dvou proměnných, nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě a spojité všechny parciální derivace druhého řádu a nechť*

$$D(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Potom funkce $f(x,y)$

a) má v bodě a ostré lokální minimum, jestliže $D(a) > 0$ a $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} > 0$,

b) má v bodě a ostré lokální maximum, jestliže $D(a) > 0$ a $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} < 0$,

c) nemá v bodě a lokální extrém, jestliže $D(a) < 0$.

Jestliže $D(a) = 0$, pak na základě této věty nemůžeme rozhodnout.

> Předpis $D(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}\right)^2$ lze získat také jako determinant matice: $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$, kde pro funkci se spojitými derivacemi můžeme užít $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x}$.
> Matice se nazývá **Hessova**, determinant **hessián**.

Kontrolní otázky

1. Dokážeme vždy určit stacionární body?
2. Dokážeme vždy určit, zda funkce ve stacionárním bodu nabývá extrému?

Odpovědi:

1. Nedokážeme. Velmi snadno získáme soustavu, kterou nebudeme umět vyřešit. Stačí, aby rovnice byly vyššího stupně.
2. Nedokážeme, pokud je hessián roven nule, tato metoda nestačí k rozhodnutí.

> Z odpovědí na otázky je vidět, že tato metoda (a s ní i všechny následující) jsou v užití poměrně omezené. Budeme jimi tedy řešit jen jednoduché příklady.

Řešené příklady

Příklad 46 *Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 4xy^2 - 2x - 2$.*

Řešení: Je to polynomická funkce, definiční obor: $D_f = \mathbb{R}^2$. Pomocí parciálních derivací prvního řádu určíme body podezřelé z extrému.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8xy.$$

Parciální derivace položíme rovné nule a vyřešíme soustavu.

$$2x + 4y^2 - 2 = 0,$$
$$8xy = 0, \text{ potom } x = 0 \text{ nebo } y = 0.$$

$$x = 0: \qquad\qquad y = 0:$$
$$2 \cdot 0 + 4y^2 - 2 = 0, \qquad\qquad 2x - 2 = 0,$$
$$y^2 = \frac{1}{2}, \qquad\qquad x = 1.$$
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Body podezřelé z extrému jsou $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(1, 0)$.
Spočteme parciální derivace druhého řádu pro Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x.$$

A postupně dosadíme podezřelé body.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, & 8 \cdot 0 \end{vmatrix} = 0 - \left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2 < 0,$$

tedy v bodě $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkce nenabývá extrému.

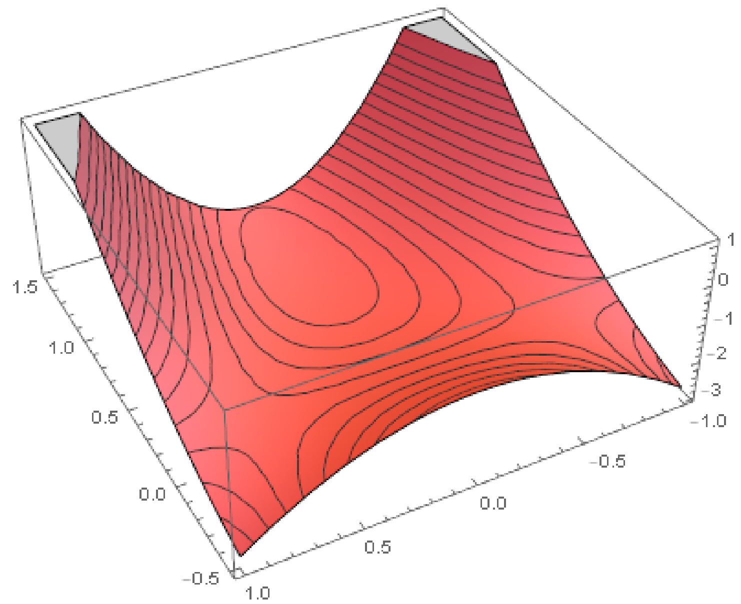
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & -8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, & 8 \cdot 0 \end{vmatrix} = 0 - \left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2 < 0,$$

a funkce v bodě $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ také nenabývá extrému.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 8 \cdot 0 \\ 8 \cdot 0, & 8 \cdot 1 \end{vmatrix} = 16 - 0 > 0,$$

tedy funkce nabývá extrému v bodě $[1, 0]$. Podle členu $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(1, 0) > 0$ víme, že funkce v tomto bodě nabývá lokálního minima. Zbývá spočítat hodnotu funkce v tomto bodě.

$$f(1, 0) = f(x, y) = x^2 + 4xy^2 - 2x - 2\Big|_{(1,0)} = 1 + 4 \cdot 0 - 2 - 2 = -3.$$

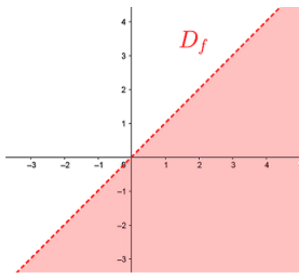


Obrázek 3.4: Vrstevnicový graf funkce $f(x, y) = x^2 + 4xy^2 - 2x - 2$.

Na obrázku je vidět funkce klesající k minimu, ale i sedlové body funkce.

Příklad 47 *Vyšetřete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = \ln(x - y) + x^2 - y$.

Řešení: Definiční obor: $x - y > 0$, tedy $D_f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$.



Nejprve určíme body podezřelé z extrému:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x-y} \cdot 1 + 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x-y} \cdot (-1) - 1. \end{aligned}$$

Parciální derivace položíme rovné nule a vyřešíme soustavu.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-y} \cdot 1 + 2x &= 0, & 1 + 2x(x - (1 + x)) &= 0, \\ \frac{1}{x-y} \cdot (-1) - 1 &= 0, & 1 + 2x(-1) &= 0, \\ 1 + 2x(x - y) &= 0, & x &= \frac{1}{2}, \\ -1 - (x - y) &= 0, \Rightarrow y = 1 + x. & y &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

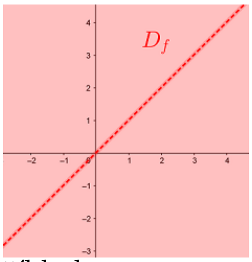
Bodem podezřelým z extrému je tedy $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Dříve než začnete počítat druhé derivace, uvědomte si, že bod $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ neleží v definičním oboru, tedy pro něj nemá smysl určovat Hessovu matici. Funkce $f(x, y) = \ln(x - y) + x^2 - y$ tedy nemá lokální extrém v žádném bodě. ○

Můžeme trochu upravit zadání a přidat do logaritmu absolutní hodnotu. Tím rozšíříme definiční obor a úloha tak bude zajímavější.

Příklad 48 *Vyšetřete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = \ln|x - y| + x^2 - y$.

Řešení: Definiční obor: $|x - y| > 0$, což platí skoro vždy, až na přímku $y = x$.
$D_f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x\}$.

Připomeňme, že derivaci $(\ln|x|)'$ lze počítat zvlášť pro x kladné a záporné.



$$\text{Pro } x > 0: \qquad (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$
$$\text{pro } x < 0: \qquad (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Je zřejmé, že parciální derivace zůstávají stejné, jako v předchozím příkladu,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - y} \cdot 1 + 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x - y} \cdot (-1) - 1,$$

stejně tak i podezřelý bod $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

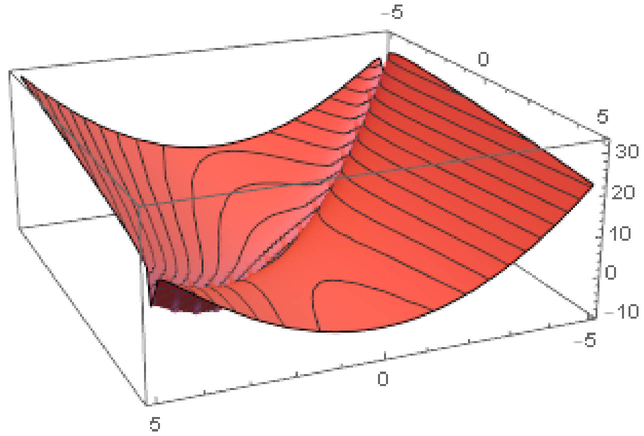
Pro Hessovu matici spočteme parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x - y)^{-1} + 2x\right) = -1(x - y)^{-2} \cdot 1 + 2 = \frac{-1}{(x - y)^2} + 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left((x - y)^{-1} + 2x\right) = -1(x - y)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(x - y)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-(x - y)^{-1} - 1\right) = -1 \cdot (-1)(x - y)^{-2} = \frac{1}{(x - y)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-(x - y)^{-1} - 1\right) = -1 \cdot (-1)(x - y)^2 \cdot (-1) = \frac{-1}{(x - y)^2}.$$

a dosadíme:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{(-1)^2} + 2, & \frac{1}{(-1)^2} \\ \frac{1}{(-1)^2} \quad , & \frac{-1}{(-1)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0,$$

tedy funkce $f(x,y) = \ln|x-y| + x^2 - y$ v bodě $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ nenabývá extrému, bod $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ je sedlovým bodem této funkce.



Obrázek 3.5: Vrstevnicový graf funkce $f(x,y) = \ln|x-y| + x^2 - y$.

○

3.8 Vázané extrémy funkce

Nechť $z = f(x,y)$ je funkce dvou proměnných a nechť $M = \{(x,y) \in D(f): \ g(x,y) = 0\}$. Lokální extrémy funkce f na množině M se nazývají **vázané lokální extrémy** a podmínka (funkce) $g(x,y) = 0$, která určuje množinu M, se nazývá **vazba**.
Při hledání vázaných extrémů mohou nastat dva případy:

a) Vazba $g(x,y) = 0$ určuje jedinou funkci $y = \varphi(x)$. Potom vázané extrémy dané funkce $z = f(x,y)$ hledáme jako lokální extrémy funkce $z = F(x) = f(x, \varphi(x))$ jedné proměnné x.

> Z hlediska funkce dvou proměnných $g(x,y)$ je role proměnných x a y symetrická. Pokud lze vazba vyjádřit ve tvaru $x = \psi(y)$, potom vázané extrémy dané funkce $z = f(x,y)$ hledáme jako lokální extrémy funkce $z = \Psi(y) = f(\psi(y), y)$ jedné proměnné.

b) Vazba $g(x,y) = 0$ neurčuje jedinou funkci $y = \varphi(x)$. V tomto případě postupujeme tzv. Lagrangeovou metodou neurčitých koeficientů. Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

a hledáme lokální extrémy této funkce s vazbou $g(x,y) = 0$. To vede k řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0,$$
$$g(x,y) = 0.$$

Z této soustavy určíme neznámé x, y, λ. O typu extrému pak rozhodneme podle věty 22.

> Obecně může být vazebných podmínek víc. Lagrangeových multiplikátorů pak bude také více. Například pro tři vazby bude Lagrangeova funkce:
>
> $$L(x,y) = f(x,y) + \lambda_1 g_1(x,y) + \lambda_2 g_2(x,y) + \lambda_3 g_3(x,y).$$
>
> Po zderivování pak obdržíme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých.

Zřejmě je $L(x,y) = f(x,y)$ pro $(x,y) \in M$, protože $g(x,y) = 0$ pro $(x,y) \in M$.
Má-li funkce L v bodě $a \in M$ lokální extrém, pak má v bodě a lokální extrém vzhledem k množině M i funkce f, a to extrém stejného typu jako funkce L.
Jestliže funkce f má v bodě a lokální extrém na množině M, potom funkce L nemusí mít v bodě a lokální extrém. To znamená, že tato metoda nemusí najít všechny vázané lokální extrémy funkce f na množině M.

Řešené příklady

Příklad 49 *Určete vázané extrémy funkce* $f(x,y) = x^2y + 3xy + y - x$ *vzhledem k podmínce* $9x^2 + x - y = 0$.

Řešení: Vazbu je možné vyjádit ve tvaru $y = 9x^2 + x$, můžeme za y dosadit a získáme tak funkci jedné proměnné.

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = x^2(9x^2 + x) + 3x(9x^2 + x) + 9x^2 + x - x = 9x^4 + 28x^3 + 12x^2$$

Funkci zderivujeme a položíme rovno nule, abychom našli body podezřelé z extrému.

$$\begin{aligned} F'(x) &= 36x^3 + 84x^2 + 24x, \\ 36x^3 + 84x^2 + 24x &= 0, \quad / : 12 & D &= 49 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25, \\ 3x^3 + 7x^2 + 2x &= 0, & x &= \frac{-7 \pm 5}{6}, \\ x\left(3x^2 + 7x + 2\right) &= 0. & x_1 &= 0,\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = -2. \end{aligned}$$

Rozhodneme, zda jsou stacionární body skutečně body extrému.

$$F''(x) = \left(12 \cdot (3x^3 + 7x^2 + 2x)\right)' = 12 \cdot (9x^2 + 14x + 2).$$

Dosadíme stacionární body:

$$F''(0) = 12 \cdot (0 + 0 + 2) > 0,$$

funkce je konvexní, je to bod lokálního minima.

$$F''(-\frac{1}{3}) = 12\left(9.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 14.\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\right) = \left(9\cdot\frac{1}{9} - \frac{14}{3} + 2\right) =$$
$$= 12\left(3 - \frac{14}{3}\right) < 0,$$

funkce je konkávní, tedy je to bod lokálního maxima.

$$F''(-2) = 12\left(9(-2)^2 + 14.(-2) + 2\right) = 12(9.4 - 14.2 + 2) =$$
$$= 12.2(18 - 14 + 2) > 0,$$

funkce je konvexní, tedy je to bod lokálního minima.

Je třeba dopočítat druhou souřadnici bodu a hodnoty extrémů.

$$y(x) = \varphi(x) = 9x^2 + x,$$
$$y(0) = \varphi(0) = 0,$$
$$y(-\frac{1}{3}) = \varphi(-\frac{1}{3}) = 9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) = 9\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$
$$y(-2) = \varphi(-2) = 9.(-2)^2 + (-2) = 34.$$

> Pro výpočet hodnoty funkce si můžeme vybrat, jestli budeme dosazovat x do předpisu $F(x)$ nebo dvojici (x, y) do předpisu $f(x, y)$. Výsledek bude stejný.

$$F(0) = 9x^4 + 28x^3 + 12x^2\big|_{x=0} = 0.$$

Funkce má v bodě $(0, 0)$ lokální minimum vzhledem k podmínce s hodnotou 0.

$$F\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = x^2y + 3xy + y - x\big|_{(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})} =$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{27}.$$

Funkce má v bodě $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ lokální maximum vzhledem k podmínce s hodnotou $\frac{11}{27}$.

$$F(-2) = 9x^4 + 28x^3 + 12x^2\big|_{x=-2} = 9\cdot 2^4 - 28\cdot 2^3 + 12\cdot 2^2 = -32.$$

Funkce má v bodě $(-2, 34)$ lokální minimum vzhledem k podmínce s hodnotou -32.

○

Příklad 50 *Určete vázané extrémy funkce* $f(x, y) = 4x - 2y + \sqrt{5}$ *vzhledem k podmínce* $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení: Jelikož podmínku nelze vyjádřit jako závislost jedné proměnné na druhé, jedná se o případ b) a použjeme Lagrangeovy multiplikátory. Předpis podmínky je kružnice, hledáme tedy extrémy funkce vzhledem k této kružnici. Vazbu vyjádříme ve tvaru $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, pro body na kružnici platí $g(x, y) = 0$. Pak definujeme funkci

$$L(x, y) = 4x - 2y + \sqrt{5} - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad \text{řešíme soustavu:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 - 2\lambda x, \qquad 4 - 2\lambda x = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2 - 2\lambda y, \qquad -2 - 2\lambda y = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

První dvě rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} 2\lambda &= 4, & 2\lambda y &= -2, \\ \lambda x &= 2, & \lambda y &= -1, \\ x &= \frac{2}{\lambda}, & y &= \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

a dosadíme do třetí:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} &= 1, \\ 4 + 1 &= \lambda^2, \\ \lambda &= \pm\sqrt{5}. \qquad \lambda = -\sqrt{5}, \qquad x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ & \qquad\qquad\quad \lambda = \sqrt{5} \qquad x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Určíme parciální derivace druhého řádu pro Hessovu matici:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2\lambda, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2\lambda. \end{aligned}$$

Postupně dosadíme oba body:

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{5}, & 0, \\ 0, & 2\sqrt{5} \end{vmatrix} = 4\sqrt{5} - 0 = 4\sqrt{5} > 0$$

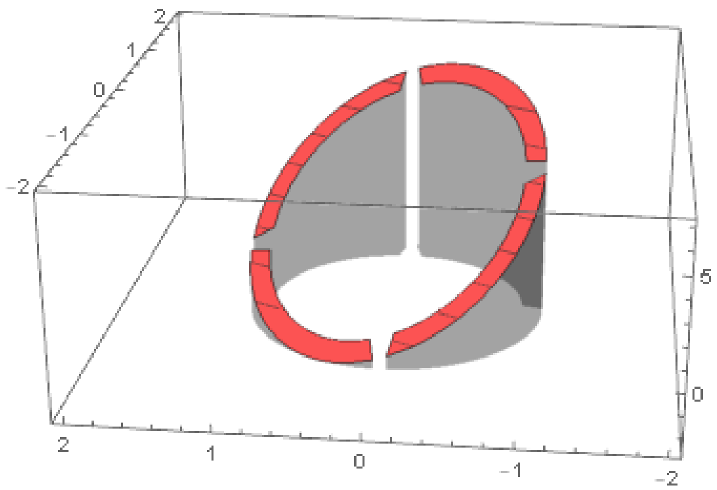
a v funkce má v bodě $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ lokální extrém. Jelikož $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, má funkce v tomto bodě lokální minimum. Zbývá dopočítat hodnotu:

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 4x - 2y + \sqrt{5}\Big|_{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = -\frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} =$$
$$= -\frac{10}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = -2\sqrt{5} + \sqrt{5} = -\sqrt{5}.$$

$$\begin{vmatrix} -2\sqrt{5}, & 0, \\ 0, & -2\sqrt{5} \end{vmatrix} = 4\sqrt{5} - 0 = 4\sqrt{5} > 0$$

a v funkce má v bodě $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ lokální extrém. Jelikož $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, má funkce v tomto bodě lokální maximum. Zbývá dopočítat hodnotu:

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 4x - 2y + \sqrt{5}\Big|_{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$



Obrázek 3.6: K vázaným extrémům funkce $f(x, y) = 4x - 2y + \sqrt{5}$.

○

Neřešené příklady:

1. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ vzhledem k podmínce $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Odpovědi:

1. Maximum v bodě $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ s hodnotou $\sqrt{2}$, minimum v bodě $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ s hodnotou $-\sqrt{2}$.

3.9 Absolutní extrémy funkce

Základní pojmy

Definice 33 *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená množina. Řekneme, že reálná funkce f má v bodě $a \in M$ **absolutní** nebo **globální maximum (minimum)** na množině M, právě když pro každé $x \in M$ je $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.*

Úlohu určit absolutní extrémy na množině M rozdělíme na problém určení lokálních extrémů na vnitřku M, což je otevřená množina. A na určení extrémů vzhledem k hranici, což jsou extrémy vázané podmínkou. Pokud není hranice určena jedním předpisem, rozdělíme ji na několik úseků a v každém určujeme vázaný extrém zvlášť. Pro takto získané extrémy určíme jejich hodnoty a porovnáním určíme body absolutního maxima a minima a jejich hodnoty.

> Vzhledem k tomu, že budeme pracovat s množinami omezenými a uzavřenými (tj. kompaktními), absolutních extrémů se bude vždy nabývat.

Řešené příklady

Příklad 51 *Vyšetřete absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3\}$.*

Řešení: Funkce je polynomická, je tedy definovaná na celém $\mathbb{R}$ a navíc omezená na obdélník M. Nejprve se pokusíme najít lokální extrémy na vnitřku množiny M. Spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 8,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 8$$

a řešíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 8 &= 0, \\ 4x - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Jediným stacionárním bodem je bod $(2,1)$. Určíme parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Hessián této funkce je ve všech bodech stejný, a to

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Bod $(2,1)$ není bodem lokálního extrému. Prozkoumáme chování na hranici. tu můžeme popsat jako sjednocení čtyř úseček:

$$\begin{cases} y = 0, & \text{když } 1 \le x \le 3, \\ y = 3, & \text{když } 1 \le x \le 3, \\ x = 1, & \text{když } 0 \le y \le 3, \\ x = 3, & \text{když } 0 \le y \le 3. \end{cases}$$

Extrémy na hranici pak řešíme jako vázané extrémy vzhledem k dané úsečce.

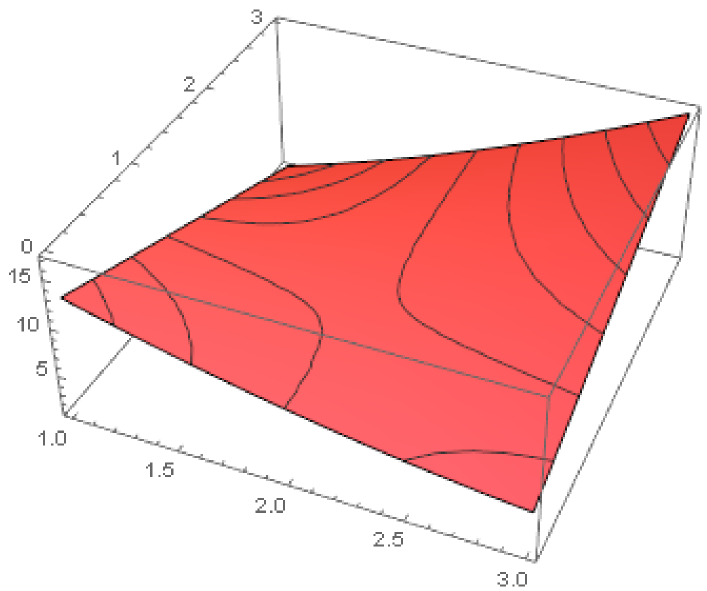
$$\begin{aligned} y = 0 : F(x) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{y=0} = x^2 - 8x + 20, \\ F'(x) &= 2x - 8 = 0, \\ & \qquad x = 4 \notin \langle 1, 3\rangle \text{ takže tento bod není v množině } M. \\ y = 3 : F(x) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{y=3} = x^2 + 4x - 4, \\ F'(x) &= 2x + 4 = 0, \\ & \qquad x = -2 \notin \langle 1, 3\rangle \text{ tento bod také není v množině } M. \\ x = 1 : F(y) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{x=1} = -4y + 13, \\ F'(y) &= -4 \neq 0 \text{ na této přímce není žádný podezřelý bod.} \\ x = 3 : F(y) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{x=3} = 4y + 5, \\ F'(y) &= 4 \neq 0 \text{ na této přímce není žádný podezřelý bod.} \end{aligned}$$

> Uvědomte si, že pomocí derivace zjistíme extrémy uvnitř množiny, v tomto případě na vnitřku intervalu. Krajní body intervalu jsou ovšem také podezřelé z extrému a jejich hodnoty je třeba vyšetřit zvlášť.

Určíme hodnoty ve vrcholech obdélníku:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{(1,0)} = 13, \\ f(3,0) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{(3,0)} = 5, \\ f(1,3) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{(1,3)} = 1, \\ f(3,3) &= x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20\big|_{(3,3)} = 17. \end{aligned}$$

Globální extrémy funkce nakonec vybíráme z posledních čtyř bodů. Maximální hodnoty 17 funkce nabývá v bodě $(3, 3)$, minima nabývá v bodě $(1, 3)$ s hodnotou 1.



Obrázek 3.7: Vrstevnicový graf funkce $f(x, y) = x^2 + 4xy - 8x + 8y + 20$.

○

Příklad 52 *Vyšetřete absolutní extrémy funkce* $f(x, y) = 0,5^{x-1} \cdot (1 - y^2)$ *vzhledem k množině* $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -\frac{x}{\sqrt{2}} \leq y \leq 3\}$.

Řešení: Funkce je součin polynomické a exponenciální, je definovaná na $\mathbb{R}^2$, dále je omezená množinou M.
Pro lokální extrémy určíme parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - y^2) \cdot 0,5^{x-1} \cdot \ln(0,5),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,5^{x-1} \cdot (-2y).$$

Řešíme soustavu rovnic

$$(1 - y^2) \cdot 0,5^{x-1} \cdot \ln(0,5) = 0,$$
$$0,5^{x-1} \cdot (-2y) = 0.$$

Exponenciela je vždy nenulová, kladná, můžeme tedy výrazem $0,5^{x-1}$ vydělit obě rovnice. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1-y^2 &= 0, \\ 2y &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení, uvnitř množiny není žádný bod podezřelý z extrému, tudíž ani žádný lokální extrém. Hranice množiny M je čtyřúhelník ohraničený přímkami. Vyšetříme chování funkce na hranici:

$$\begin{aligned} x = 2 : F(y) &= 0,5^{x-1}\cdot(1-y^2)\big|_{x=2} = 0,5(1-y^2), \\ F'(y) &= 0,5\cdot(-2y) = -y = 0, \quad \text{bod podezřelý z extrému } y=0. \\ F''(y) &= -1 < 0, \\ F(0) &= 0,5\cdot(1-4) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Funkce nabývá lokálního maxima vzhledem k hranici v bodě $(2,0)$ s hodnotou $-\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} x = -2 : F(y) &= 0,5^{x-1}\cdot(1-y^2)\big|_{x=-2} = 0,5^{-3}(1-y^2) = 8(1-y^2), \\ F'(y) &= 8\cdot(-2y) = -16y = 0, \quad \text{bod podezřelý z extrému } y=0. \\ F''(y) &= -16 < 0, \\ F(0) &= 0,5\cdot(1-4) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Funkce nabývá lokálního maxima vzhledem k hranici v bodě $(2,0)$ s hodnotou $-\frac{3}{2}$.

> Tento fakt bylo možné zjistit také ze sudosti funkce vůči y.

$$\begin{aligned} y = 3 : F(x) &= 0,5^{x-1}\cdot(1-y^2)\big|_{y=3} = 0,5^{x-1}(-8), \\ F'(x) &= -8\cdot 0,5^{x-1}\cdot\ln(0,5) = 0 \quad \text{nikdy nenastane.} \\ y = -\frac{x}{\sqrt{2}} : F(x) &= 0,5^{x-1}\cdot(1-y^2)\big|_{y=-\frac{x}{\sqrt{2}}} = 0,5^{x-1}(1-(-\frac{x}{\sqrt{2}})^2) = \\ &= 0,5^{x-1}(1-\frac{x^2}{2}), \\ F'(x) &= 0,5^{x-1}\cdot\ln(0,5)\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + 0,5^{x-1}(-x) = \\ &= 0,5^{x-1}\left(-\frac{\ln 0,5}{2}x^2 - x + \ln 0,5\right) = 0. \end{aligned}$$

Exponencielou vydělíme a řešíme jen kvadratickou rovnici:

$$D = (-1)^2 + 4\frac{\ln 0,5}{2}\ln 0,5 = 1 + 2\ln^2 0,5 > 0, \text{ rovnice má dvě řešení.}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{2\frac{-(\ln 0,5)}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{-\ln 0,5},$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{-\ln 0,5} \doteq 3,463 \notin \langle -2, 2\rangle,$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{-\ln 0,5} \doteq -0,578, \quad \text{bod podezřelý z extrému.}$$

Parabola je konkávní, takže nalevo od x_2 je derivace záporná a původní funkce klesající, napravo je derivace kladná a původní funkce rostoucí. Nalezli jsme tedy bod lokálního minima vzhledem k hranici. Určíme hodnotu:

$$F(x_2) = 0,5^{x-1}(1-\frac{x^2}{2})\Big|_{x_2} =$$

$$= 0,5^{\frac{1-\sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{-\ln 0,5}-1}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{-\ln 0,5}\right)^2\right) =$$

$$= 0,5^{\frac{\sqrt{1+2\ln^2 0,5}-1}{\ln 0,5}-1}\left(\frac{\sqrt{1+2\ln^2 0,5}-1}{\ln^2 0,5}\right) \doteq 2,487.$$

Určíme hodnoty ve vrcholech čtyřúhelníku:

$$f(-2,1) = 0,5^{x-1}(1-y^2)\big|_{(-2,1)} = 0,5^{-3}\cdot 0 = 0,$$

$$f(2,1) = 0,5^{x-1}(1-y^2)\big|_{(2,1)} = 0,5^{1}\cdot 0 = 0,$$

$$f(-2,\sqrt{2}) = 0,5^{x-1}(1-y^2)\big|_{(-2,\sqrt{2})} = 0,5^{-3}\cdot(-1) = -8,$$

$$f(2,-\sqrt{2}) = 0,5^{x-1}(1-y^2)\big|_{(2,-\sqrt{2})} = 0,5\cdot(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Absolutní extrémy vybíráme z hodnot $-\frac{3}{2}$; $2,487$; 0; -8; $-\frac{1}{2}$.
Funkce má absolutní minimum v bodě $(-2,\sqrt{2})$ s hodnotou -8 a absolutní maximum v bodě $\left(\frac{1-\sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{-\ln 0,5}, \frac{1-\sqrt{1+2\ln^2 0,5}}{\sqrt{2}\ln 0,5}\right)$, přibližně $(-0,578; 0,409)$ s hodnotou přibližně $2,487$.

○

Příklad 53 *Určete absolutní extrémy funkce* $f(x,y) = sin(x)cos(y)$ *vzhledem k množině* $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\pi \le x \le \pi,\ -\pi \le y \le \pi\}$.

Řešení: Nejprve určíme lokální extrémy na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y = 0.$$

a)

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Dosadíme do druhé rovnice.

$$\pm \sin \frac{\pi}{2} \sin y = 0, \quad \sin y = 0, \quad y_1 = \pi,\ y_2 = 0,\ y_3 = \pi.$$

Podezřelé body jsou $\left(-\frac{\pi}{2}, -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, -\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
b) $\cos y = 0$. Analogicky určíme podezřelé body $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2},\right)$, $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

> Pečlivé dosazení výsledků jedné rovnice do druhé nám značně zjednoduší řešení. I když se zdá, že je třeba projít velké množství bodů, pokud bychom jen určili všechny nulové body obou rovnic, získali bychom pět hodnot pro x, totéž pro y, všechny kombinace tvoří 25 bodů, které ovšem nejsou vždy podezřelými body. Stačí vzít například bod $(0, 0)$. Zřejmě nesplňuje první rovnici a není tedy stacionárním bodem. V případě nejistoty je vždy možné souřadnice bodů dosadit do parciálních derivací a ověřit, že vždy dávají nulu.

I tak je bodů velké množství, stojí za to funkci prozkoumat. Dosazením $(-x)$ a $(-y)$ zjistíme, že funkce je sudá v y a lichá v x. Díky tomu stačí prozkoumat body v prvním kvadrantu a chování v ostatních určit pomocí sudosti a lichosti. Navíc určujeme pouze chování funkce ve vnitřních bodech množiny.
Spočítáme druhé derivace a hessián.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \begin{vmatrix} -\sin x \cos y, & -\cos x \sin y, \\ -\cos x \sin y, & -\sin x \cos y \end{vmatrix} = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \\ &= (1 - \cos^2 x) \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \\ &= \cos^2 y - \cos^2 x. \end{aligned}$$

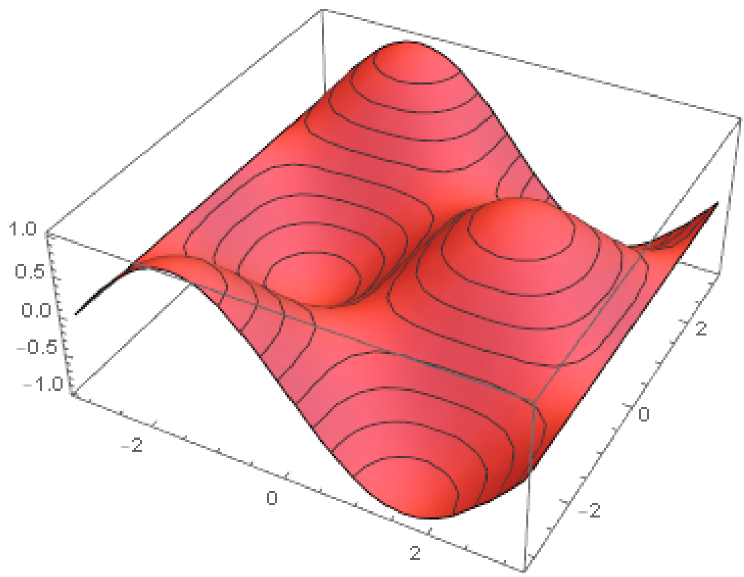
Dosadíme body z prvního kvadrantu:

$$D(0, \frac{\pi}{2}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2 0 = 0^2 - 1^2 = -1 < 0, \text{ není to bod extrému.}$$
$$D(\frac{\pi}{2}, 0) = \cos^2 0 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^2 - 0^2 = 1 > 0, \text{ je to bod extrému,}$$
$$- \sin x \cos y|_{(\frac{\pi}{2},0)} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos 0 = -1 \cdot 1 = -1 < 0,$$
$$\text{je to bod lokálního maxima.}$$

Z lichosti v x je v bodě $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ lokální minimum. Prozkoumáme hranici. Jedná se o čtverec.

$$x = -\pi : F(y) = \sin(-\pi)\cos y = 0,$$
$$x = \pi : F(y) = \sin\pi\cos y = 0,$$
$$y = -\pi : F(x) = \sin x\cos(-\pi) = -\sin x \text{ nabývá maxima v } -\frac{\pi}{2}, \text{ minima v } x = \frac{\pi}{2}.$$
$$y = \pi : F(x) = -\sin x\cos(\pi) = \sin x \text{ nabývá maxima v } -\frac{\pi}{2}, \text{ minima v } x = \frac{\pi}{2}.$$

Na množině M se maximální hodnoty 1 nabývá v bodech $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a $\left(-\frac{\pi}{2}, -\pi\right)$, minimální hodnoty -1 se nabývá v bodech $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, -\pi\right)$.



Obrázek 3.8: Vrstevnicový graf funkce $f(x, y) = \sin x \cos y$.

○

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Rejstřík

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Seznam obrázků

Použitá literatura

1. Aliprantis, Burkinshaw: Principles of Real Analysis.
2. Studijní a zkušební řád Univerzity Hradec Králové ze dne 18. srpna 2015.
3. Calda, Emil: Recese poeticko-(ne)vědecké.
4. Děmidovič: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.

Tento materiál vznikl v rámci realizace projektu Strategický rozvoj Univerzity Hradec Králové, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002427

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY