Domácí úkol z CMZF1, CMZFR číslo 7

1. Rozhodněte, zda existují extrémy (lokální i globální) dané funkce na dané množině. Jestliže ano, určete body těchto extrémů a typy extrémů. Nelze-li rovnice pro extrém vyřešit explicitně, pouze ji uveďte, případně ji můžete vyřešit numericky.

   a) $f(x) = x^3 \cos x$, $D_f = [-5, 5]$,
   b) $f(x) = x^2\, \mathrm{e}^{-2x}$, $D_f = (0, \infty)$,
   c) $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$, $D_f = [0, \infty)$.

2. (*dobrovolný*) Spektrální hustota $\mathcal{E}(\omega, T)$ určuje energii, která připadá na jednotkový interval kruhové frekvence ω při rovnovážném záření černého tělesa. Podle Wienova zákona má tvar

$$\mathcal{E}(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T) \, .$$

   Dokažte, že frekvence ω, pro níž je při dané teplotě spektrální hustota maximální, je přímo úměrná absolutní teplotě T.

3. Zjistěte, na jakých intervalech je daná funkce konvexní a na jakých je konkávní.

   a) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x + 1$, $D_f = (-\infty, \infty)$,
   b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 3$, $D_f = (-\infty, \infty)$,
   c) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 2$, $D_f = (-\infty, \infty)$,
   d) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-3x}$, $D_f = (-\infty, \infty)$,
   e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $D_f = (-\infty, \infty)$,
   f) $f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{x}$, $D_f = (-\infty, \infty)$.

4. Určete asymptoty následujících funkcí

   a) $f(x) = 3x - \ln|x|$,
   b) $f(x) = \frac{2}{x+2}$,
   c) $f(x) = \frac{\ln|x|}{x+3}$,
   d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$,
   e) $f(x) = \left|\frac{x^2}{x+1}\right|$,
   f) $f(x) = \frac{8-x^3}{x^2-1}$.

5. Určete průběh následujících funkcí (definiční obor, obory spojitosti, limity v bodech nespojitosti a hraničních bodech def. oboru, sudost, lichost, periodicitu, množiny monotonie funkce, body lokálních a globálních extrémů, obor hodnot, omezenost funkce, nulové body, konvexnost, konkávnost, inflexní body, asymptoty, graf).

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$,

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$,

c) $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$,

d) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$,

e) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,

f) $f(x) = \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.