Parciální diferenciální rovnice
verze 1.1

1 Úvod

Následující text se zabývá parciálními diferenciálními rovnicemi. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT2 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Rozdělení parciálních diferenciálních rovnic

Parciální diferenciální rovnice je rovnice, ve které se kromě funkcí více proměnných vyskytují také jejich parciální derivace. Obecnou parciální diferenciální rovnici 2. řádu lze za předpokladu záměnnosti druhých parciálních derivací zapsat ve tvaru

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + F = 0\,.$$

Podobnost této rovnice a rovnice kuželoseček

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

nás vede k následující klasifikaci parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu. Zavedeme si

$$\delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

a rozlišujeme

a) eliptické: $\delta > 0$: Laplaceova $(-\Delta u = 0)$, Poissonova $-\Delta u = f$,

b) parabolické: $\delta = 0$: rovnice vedení tepla: $\partial_t u = \Delta u = 0$,

c) hyperbolické: $\delta < 0$: vlnová rovnice $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$, Schrödingerova rovnice $i\hbar\partial_t \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi$, Navierovy-Stokesovy rovnice.

3 Vlnová rovnice

Řešíme vlnovou rovnici na kruhové membráně

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\,,$$

kde jsme využili zápisu Laplaceova operátoru pomocí cylindrických souřadnic. Hledáme závislost funkce funkce u na vzdálenosti od středu r, úhlu θ a času t.

Můžeme předpokládat, že proměnné jsou separovány $u(r,\theta,t) = T(t)\Theta(\theta)R(r)$. Po dosazení do vlnové rovnice a jejím vydělení $c^2u(r,\theta,t)$ dostáváme

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)} = -\lambda^2 \,. \tag{1}$$

Obě strany se musejí rovnat konstantě, protože levá strana nezávisí na r a θ a pravá strana nezávisí na t. Tuto konstantu zvolíme jako $-\lambda^2$. Pro T dostáváme rovnici harmonického oscilátoru $T''(t) + c^2\lambda^2T(t) = 0$, která má obecné řešení

$$T(t) = A\cos(c\lambda t) + B\sin(c\lambda t) \,.$$

Z pravé části vlnové rovnice (1) máme

$$\lambda^2r^2 + \frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m^2 \,.$$

Opět využijeme toho, že levá část rovnice nezávisí na θ a pravá nezávisí na r, musí být tedy obě rovny konstantě, m^2. Protože proměnná $\Theta(\theta)$ je periodická s periodou 2π, musí být m celočíselná.

$$\Theta(\theta) = C\cos m\theta + D\sin m\theta \,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Rovnice pro R se nazývá Besselova rovnice

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

a její řešení se nazývá Besselova funkce $J_\alpha(x)$. V našem případě máme

$$R(r) = J_m(\lambda_{mn}r) \,,$$

s $\lambda_{mn} = \alpha_{mn}/a$, kde α_{mn} je n-tý kladný kořen funkce $J_m(x)$ a a je poloměr kruhové membrány. Celá neznámá funkce u má tvar

$$u(r,\theta,t) = (A\cos c\lambda_{mn}t + B\sin c\lambda_{mn}t)J_m(\lambda_{mn}r)(C\cos m\theta + D\sin m\theta) \,.$$

4 Rovnice vedení tepla

Budeme zkoumat chování rovnice vedení tepla $\partial_t u = \alpha\partial_x^2 u$ na přímce s počáteční podmínkou $u(x,0) = f(x)$. Zajímá nás tedy přenos teploty na nekonečně dlouhé rovné tyči.

K výpočtu použijeme Fourierovu transformaci, kterou značíme stříškou a vypočteme podle vztahu

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \,.$$

Pro Fourierovu transformaci derivace platí

$$\hat{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = i\xi \hat{f}\,,$$

kde jsme derivaci „přehodili“ pomocí per partes.

Na rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

aplikujeme Fourierovu transformaci v proměnné x. Máme tedy

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \alpha \hat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\,,$$
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \alpha (i\xi)^2 \hat{u}\,.$$

Tuto rovnici jako rovnici pro t umíme řešit separací proměnných, jejím řešením je exponenciála

$$\hat{u}(\xi, t) = F(\xi) \mathrm{e}^{-\alpha \xi^2 t}\,.$$

Z počáteční podmínky vidíme, že

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) = F(\xi) \quad \Rightarrow \quad F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro danou funkci $f(x)$ zjistíme řešení zpětnou Fourierovou transformací

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) \mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Zkusíme vypočítat teplotní funkci u pro malý zdroj, tedy pro teplotu velkou v jednom bodě a nulovou v ostatních. Jako počáteční podmínku zvolíme δ-distribuci, která je nekonečná v bodě 0, nulová v ostatních bodech a integrál přes ni přes celá reálná čísla je 1 ($f(x) = \delta(x)$). Její Fourierova transformace je

$$F(\xi) = \hat{\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\xi 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Teplotní funkce $u(x, t)$ je

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) \mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha \xi^2 t} \mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t \left(\xi^2 + \frac{i\xi x}{\alpha t}\right)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t \left(\xi + \frac{ix}{2\alpha t}\right)^2} \mathrm{e}^{\alpha t \frac{i^2 x^2}{4\alpha^2 t^2}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Udělali jsme to, že jsme exponent exponenciály upravili na čtverec (a přičetli zase zbývající člen). Nyní si uvědomíme, že posuneme-li obor integrace, výsledek se nezmění, protože integrujeme od $-\infty$ do ∞.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{\alpha t}\xi)^2} \, \mathrm{d}\xi \, .$$

Nyní zavedeme substituci $v = \sqrt{\alpha t}\xi$, $\mathrm{d}v = \sqrt{\alpha t}\, \mathrm{d}\xi$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} \mathrm{e}^{-v^2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} \, .$$

5 Použitá a doporučená literatura

1. Pavel Drábek, Gabriela Holubová, Parciální diferenciální rovnice, `http://mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice`

2. `http://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane`