Neurčitý integrál

Definice 1. Primitivní funkcí k funkci f na intervalu J rozumíme funkci F, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro } \forall x \in J$$

Primitivní funkci říkáme *neurčitý integrál* a značíme jej $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 2. Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak má na něm primitivní funkci.

Věta 3. Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu J, pak jich má na tomto intervalu nekonečně mnoho a každé dvě z nich se liší o konstantu.

Věta 4. Platí

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud pravá strana existuje. Ve výrazu výše jsou α a β konstanty.

Věta 5. *(o integraci per partes)*
Mají-li funkce u a v derivaci na intervalu J a existuje-li primitivní funkce k funkci $u \cdot v'$, pak existuje také primitivní funkce k funkci $u' \cdot v$ a platí

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta 6. *(1. věta o substituci)*
Nechť f má primitivní funkci na intervalu J. Nechť dále funkce φ zobrazuje interval I do J a má na I vlastní derivaci φ'. Potom funkce $f(\varphi(t))$ má primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\big|_{x=\varphi(t)}\,, \quad t \in I\,.$$

Věta 7. *(2. věta o substituci)*
Nechť naopak funkce $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ má primitivní funkci na intervalu I, přičemž φ má na I vlastní nenulovou derivaci (je tedy φ ryze monotónní a spojitá na I a zobrazuje jej na nějaký interval J). Potom funkce f má na J primitivní funkci a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\,, \quad x \in J\,.$$

1 Příklady

Příklad 8. *Určete* $\int x\sqrt[4]{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x\sqrt[4]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x x^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}} + C = \frac{4}{11}x^2\sqrt[4]{x^3} + C\,.$$

Nejdříve jsme si převedli $\sqrt[4]{x^3}$ do tvaru $x^{\frac{3}{4}}$, potom celý výraz upravili tak, abychom měli nějakou mocninu x. Dále jsme využili vztahu $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Při integraci nesmíme zapomenout na konstantu. Nakonec můžeme výsledný výraz upravit.

Příklad 9. *Vypočtěte* $\int (2x+3)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Při výpočtu použijeme per partes. Zvolíme $u'(x) = \mathrm{e}^x$ a $v(x) = 2x+3$. Vypočteme si u a v' a postupujeme podle vzorce výše.

$$\int (2x+3)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = |u' = \mathrm{e}^x, \quad v = 2x+3, \quad u = \mathrm{e}^x, \quad v' = 2| =$$
$$= (2x+3)\,\mathrm{e}^x - \int 2\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (2x+3)\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + C = (2x+1)\,\mathrm{e}^x + C\,.$$

Příklad 10. *Vypočtěte* $\int \cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Máme-li vypočítat integrál ze součinu sinů a kosinů, přičemž jedna z funkcí je na lichou mocninu, zavedeme si substituci za druhou z funkcí. V našem případě tedy použijeme $t = \cos x$. Musíme určit vztahy diferenciálů jednotlivých proměnných. Nejdříve si vypočteme derivaci t podle x, dostáváme $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x$, odtud $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$. Nyní využijeme toho, že v původním integrálu je sinus na lichou mocninu; dosadíme z předchozího vztahu za $\mathrm{d}t$. Za všechny kosiny zase dosadíme t. Kdyby nám přebývaly siny na sudou mocninu, využijeme vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\int \cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| t = \cos x\,, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x\,, \quad \mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x \right| =$$
$$= \int -t^2 \,\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C\,.$$

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 7

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 6