

Domácí úkol z CMZF2 číslo 5

výsledky jsou bez záruky

1. Vypočtěte integrály

- a) $\int_8^{27} x^2 \sqrt[3]{x} dx$,
- b) $\int_{16}^{81} x \sqrt[4]{x} dx$,
- c) $\int_8^{27} x \sqrt[3]{x^2} dx$,
- d) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$,
- e) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$,
- f) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$,
- g) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$,
- h) $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$,
- i) $\int_0^1 (x+2) e^x dx$,
- j) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$,
- k) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$,
- l) $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt{7-x^2}} dx$,
- m) $\int_0^1 x(4-2x^2)^{14} dx$,
- n) $\int_0^1 x(3-x^2)^{15} dx$,
- o) $\int_0^1 x(4+5x^2)^{13} dx$.

2. Jakou práci je třeba vykonat, abychom těleso o hmotnosti m vyzvedli ze zemského povrchu do výše h ? Hmotnost Země je M , její poloměr R a gravitační síla mezi dvěma tělesy je $\frac{\kappa m M}{r^2}$, kde r je vzdálenost jejich středů. Určete limitu této práce pro $h \rightarrow \infty$.

$$\text{Výsledek: } \frac{\kappa m M h}{R(R+h)}, \frac{\kappa m M}{R}$$

3. Hustota tyče délky l závisí na vzdálenosti x od jejího levého konce podle vztahu $\rho = \rho_0 e^{-x}$. Najděte vzdálenost těžiště tyče od tohoto konce. Souřadnice těžiště je dána vzorcem

$$x_T = \frac{1}{M} \int_0^l x \rho(x) dx,$$

kde

$$M = \int_0^l \rho(x) dx.$$

$$\text{Výsledek: } \frac{1 - e^{-l}(1+l)}{1 - e^{-l}}$$

4. Určete souřadnice těžiště polokruhu, jehož poloměr je r . Počátek souřadnic je v jeho středu.

Výsledek: $x_T = 0, y_T = \frac{4r}{3\pi}$