Domácí úkol z MATZAFY1 číslo 7

1. Rozhodněte, zda existují extrémy (lokální i globální) dané funkce na dané množině. Jestliže ano, určete body těchto extrémů a typy extrémů.

   a) $f(x) = x^2 \sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

   b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x}$, $(0, \infty)$,

   c) $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$, $[0, \infty)$.

2. Spektrální hustota $\mathcal{E}(\omega, T)$ určuje energii, která připadá na jednotkový interval kruhové frekvence ω při rovnovážném záření černého tělesa. Podle Wienova zákona má tvar

   $$\mathcal{E}(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T)\,.$$

   Dokažte, že frekvence ω, pro níž je při dané teplotě spektrální hustota maximální, je přímo úměrná absolutní teplotě T.

3. Zjistěte, na jakých intervalech je daná funkce konvexní a na jakých je konkávní.

   a) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 1$, $D_f = (-\infty, \infty)$,

   b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x}$, $D_f = (-\infty, \infty)$.

4. Určete asymptoty následujících funkcí

   a) $f(x) = ax + b \ln |x|$,

   b) $f(x) = 1/x$.