Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

MATEMATIKA K ZÁKLADŮM FYZIKY 2

(prezenční studium)

RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.

Hradec Králové 2018

Obsah

1 Komplexní čísla **5**

1.1 Algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla 5

1.2 Moivreova věta, mocnina a odmocnina komplexního čísla 8

1.3 Kvadratické rovnice 12

1.4 Literatura 14

1.5 Příklady k samostatnému procvičování 14

2 Neurčitý integrál **16**

2.1 Primitivní funkce 16

2.2 Integrace metodou par partes 19

2.3 Integrace substituční metodou 22

2.4 Kombinace per partes a substituce 27

2.5 Literatura 29

2.6 Příklady k samostatnému procvičování 29

3 Integrace racionálních funkcí **31**

3.1 Případ $R(x) = \frac{A}{(x-x_0)^k}$ 31

3.2 Případ $R(x) = \frac{(Ax+B)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}$, kde jmenovatel nemá reálné kořeny . 32

3.3 Obecný případ 36

3.4 Literatura 41

3.5 Příklady k samostatnému procvičování 42

4 Eulerovy substituce **43**

4.1 Teorie 43

4.2 Příklady 43

4.3 Literatura 47

4.4 Příklady k samostatnému procvičování 47

5 Určitý (Riemannův) integrál **49**

5.1 Supremum a infimum 49

5.2 Určitý integrál 50

5.3 Literatura 55

5.4 Příklady k samostatnému procvičování 55

6 Použití integrálního počtu ve fyzice **57**

6.1 Kinematika 57

6.2 Potenciál, potenciální energie 58

6.3 Určení těžiště tělesa 59

6.4 Moment setrvačnosti 62

6.5 Gravitační síla mezi dvěma tělesy 63

6.6 Výpočet práce 65

6.7 Elektrostatika 66

6.8 Literatura 70

6.9 Příklady k samostatnému procvičování 70

7 Geometrické aplikace určitého integrálu **71**
7.1 Délka křivky . . . 71
7.2 Plošný obsah rovinných množin . . . 73
7.3 Výpočet objemů těles . . . 76
7.4 Výpočet povrchů rotačních ploch . . . 78
7.5 Literatura . . . 79
7.6 Příklady k samostatnému procvičování . . . 79

8 Základy diferenciálního počtu funkcí více proměnných **80**
8.1 Limita a spojitost . . . 80
8.2 Parciální derivace . . . 82
8.3 Literatura . . . 84
8.4 Příklady k samostatnému procvičování . . . 84

9 Diferenciální rovnice – separace proměnných **85**
9.1 Literatura . . . 90
9.2 Příklady k samostatnému procvičování . . . 90

10 Vícenásobný integrál **91**
10.1 Teorie . . . 91
10.2 Příklady . . . 91
10.3 Literatura . . . 101
10.4 Příklady k samostatnému procvičování . . . 101

11 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování **102**

Použitá a doporučená literatura **105**

Předmluva

Tento studijní text je určen zejména studentům předmětu Matematika k základům fyziky 2 vyučovaného v prvním ročníku prezenčního studia oboru Fyzikálně-technická měření a výpočetní technika a oboru Fyzika se zaměřením na vzdělávání na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové.

Předmět navazuje na předmět Matematika k základům fyziky 1 a zabývá se zejména integrálním počtem funkce jedné proměnné. Kromě toho představuje také operace s komplexními čísly, diferenciálním počtem funkcí více proměnných, řešením diferenciálních rovnic metodou separace proměnných či vícenásobným integrálem.

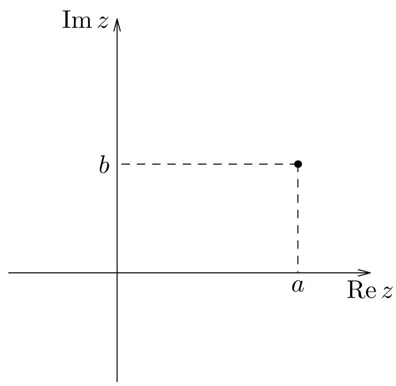
Vznikl přepracováním a doplněním obdobného textu pro kombinované studium [16], sekce 6 a 7 vznikly přepracováním ze studijního textu [15]. Znění vět jsou většinou převzatá z učebnic [8, 10] a sekce 4 byla doplněna. Zadání příkladů jsou buď vlastní nebo převzatá či inspirovaná různými zdroji, hlavně [4, 10], jejich řešení jsou vlastní. Sekce 8 až 10 vznikly přepracováním částí studijních textů [17].

Budu rád, když tento text bude sloužit mým studentům, ale nejen jim. V případě, že v textu objevíte chybu, překlep či nejasnost, sdělte mi ji prosím na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

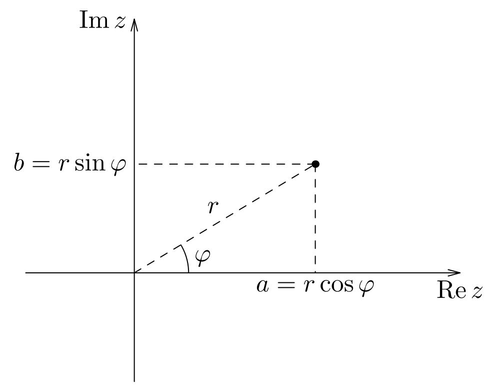
V Hradci Králové, 1. 6. 2018

Jiří Lipovský

verze 0.1



(a) Algebraický tvar



(b) Goniometrický tvar

Obrázek 1: Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla.

1 Komplexní čísla

1.1 Algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla

Už na střední škole se setkáváme s tím, že rovnice $x^2 + 1 = 0$ není v oboru reálných čísel řešitelná. Zavádíme proto symbol i, pro něž platí $i^2 = -1$. Komplexní čísla (která značíme $\mathbb{C}$) jsou čísla zapsatelná ve tvaru $z = a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla a i je zmíněná imaginární jednotka. Tento tvar se nazývá *algebraický*. Číslo a nazveme *reálnou částí* čísla z, číslo b *imaginární částí* čísla z.

Součet dvou komplexních čísel má reálnou část rovnou součtu reálných částí obou čísel a komplexní část rovnou součtu komplexních částí obou čísel. Obdobný intuitivní vztah platí pro rozdíl. Při násobení dvou komplexních čísel upravíme výraz standardními algebraickými úpravami, využijeme vztahu $i^2 = -1$ a následně výrazy uspořádáme tak, abychom obdrželi reálnou a imaginární část součinu. Komplexně sdruženým číslem k číslu $z = a + bi$ je číslo $\bar{z} = a - bi$. Chceme-li provést komplexní sdružení u složitějšího výrazu, ve kterém figurují konkrétní komplexní čísla, můžeme to udělat tak, že nahradíme všechna i výrazem $-i$. Máme-li převést zlomek $\frac{a+bi}{c+di}$ na algebraický tvar, musíme jej rozšířit komplexním sdružením jmenovatele $c - di$. Díky známému vzorci $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ tak ve jmenovateli dostaneme reálné číslo $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$.

Můžeme říct, že komplexní číslo lze zapsat jako dvojice reálných čísel, tj. existuje ekvivalence mezi $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$. Proto každé komplexní číslo odpovídá bodu v rovině. V komplexní rovině komplexní čísla v algebraickém tvaru znázorňujeme tak, že na x-ovou osu vyneseme reálnou část čísla a a na y-ovou osu imaginární část b (viz obr. 1a).

Dále existuje goniometrický tvar $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a exponenciální tvar komplexního čísla $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ (viz obr. 1b). Jedná se o obdobu polárních souřadnic v rovině. Porovnáním zmíněných tvarů komplexního čísla s algebraickým tvarem dostáváme z Pythagorovy věty $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ a dále z definice kosinu a sinu $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ a $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Při násobení dvou čísel v goniometrickém tvaru se absolutní hodnoty násobí a úhly sčítají. Lze to dokázat součtovými vztahy pro sinus a kosinus.

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &\quad = r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\,. \end{aligned}$$

Tedy

$$z = z_1z_2 = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \quad r = r_1r_2\,, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2\,.$$

Rovnost $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, která ukazuje ekvivalentní zápis čísla v goniometrickém a exponenciálním tvaru a nazývá se *Eulerův vzorec*, lze dokázat např. porovnáním Taylorových rozvojů obou funkcí.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \cdots = \\ &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} + \cdots = \\ &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right) = \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Příklad 1.1. *Proveďte následující úpravy a výsledek vyjádřete a algebraickém tvaru.*

a) $(1 - 2i) + (-3 + 7i)$,

b) $(-3 + 5i) - (-2 - 4i)$,

c) $(1 + 2i) \cdot (-3 + 2i)$,

d) $(2 - i)(i + 5)(1 - i)$.

Řešení:

a) $(1 - 2i) + (-3 + 7i) = 1 - 3 + i(-2 + 7) = -2 + 5i$.

b) $(-3 + 5i) - (-2 - 4i) = -3 + 2 + i(5 + 4) = -1 + 9i$.

c) $(1+2i)\cdot(-3+2i) = 1(-3) + 1\cdot 2i + (2i)\cdot(-3) + 2i\cdot 2i = -3 + 2i - 6i - 4 = -7 - 4i$.

d) $(2 - i)(i + 5)(1 - i) = (11 - 3i)(1 - i) = 8 - 14i$.

Příklad 1.2. *K danému komplexnímu číslu najděte komplexně sdružené číslo (v libovolném tvaru).*

a) $3 + 2i$,

b) $4\,e^{7i}$,

c) $(1+2i)\,e^{2-3i}$,

d) $\frac{3-2i}{5+4i} + e^{1-i}$.

Řešení:

a) Postupujeme podle definice. $\overline{3+2i} = 3-2i$

b) Zaměníme i za $-i$. $\overline{4\,e^{7i}} = 4\,e^{-7i}$. Alternativně výraz můžeme pomocí Eulerova vzorce zapsat jako $4\cos 7 - 4i\sin 7$ (využili jsme sudost kosinu a lichost sinu).

c) Obdobně jako v předchozím případě zaměníme všechny i za $-i$.

$$\overline{(1+2i)\,e^{2-3i}} = (1-2i)\,e^{2+3i}\,.$$

d) $\overline{\frac{3-2i}{5+4i} + e^{1-i}} = \frac{3+2i}{5-4i} + e^{1+i}$.

Příklad 1.3. *Převeďte na algebraický tvar číslo* $\frac{3+4i}{1-2i}$.

Řešení: Nejdříve celý zlomek rozšíříme $1+2i$, tj. komplexně sdruženým jmenovatelem. Dostaneme

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{3+4i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1-4i^2} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i\,.$$

Příklad 1.4. *Převeďte na algebraický tvar číslo* $\frac{4-2i}{3-i}$.

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladě rozšíříme zlomek sdruženým jmenovatelem, tj. číslem $3+i$.

$$\frac{4-2i}{3-i} = \frac{4-2i}{3-i}\,\frac{3+i}{3+i} = \frac{12-6i+4i-2i^2}{9-i^2} = \frac{14-2i}{10} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i\,.$$

Příklad 1.5. *Převeďte na algebraický tvar číslo* $3\,e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

Řešení: Použijeme Eulerův vzorec.

$$\begin{aligned} 3\,e^{-\frac{\pi i}{3}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \\ = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dále jsme využili sudost kosinu a lichost sinu a jejich hodnoty pro úhel 60°.

Příklad 1.6. *Převeďte na algebraický tvar číslo* $2\,e^{7\frac{\pi i}{6}}$.

Řešení: Opět použijeme Eulerův vzorec.

$$2\,\mathrm{e}^{7\frac{\pi i}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} - i\,.$$

Příklad 1.7. *Převeďte na goniometrický a exponenciální tvar číslo* $-1+\sqrt{3}\,i$*.*

Řešení: Nejdříve určíme absolutní hodnotu čísla:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\,.$$

Dále máme

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}\,, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Vidíme, že úhel je ve druhém kvadrantu. Z jednotkové kružnice určíme $\varphi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$. Goniometrický tvar čísla tedy je $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ a exponenciální $2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Příklad 1.8. *Převeďte na goniometrický a exponenciální tvar číslo* $-1-i$*.*

Řešení: Absolutní hodnota tohoto čísla je

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\,.$$

Číslo leží ve třetím kvadrantu, takže fáze čísla φ bude mezi π a $3\pi/2$. Dostáváme

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Víme, že pro první kvadrant platí $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. hodnota fáze je $\varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$. Goniometrický tvar čísla je tedy $z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$ a exponenciální $z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi i}$.

1.2 Moivreova věta, mocnina a odmocnina komplexního čísla

Věta 1.9. *Pro mocninu komplexního čísla* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *platí tzv.* Moivreova věta

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Důkaz. Větu můžeme dokázat matematickou indukcí. Věta zjevně platí pro $n = 1$. Dokážeme, že když věta platí pro k, platí i pro $k+1$. Nechť tedy

$$z^k = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin k\varphi)\,.$$

Pak

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} = z^k z \ &= r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\
= r^{k+1}&[\cos(k\varphi)\cos\varphi - \sin(k\varphi)\sin\varphi + i\cos(k\varphi)\sin\varphi + i\sin(k\varphi)\cos\varphi] = \\
&= r^{k+1}\left\{\cos[(k+1)\varphi] + i\sin[(k+1)\varphi]\right\} \ ,
\end{aligned}
$$

kde jsme využili trigonometrických identit $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Proto věta platí pro každé přirozené číslo. □

Moivreova věta se dá jí využít například pro výpočet mocnin a odmocnin komplexního čísla. Při výpočtu přirozené mocniny komplexního čísla číslo převedeme do exponenciálního tvaru a aplikujeme větu. Problém má jedno řešení, dostaneme jedno komplexní číslo, které je mocninou původního čísla. Toto řešení však může odpovídat mocninám různých komplexních čísel.

Příklad 1.10. *Pomocí Moivreovy věty vypočtěte z^5, kde $z = 1 + i$.*

Řešení: Číslo převedeme na goniometrický tvar: $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dostáváme tedy goniometrický tvar $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. Aplikací Moivreovy věty dostáváme

$$
\begin{aligned}
z^5 = r^5(\cos(5\varphi) + i\sin(5\varphi)) = \sqrt{2}^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \\
= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 - 4i
\end{aligned}
$$

Příklad 1.11. *Pomocí Moivreovy věty vypočtěte z^6, kde $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Řešení: Číslo z převedeme na exponenciální tvar: $r = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{\sqrt{3}^2}{2^2}} = 1$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dostáváme $\varphi = \frac{\pi}{3}$ a tedy

$$
\begin{aligned}
z^6 = r^6(\cos(6\varphi) + i\sin(6\varphi)) = 1^6\left(\cos\left(6\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(6\frac{\pi}{3}\right)\right) = \\
= \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Konkrétní příklady lze samozřejmě také (možná rychleji) vypočítat přímým násobením čísel v algebraickém tvaru. Při výpočtu odmocniny je však Moivreova věta velmi prospěšná. n-tá odmocnina z komplexního čísla má n různých komplexních kořenů. To plyne tzv. základní věty algebry, která tvrdí, že polynomická rovnice řádu n má n komplexních kořenů. Kořeny odmocniny leží všechny na jedné kružnici se středem v počátku komplexní roviny a jejich fáze φ se liší vždy o $\frac{2\pi}{n}$.

Příklad 1.12. *Vypočtěte $\sqrt[4]{-4}$ (určete všechny kořeny rovnice $z^4 = -4$).*

Řešení: Vyjdeme z Moivreovy věty. Nechť je neznámá odmocnina $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. Pak podle Moivreovy věty platí

$$z^4 = r^4\,\mathrm{e}^{4i\varphi} = r^4\,\mathrm{e}^{4i\varphi + 2m\pi i}\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,, \tag{1}$$

kde jsme ve druhém kroku číslo vynásobili jedničkou, tedy $1 = \mathrm{e}^{2m\pi i}$, kde m je celé číslo. Víme, že $z^4 = -4$, tedy $r = \sqrt[4]{|-4|} = \sqrt{2}$. Vynesením čísla do komplexní roviny vidíme, že $4\varphi = \pi$ (protože fáze čísla -4 je π), tedy $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Odmocněním rovnice (1) dostáváme

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi + \frac{m\pi i}{2}}\,.$$

Protože n-tá odmocnina má n kořenů, můžeme brát $m = 0, 1, 2, 3$, pro další čísla budeme dostávat stejné kořeny. Pro naše hodnoty máme

$$z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4} + im\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right)\right)\,.$$

Konkrétně

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i\,,\\
z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i\,,\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i\,,\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i\,.
\end{aligned}$$

Kořeny jsou znázorněny na Obr. 2.

Příklad 1.13. *Vypočtěte $\sqrt[3]{-3i}$ (určete všechny kořeny rovnice $z^3 = -3i$).*

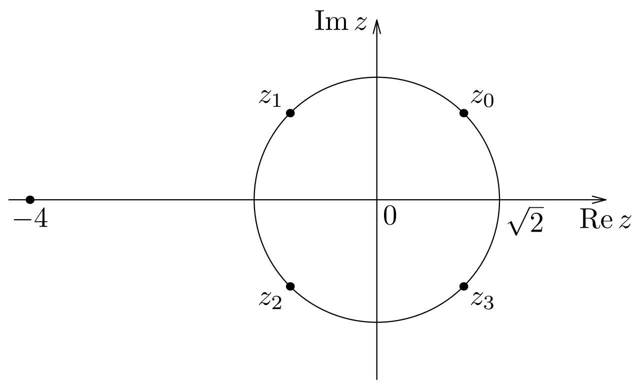
Řešení: Nejdříve převedeme číslo $-3i$ na exponenciální tvar. Dostáváme vzdálenost od počátku $\sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$ a z obrázku fázi $\frac{3\pi}{2}$. Tedy $-3i = 3\,\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}}$. Nechť $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, pak

$$z^3 = r^3\,\mathrm{e}^{3i\varphi} = 3\,\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2} + 2\pi im}\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,.$$

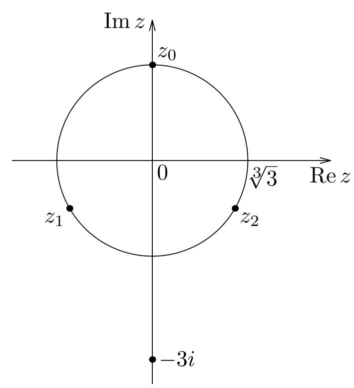
Tedy po odmocnění

$$z_m = \sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi im}\,, \quad m \in \{0, 1, 2\}\,.$$

Stačí volit $m \in \{0, 1, 2\}$ (tedy zbytky po dělení třemi), ostatní celá čísla dávají



Obrázek 2: Kořeny $\sqrt[4]{-4}$.



Obrázek 3: Kořeny $\sqrt[3]{-3i}$.

zjevně stejné výsledky. Hledané kořeny jsou tedy

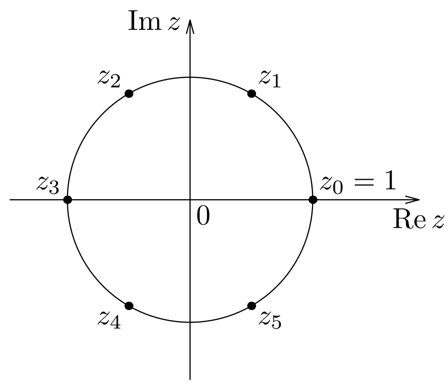
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{3}i\,, \\ z_1 = \sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi i} = \sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) &= -\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}i\,, \\ z_2 = \sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) &= \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}i\,. \end{aligned}$$

Kořeny jsou znázorněny na Obr. 3.

Příklad 1.14. *Vypočtěte* $\sqrt[6]{1}$ *(určete všechny kořeny rovnice* $z^6 = 1$*).*

Řešení: Napíšeme jedničku v exponenciálním tvaru $1 = \mathrm{e}^{2i\pi m}$, $m \in \mathbb{Z}$. Nechť $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, potom

$$z_m^6 = r^6\,\mathrm{e}^{6i\varphi} = \mathrm{e}^{2i\pi m}\,, \quad m \in \{0,1,2,3,4,5\}\,.$$



Obrázek 4: Kořeny $\sqrt[6]{1}$.

Opět stačí uvažovat m pouze jako zbytky po dělení 6, protože ostatní celá čísla vedou na stejné kořeny.

$$z_m = \mathrm{e}^{\frac{i\pi m}{3}}\,, \quad m \in \{0,1,2,3,4,5\}\,.$$

Konkrétně

$$\begin{aligned} z_0 &= \mathrm{e}^{\frac{0i\pi}{3}} = 1\,,\\ z_1 &= \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\ z_2 &= \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\ z_3 &= \mathrm{e}^{i\pi} = -1\,,\\ z_4 &= \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\ z_5 &= \mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

Kořeny jsou znázorněny na Obr. 4.

1.3 Kvadratické rovnice

Poslední téma sekce o komplexních číslech je opakováním ze střední školy. Komplexní čísla se někdy objevují jako kořeny kvadratické rovnice. Uvažujme rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0\,.$$

Abychom odvodili vztah pro její kořeny, upravíme nejdříve rovnici na čtverec. Po vydělení a dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0\,. \\ x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0\,. \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\,. \end{aligned}$$

Nyní obě strany rovnice odmocníme, nesmíme zapomenout na to, že odmocnění není ekvivalentní úprava. Dostáváme dva kořeny se znaménky plus a mínus.

$$\begin{aligned} \left(x_{1,2} + \frac{b}{2a}\right) &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \qquad (2) \end{aligned}$$

Mezi kořeny kvadratické rovnice existují Viètovy vztahy, pomocí nichž někdy můžeme rychle určit kořeny rovnice z jejích koeficientů.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

Příklad 1.15. *Řešte rovnici* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Řešení: Nejdříve určíme řešení ze vzorce (2). Koeficienty rovnice jsou $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}\,.$$

Tedy $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Obdobně můžeme využít Viètových vztahů. Trojčlen rozložíme díky tomu, že $6 = 2 \cdot 3$ a $-5 = -(2 + 3)$ na

$$0 = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)\,.$$

Odsud už lehce určíme kořeny.

Příklad 1.16. *Řešte rovnici* $2x^2 + x + 7 = 0$.

Řešení: Použijeme vzorce (2).

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4\cdot 7\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{55}}{4}\,.$$

Kořeny jsou tedy

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{55}}{4}\,, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{55}}{4}\,.$$

Příklad 1.17. *Řešte rovnici* $x^4 + x^2 + 1 = 0.$

Řešení: Uvědomíme si, že se jedná o kvadratickou rovnici v x^2. Dostáváme

$$x_{1,2}^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Nyní můžeme $x = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ najít z Moivreovy věty.

$$x_{1,m}^2 = r_{1,m}^2\,\mathrm{e}^{2i\varphi_{1,m}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}i\pi + 2mi\pi}, \quad m \in \{0, 1\}.$$

Vidíme, že $r_{1,m} = 1$, $m = 0, 1$ a $\varphi_{1,0} = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_{1,1} = \frac{4\pi}{3}$. Dostáváme tedy

$$x_{1,0} = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_{1,1} = \mathrm{e}^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Obdobně postupujeme i pro druhý kořen kvadratické rovnice v x^2.

$$x_{2,m}^2 = r_{2,m}^2\,\mathrm{e}^{2i\varphi_{2,m}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}i\pi + 2mi\pi}, \quad m \in \{0, 1\}.$$

Vidíme, že $r_{2,m} = 1$, $m = 0, 1$ a $\varphi_{2,0} = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_{2,1} = \frac{5\pi}{3}$. Dostáváme tedy

$$x_{2,0} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_{2,1} = \mathrm{e}^{\frac{5\pi i}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1.4 Literatura

K úvodnímu studiu komplexních čísel lze použít v podstatě libovolnou učebnici středoškolské matematiky. K nastudování základních pojmů poslouží také anglická i česká Wikipedie [25, 26]. K procvičení na příkladech můžete použít také např. internetové materiály [27, 21, 7].

1.5 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 1.18. *Vypočtěte (najděte výsledek v algebraickém tvaru).*

a) $(2 + 3i) + (3 - 4i)$,

b) $(-2 + i) + (-8i + 1)$,

c) $(7 + 6i) - (-2 + 3i)$,

d) $(-i - 4) - (1 + i)$,

e) $(5 - 2i) \cdot (2 + 3i)$,

f) $(1 + i) \cdot (2 - i) \cdot (3 + 2i)$.

Příklad 1.19. *K následujícím číslům najděte komplexně sdružená čísla (výsledek zapište v libovolném tvaru).*

a) $5i - 4$,

b) $2\,\mathrm{e}^{\pi i/3}$,

c) $(2 - 5i)\,\mathrm{e}^{2-3i}$,

d) $\frac{(2+3i)(5-7i)}{(6+4i)(-1+2i)}$.

Příklad 1.20. *Převeďte na algebraický tvar.*

a) $\frac{1-i}{2-3i}$,

b) $\frac{2+i}{2-i}$,

c) $4\,\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}$,

d) $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$.

Příklad 1.21. *Převeďte na goniometrický a exponenciální tvar.*

a) $2\sqrt{3} + 2i$,

b) $2 - 2i$.

Příklad 1.22. *Pomocí Moivreovy věty vypočtěte mocniny.*

a) z^8, $z = -1 - i$,

b) z^3, $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

Příklad 1.23. *Pomocí Moivreovy věty vypočtěte odmocniny, tedy najděte všechny kořeny (v algebraickém tvaru) dané rovnice.*

a) $z^3 = 2i$,

b) $z^4 = 4$,

c) $z^6 = -1$,

d) $z^3 = -27$.

Příklad 1.24. *Najděte všechny kořeny rovnic.*

a) $x^2 + 7x + 6 = 0$,

b) $3x^2 - 2x + 4 = 0$,

c) $x^4 - x^2 + 1 = 0$.

2 Neurčitý integrál

2.1 Primitivní funkce

V prvním semestru jsme se naučili určit derivaci dané funkce. Integrování je opačný proces. Naším cílem je určit funkci (budeme jí říkat *primitivní funkce*), jejíž derivací je původní funkce.

Definice 2.1. Primitivní funkcí k funkci f na intervalu J rozumíme funkci F, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro } \forall x \in J$$

Primitivní funkci říkáme *neurčitý integrál* a značíme jej $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pro spojitou funkci na intervalu vždy existuje primitivní funkce.

Věta 2.2. Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak má na něm primitivní funkci.

Z minulého semestru víme, že když k dané funkci přičteme konstantu, její derivace se nezmění (derivace konstanty je nula). Proto určení primitivní funkce není jednoznačné.

Věta 2.3. Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu J, pak jich má na tomto intervalu nekonečně mnoho a každé dvě z nich se liší o konstantu.

Stejně jako u derivace platí pro integraci linearita.

Věta 2.4. Platí

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud pravá strana existuje. Ve výrazu výše jsou α a β konstanty.

Tabulku základních integrálů můžete najít např. na stránkách doc. Rokyty [18], pro přehlednost ji uvádíme v Obr. 5.

Příklad 2.5. *Určete* $\int x^5\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Využijeme vztah $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ pro $n = 5$. Při integraci nesmíme zapomenout na konstantu.

$$\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C\,.$$

Příklad 2.6. *Určete* $\int x\sqrt[4]{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x\sqrt[4]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x x^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}} + C = \frac{4}{11}x^2\sqrt[4]{x^3} + C\,.$$

f	$\int f \overset{c}{=}$	Pozn.	Kde
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$	$x \in \mathbf{R}$ pro $n \geq 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pro $n < 0$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$	$x \in (0, +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$		$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
e^x	e^x		$x \in \mathbf{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$	$x \in \mathbf{R}$
$\sin x$	$-\cos x$		$x \in \mathbf{R}$
$\cos x$	$\sin x$		$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$		$x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$\operatorname{cotg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$		$x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$		$x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$		$x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$		$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$		$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$		$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$		$x \in \mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$		$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$		$x \in \mathbf{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\operatorname{arccotg} x$		$x \in \mathbf{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$		$x \in \mathbf{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$		$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{tgh} x$	$\ln(\cosh x)$		$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{cotgh} x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$		$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arg\,sinh} x$		$x \in \mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{sign} x \operatorname{arg\,cosh}\lvert x\rvert$		$\lvert x\rvert > 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arg\,tgh} x$	Pozor na def. obor!	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arg\,cotgh} x$	Pozor na def. obor!	$\lvert x\rvert > 1$

Obrázek 5: Tabulka základních primitivních funkcí, převzato z [18].

Nejdříve jsme si převedli $\sqrt[4]{x^3}$ do tvaru $x^{\frac{3}{4}}$, potom celý výraz upravili tak, abychom měli nějakou mocninu x. Dále jsme využili vztah $\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$. Při integraci nesmíme zapomenout na konstantu. Nakonec můžeme výsledný výraz upravit.

Příklad 2.7. *Určete* $\int x^{-1} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: V tomto příkladu si musíme uvědomit, že vztah $\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ neplatí pro $a = -1$. Tento integrál vede na přirozený logaritmus z absolutní hodnoty x.

$$\int x^{-1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| \,\mathrm{d}x + C\,.$$

Příklad 2.8. *Určete* $\int \frac{3}{\sqrt{2x^3}} \,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{3}{\sqrt{2x^3}} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{\sqrt{2}} \int x^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} + C = -3\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + C\,.$$

Nejdříve jsme využili linearity integrálu a konstantu jsme vytkli před integrál. Dále jsme využili vztah $\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ a výraz upravili.

Příklad 2.9. *Určete* $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+3}} \,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+3}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arg\,sinh} x + C\,.$$

Využili jsme linearitu integrálu a vztah pro integrál z funkce $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Příklad 2.10. *Určete* $\int \frac{x^2+3x\sqrt{x}+4\sqrt{x}}{x} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve výraz upravíme do vhodného tvaru, dostaneme součet integrálů z funkcí, které zintegrovat umíme.

$$\int \frac{x^2 + 3x\sqrt{x} + 4\sqrt{x}}{x} \,\mathrm{d}x = \int (x + 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x^3} + 8\sqrt{x} + C\,.$$

Příklad 2.11. *Určete* $\int \mathrm{tg}^2\, x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Výraz musíme nejdříve upravit pomocí definice tangensu a vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Poté lze použít vztah pro $\frac{1}{\cos^2 x}$ a x^n s $n = 0$.

$$\int \mathrm{tg}^2\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + C\,.$$

Příklad 2.12. *Určete* $\int 3^x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Využijeme vztahu $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

$$\int 3^x \,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + C\,.$$

Příklad 2.13. *Určete* $\int \left(\frac{2x^2+3x+1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

Řešení: Výraz upravíme a poté použijeme vztahy pro integrál z x^a a $1/x$.

$$\int \left(\frac{2x^2+3x+1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int \left(2x+3+\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(4x^2+12x+13+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3+6x^2+13x+6\ln|x|-\frac{1}{x}+C\,.$$

2.2 Integrace metodou par partes

Vypočítat integrál z funkce, která není uvedena v tabulce (např. je nějakou z jejich kombinací) není tak jednoduché a přímočaré jako u derivací. Neexistuje jednoznačný návod, jak to udělat, a při výpočtu je třeba použít určité invence. Existují ale metody, kterými se dají některé z typů příkladů řešit. S větší početní praxí získáte náhled na to, kterou metodu použít. Jednou z možností, jak vypočítat složitější integrál, je metoda *per partes* (česky „po částech“).

Věta 2.14. *(o integraci per partes)*
Mají-li funkce u a v derivaci na intervalu J a existuje-li primitivní funkce k funkci $u \cdot v'$, pak existuje také primitivní funkce k funkci $u' \cdot v$ a platí

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Důkaz využívá derivace součinu

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,.$$

Když obě strany rovnice zintegrujeme, dostáváme

$$u(x)v(x) = \int [u(x)v(x)]'\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

z čehož věta vyplývá. □

U této metody je třeba vyjádřit integrál jako součin dvou funkcí (jedna z nich klidně může být jednička). Funkce volíme tak, že integrál z jedné z nich známe. Kromě členu, který už neintegrujeme, dostáváme člen, u něhož se derivace přenese z jedné funkce na druhou. Tím můžeme integrál zjednodušit natolik, že jej umíme vypočítat. V některých případech je třeba použít per partes vícekrát, případně můžeme po úpravách obdržet až na znaménko stejný výraz, který jsme integrovali na počátku. V tom případě hledaný integrál vypočteme z odpovídající rovnice. Obecně při volbě funkcí, které integrujeme a derivujeme, postupujeme tak, abychom celý výraz zjednodušili.

Příklad 2.15. *Vypočtěte* $\int (2x+3)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Při výpočtu použijeme per partes. Zvolíme $u'(x) = \mathrm{e}^x$ a $v(x) = 2x+3$. Tato volba je výhodná, protože integrací se e^x nezesložití, zatímco výraz $2x+3$ se derivací zjednoduší. Vypočteme si u a v' a postupujeme podle vzorce výše.

$$\int (2x+3)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = 2x+3 \\ u = \mathrm{e}^x & v' = 2 \end{vmatrix} =$$
$$= (2x+3)\,\mathrm{e}^x - \int 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+3)\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + C = (2x+1)\,\mathrm{e}^x + C\,.$$

Všimněte si, že těsně po použití per partes nepíšeme integrační konstantu, protože ve výrazu stále máme integrál, který ji skrývá.

Příklad 2.16. *Vypočtěte* $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Tentokráte zvolíme $u'(x) = 1$ a $v(x) = \ln x$. Víme, že derivací logaritmu je $\frac{1}{x}$, výsledkem bude funkce x^n, kterou zintegrovat umíme.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$
$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C\,.$$

Příklad 2.17. *Vypočtěte* $\int (2x^2-4x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: V tomto případě musíme per partes použít dvakrát. V obou případech zvolíme za $v'(x) = \mathrm{e}^x$ ze stejných důvodů jako v příkladu 2.15.

$$\int (2x^2-4x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = 2x^2-4x+1 \\ u = \mathrm{e}^x & v' = 4x-4 \end{vmatrix} =$$
$$= (2x^2-4x+1)\,\mathrm{e}^x - \int (4x-4)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = 4x-4 \\ u = \mathrm{e}^x & v' = 4 \end{vmatrix} =$$
$$= (2x^2-4x+1)\,\mathrm{e}^x - \left[(4x-4)\,\mathrm{e}^x - \int 4\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= (2x^2-4x+1-4x+4)\,\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^x + C = (2x^2-8x+9)\,\mathrm{e}^x + C\,.$$

Příklad 2.18. *Vypočtěte* $\int (4x-3)\,\ln x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Narozdíl od některých jiných příkladů nyní polynom v x nederivujeme, ale integrujeme, abychom se derivací „zbavili“ logaritmu.

$$\int (4x-3)\,\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = 4x-3 & v = \ln x \\ u = 2x^2-3x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$
$$= (2x^2-3x)\ln x - \int (2x^2-3x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (2x^2-3x)\ln x - \int (2x-3)\,\mathrm{d}x =$$
$$= (2x^2-3x)\ln x - x^2 + 3x + C\,.$$

Příklad 2.19. *Vypočtěte* $\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: V tomto příkladu provedeme dvakrát integraci per partes. Je v podstatě jedno, kterou funkci integrujeme a kterou derivujeme, pouze musíme derivovat v obou případech buď exponenciálu nebo goniometrické funkce.

$$I = \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = \cos x \\ u = \mathrm{e}^x & v' = -\sin x \end{vmatrix} =$$
$$= \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = \sin x \\ u = \mathrm{e}^x & v' = \cos x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Dostali jsme opět výraz s původním integrálem, tentokráte ale se záporným znaménkem. Označíme-li si jej I, dostáváme rovnici

$$I = \mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) - I\,,$$

kterou vyřešíme pro neznámou I. Řešením je $I = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) + C$.

Příklad 2.20. *Vypočtěte* $\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$.

Řešení: Výraz pod integrálem je definovaný pro $x \in (-1,1)$. Budeme proto uvažovat pouze tato x. Výraz si upravíme a použijeme per partes. Jako obvykle derivujeme logaritmus.

$$\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \int x[\ln(1+x) - \ln(1-x)]\,\mathrm{d}x =$$
$$= \begin{vmatrix} u' = x & v = \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)(1-x^2) + x + C\,.$$

Během výpočtu jsme použili vztah $\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x) + C$, který lze ověřit derivací pravé strany (více v podsekci o substituci). Při vyjádření výsledku je možné také použít vztah z tabulek a část výsledku vyjádřit jako $\operatorname{arg\,tgh} x$.

Příklad 2.21. *Vypočtěte* $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zvolíme $u' = 1$ a $v = \sqrt{1-x^2}$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \sqrt{1-x^2} \\ u = x & v' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{-(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \arcsin x\,.$$

Opět získáváme výsledek pomocí původního integrálu $I = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ s opačným znaménkem. Rovnost výše lze zapsat rovnicí

$$I = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - I\,,$$

Výsledkem je tedy

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C\,.$$

Stejný integrál je řešený jako příklad 2.35 metodou substituce.

2.3 Integrace substituční metodou

Věta 2.22. *(1. věta o substituci)*
Nechť f má primitivní funkci na intervalu J. Nechť dále funkce φ zobrazuje interval I do J a má na I vlastní derivaci φ'. Potom funkce $f(\varphi(t))$ má primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)}\,, \quad t \in I\,.$$

Věta 2.23. *(2. věta o substituci)*
Nechť naopak funkce $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ má primitivní funkci na intervalu I, přičemž φ má na I vlastní nenulovou derivaci (je tedy φ ryze monotónní a spojitá na I a zobrazuje jej na nějaký interval J). Potom funkce f má na J primitivní funkci a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\,, \quad x \in J\,.$$

Stručně si popíšeme použití obou vět. Naším cílem je vypočítat integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. U první metody postupujeme tak, že integrovanou funkci $f(x)$ zapíšeme pomocí jiné funkce h ve tvaru $f(x) = h(\psi(x))\psi'(x)$, přičemž předpokládáme, že $\int h(y)\,\mathrm{d}y = H(y)$ umíme vypočítat. Pak použitím Věty 2.22 dostáváme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int h(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \int h(y)\,\mathrm{d}y = H(y) = H(\psi(x))\,.$$

U druhé věty u substituci si vyjádříme $x = \psi^{-1}(y)$, vypočteme odpovídající $\mathrm{d}x$ a dosadíme do původního integrálu a vypočteme integrál v proměnné y. Do vypočtené primitivní funkce dosadíme za y.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\psi^{-1}(y))(\psi^{-1})'(y)\,\mathrm{d}y = \int h(y)\,\mathrm{d}y = H(y) = H(\psi(x))\,.$$

Jednodušší postup, než ověřovat předpoklady vět, mnohdy je vypočítat integrál a pak ověřit derivací, jestli vypočtená funkce je primitivní funkcí k funkci pod integrálem.

Příklad 2.24. *Vypočtěte* $\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Popíšeme oba postupy. Nejdříve využijeme 1. větu o substituci. Protože umíme integrovat funkci e^x, zavedeme substituci $t = ax$. Derivace t podle x je a. Proto nejdříve „vytvoříme“ derivaci této funkce přidáním a před $\mathrm{d}x$ (a samozřejmě současným vytknutím $1/a$ před integrál).

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{ax} a\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = ax & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a \\ x = \frac{t}{a} & \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C\,.$$

Nyní integrál vypočteme s využitím 2. věty o substituci. Nejdříve vyjádříme x pomocí t. Vypočteme derivaci $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a poté dosadíme za x a $\mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = ax & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a} \\ x = \frac{t}{a} & \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \mathrm{e}^{a\frac{1}{a}t}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C\,.$$

Příklad 2.25. *Vypočtěte* $\int \cos x^2\, x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použijeme substituci $t = x^2$. Nejdříve s použitím 1. věty o substituci.

$$\int \cos x^2\, x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos x^2\, 2x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \\ x = \sqrt{t} & \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{2}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C\,.$$

Chceme-li využít 2. věty o substituci, vyjádříme si x a $\mathrm{d}x$ pomocí t a $\mathrm{d}t$.

$$\int \cos x^2\, x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x^2 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \\ x = t^{\frac{1}{2}} & \mathrm{d}x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \cos t\, t^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{2}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C\,.$$

Příklad 2.26. *Vypočtěte* $\int \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Máme-li vypočítat integrál ze součinu sinů a kosinů, přičemž jedna z funkcí je na lichou mocninu, zavedeme si substituci za druhou z funkcí. V našem případě tedy použijeme $t = \cos x$. Musíme určit vztahy diferenciálů jednotlivých proměnných. Nejdříve si vypočteme derivaci t podle x, dostáváme $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x$, odtud $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Nyní využijeme toho, že v původním integrálu je sinus na lichou mocninu; dosadíme z předchozího vztahu za $\mathrm{d}t$. Za všechny kosiny zase dosadíme t. Kdyby nám přebývaly siny na sudou mocninu, využijeme vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\int \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = -\int \cos^2 x\,(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \cos x & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x \\ & \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \int -t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C\,.$$

Příklad 2.27. *Vypočtěte* $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int (-2)x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = -x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = -2x \\ & \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + C = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C\,.$$

Příklad 2.28. *Vypočtěte* $\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Někdy se můžeme setkat s integrálem ze zlomku, jehož čitatel je derivací jmenovatele. Pak substituujeme za jmenovatele a výsledek integrálu je logaritmus jmenovatele.

$$\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \cos x & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x \\ & \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C\,.$$

Příklad 2.29. *Vypočtěte* $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \mathrm{arctg}\, x & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} \\ & \mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2\, x + C\,.$$

Příklad 2.30. *Vypočtěte* $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Snažíme se využít vztahu $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x$. K tomu potřebujeme pod odmocninou mít stejný koeficient u konstantního členu a u členu s druhou mocninou proměnné. Zvolíme proto substituci $x = \sqrt{5}t$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{5}\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \sqrt{5}t & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ t = \frac{1}{\sqrt{5}}x & \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{5}\int \frac{1}{\sqrt{5-5t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + C = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C\,.$$

Příklad 2.31. *Vypočtěte* $\int \frac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}}{2-3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}}{2-3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-3\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x}}{2-3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} t = 2-3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -3\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} \\ & \mathrm{d}t = (-3\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\ln|t| + C = -\ln|2-3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}| + C\,.$$

Příklad 2.32. *Vypočtěte* $\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Počítáme-li integrál ze součinu sinů a kosinů, kde jedna z funkcí je v liché mocnině, zvolíme substituci za druhou z nich. Jeden ze sinů si vyhradíme pro diferenciál t. Zbylé siny jsou v sudé mocnině, můžeme využít $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, tedy dostáváme tedy funkci v kosinech a můžeme zvolit substituci za kosinus.

$$\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x = -\int \sin^6 x(-\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int (1-\cos^2 x)^3(-\sin x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{vmatrix} t = \cos x & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x \\ & \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = -\int (1-t^2)^3\,\mathrm{d}t = -\int (1-3t^2+3t^4-t^6)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -t + 3\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C\,.$$

Příklad 2.33. *Vypočtěte* $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Derivace jmenovatele je $2x$. Proto zlomek rozdělíme na dvě části a každou z nich integrujeme zvlášť.

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2}\,.$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x^2+1 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \\ & \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C_1 = \ln(x^2+1) + C_1\,.$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C_2\,.$$

Tedy celkem

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Příklad 2.34. *Vypočtěte* $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zavedeme substituci $t = \sqrt{x}$ a zlomek obdržený po substituci upravíme.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \sqrt{x} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \\ x = t^2 & \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \frac{2t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t+2-2}{t+1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C\,.$$

Integrál $\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln|t+1|$, což může být jednoduše dokázáno substitucí $u = t+1$.

Příklad 2.35. *Vypočtěte* $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nyní vyřešíme stejný integrál jako v příkladu 2.21 metodou substituce. Zvolíme substituci $x = \sin t$ (obdobně lze použít také $x = \cos t$).

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \sin t & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t \\ t = \arcsin x & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = 2t & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2}u & \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Nejdříve jsme využili vztahu $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$, tedy $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. V poslední rovnosti jsme využili vztahu

$$\sin(2t) = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}\,.$$

Příklad 2.36. *Vypočtěte* $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zvolíme substituci za $t = 1+x^2$.

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 1+x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \\ x^2 = t-1 & \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2}{t^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C\,.$$

Pro integrály z goniometrických funkcí (konkrétněji racionálních funkcí v sinech a kosinech) volíme následující substituce. Když je integrovaná funkce „lichá v sinu“ (při změně znamének všech sinů se změní znaménko výrazu na opačné), substituujeme za kosinus; je-li „lichá v kosinu“, substituujeme za sinus. Je-li funkce „sudá v sinu i kosinu“, použijeme substituci $t = \mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$,

$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Ve všech případech použijeme případně rovnici $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, abychom převedli sudé mocniny sinů na kosiny či obráceně. Univerzální substitucí pro racionální funkci v sinech a kosinech je substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x = 2\operatorname{arctg} x$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{2}{1+t^2}$. Její nevýhodou ale je, že její použití bývá pracné.

2.4 Kombinace per partes a substituce

V této podsekci se zaměříme na příklady, k jejichž vypočtení potřebujeme použít kombinaci obou představených metod.

Příklad 2.37. *Vypočtěte* $\int x^2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zvolíme substituci $t = \sqrt{x}$, abychom v argumentu exponenciály dostali přímo proměnnou, ne její odmocninu. Následně pětkrát uplatníme per partes, při kterém integrujeme exponenciálu a derivujeme polynom.

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \sqrt{x} & x = t^2 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t & \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int 2t^5\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^t & v = 2t^5 \\ u = \mathrm{e}^t & v' = 10t^4 \end{vmatrix} =$$
$$= 2t^5\mathrm{e}^t - \int 10t^4\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^t & v = 10t^4 \\ u = \mathrm{e}^t & v' = 40t^3 \end{vmatrix} = 2t^5\mathrm{e}^t - 10t^4\mathrm{e}^t + \int 40t^3\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^t & v = 40t^3 \\ u = \mathrm{e}^t & v' = 120t^2 \end{vmatrix} = 2t^5\mathrm{e}^t - 10t^4\mathrm{e}^t + 40t^3\mathrm{e}^t - \int 120t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^t & v = 120t^2 \\ u = \mathrm{e}^t & v' = 240t \end{vmatrix} = 2t^5\mathrm{e}^t - 10t^4\mathrm{e}^t + 40t^3\mathrm{e}^t - 120t^2\mathrm{e}^t + \int 240t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^t & v = 240t \\ u = \mathrm{e}^t & v' = 240 \end{vmatrix} = 2t^5\mathrm{e}^t - 10t^4\mathrm{e}^t + 40t^3\mathrm{e}^t - 120t^2\mathrm{e}^t + 240t\mathrm{e}^t -$$
$$- \int 240\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (2t^5 - 10t^4 + 40t^3 - 120t^2 + 240t - 240)\mathrm{e}^t + C =$$
$$= (2x^2\sqrt{x} - 10x^2 + 40x\sqrt{x} - 120x + 240\sqrt{x} - 240)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C\,.$$

Příklad 2.38. *Vypočtěte* $\int \sin x \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve zavedeme substituci $t = \sin x$.

$$\int \sin x \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{vmatrix} t = \sin x & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ x = \arcsin t & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \end{vmatrix} \;=\; \int \ln t \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Nyní využijeme per partes. Derivovat budeme logaritmus a integrovat $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$. Proto nejdříve vypočteme substitucí integrál

$$\int \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} s = 1 - t^2 & \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -2t & \mathrm{d}s = -2t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = 2(1-t^2)^{\frac{1}{2}} + C_1\,.$$

Tedy s použitím per partes

$$\int \ln t \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u' = \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} & v = -\frac{1}{2}\ln t \\ u = 2(1-t^2)^{\frac{1}{2}} & v' = -\frac{1}{2t} \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \ln t + \int \frac{1}{t}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Získaný integrál řešíme substitucí $w = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$\int \frac{1}{t}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} w = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} & t = (1-w^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w} = \frac{-w}{\sqrt{1-w^2}} & \mathrm{d}t = \frac{-w}{\sqrt{1-w^2}}\,\mathrm{d}w \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{-w \cdot w}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-w^2}}\,\mathrm{d}w = -\int \frac{w^2}{1-w^2}\,\mathrm{d}w = \int \frac{1-w^2-1}{1-w^2}\,\mathrm{d}w =$$

$$= \int 1\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-w}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+w}\mathrm{d}w = w + \frac{1}{2}\ln\frac{1-w}{1+w} + C_2 =$$

$$= w + \ln\sqrt{1-w^2} - \ln(1+w) + C_2 = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} + \ln t - \ln(\sqrt{1-t^2}+1) + C_2\,.$$

Hledaný integrál tedy je

$$\int \sin x \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1-\sin^2 x}\ln(\sin x) + \sqrt{1-\sin^2 x} + \ln(\sin x) -$$

$$- \ln(\sqrt{1-\sin^2 x}+1) + C = (-|\cos x|+1)\ln(\sin x) + \ln\frac{\sin x}{|\cos x|+1}\,.$$

a je definovaný pro taková x, pro které je definovaný původní výraz, tj. $\sin x \geq 0$, tedy $x \in \cup_{n\in\mathbb{Z}}(2\pi n, \pi + 2\pi n)$.

Příklad 2.39. *Vypočtěte* $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve použijeme per partes. Víme totiž z tabulky integrálů, že

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C_1\,;$$

tento výraz integrujeme, x derivujeme.

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \frac{1}{\cos^2 x} & v = x \\ u = \operatorname{tg} x & v' = 1 \end{vmatrix} = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\operatorname{tg} x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \cos x & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x \\ & \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} =$$

$$= x\operatorname{tg} x + \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\operatorname{tg} x + \ln|t| + C = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C\,.$$

Příklad 2.40. *Vypočtěte* $\int \frac{\operatorname{arccotg} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve zavedeme substituci za $t = \mathrm{e}^x$, poté provedeme per partes. Derivujeme $\operatorname{arccotg} x$, integrujeme $\frac{1}{t^2}$.

$$\int \frac{\operatorname{arccotg} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = \mathrm{e}^x & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{t} \\ x = \ln t & \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\operatorname{arccotg} t}{t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = -\frac{1}{t^2} & v = -\operatorname{arccotg} t \\ u = \frac{1}{t} & v' = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = -\frac{1}{t}\operatorname{arccotg} t - \int \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Nyní vypočteme zvlášť poslední integrál.

$$\int \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} s = t^2 & \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2t \\ & \mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[\ln s - \ln(s+1)\right] + C_1 = \frac{1}{2}\left[\ln t^2 - \ln(t^2+1)\right] + C_1$$

Celý integrál tedy je

$$\int \frac{\operatorname{arccotg} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{t}\operatorname{arccotg} t - \frac{1}{2}\left[\ln t^2 - \ln(t^2+1)\right] + C =$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccotg} \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) + C =$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccotg} \mathrm{e}^x - x + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) + C\,.$$

2.5 Literatura

Jako základní literaturu lze doporučit učebnice [8, 10, 2]. Ve druhé z nich naleznete řešené i neřešené příklady. Další příklady (řešené i neřešené) lze nalézt např. v [23, 28, 13, 4].

2.6 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 2.41. *S využitím tabulky integrálů vypočtěte následující integrály.*

a) $\int x^8\,\mathrm{d}x$,

b) $\int x^2\sqrt[4]{x^3}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{7x^2+7}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{x^2+3x+2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$,

f) $\int \frac{3}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int [(\sin x - 1)^2 + \cos^2 x]\,\mathrm{d}x$, *h)* $\int \frac{5^x}{2^x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 2.42. *Metodou per partes vypočtěte integrály.*

a) $\int (x^2+2x+3)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

b) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$,

c) $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x, \quad n \neq -1$,

d) $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Příklad 2.43. *Vypočítejte integrály pomocí substituce.*

a) $\int (x+1)\sin(x^2+2x)\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{\cosh x}{\sinh x}\,\mathrm{d}x$,

f) $\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 2.44. *Vypočítejte metodou per partes, substitucí nebo jejich kombinací.*

a) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$,

b) $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

c) $\int x^5 \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 2.45. *Vypočítejte integrály (sami určete metodu).*

a) $\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$,

f) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$.

3 Integrace racionálních funkcí

Budeme se zabývat integrací funkcí $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$, definovaných na $\mathbb{R}$ kromě bodů, ve kterých $Q(x) = 0$. Rozebereme si nejdříve dva speciální případy, poté přejdeme k obecnému postupu, jak tyto funkce integrovat. Nejdříve popíšeme obecný postup a poté ho ilustrujeme na příkladu. Podrobnější obecný postup lze nalézt v Kopáčkově učebnici [8] na str. 141. Uvedené vzorce se není třeba učit nazpaměť, je nutné pochopit postup.

3.1 Případ $R(x) = \frac{A}{(x-x_0)^k}$

Zde si zavedeme substituci $t = x - x_0$ a zintegrujeme t^{-k}. Pro $k \geq 2$ dostáváme

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x - x_0 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1 \\ & \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \int A\, t^{-k}\,\mathrm{d}t = \frac{A\, t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(-k+1)(x-x_0)^{k-1}} + C\,.$$

Pro $k = 1$ máme

$$\int \frac{A}{(x-x_0)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x - x_0 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1 \\ & \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{A}{t}\,\mathrm{d}t = A\;\ln|t| + C = A\;\ln|x-x_0| + C\,.$$

Příklad 3.1. *Vypočítejte* $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^3}$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^3} = \left| \begin{matrix} t = x - 3 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1 \\ & \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int t^{-3}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2(x-3)^2} + C\,.$$

Příklad 3.2. *Vypočítejte* $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^4}$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^4} = \frac{1}{2^4} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^4} = \left| \begin{matrix} t = x + \frac{5}{2} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1 \\ & \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{16} \int t^{-4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\frac{t^{-3}}{-3} = -\frac{1}{48\left(x+\frac{5}{2}\right)^3} + C = -\frac{1}{6(2x+5)^3} + C\,.$$

Příklad 3.3. *Vypočítejte* $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+4}$.

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+4} = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{4}{3}} = \left| \begin{matrix} t = x + \frac{4}{3} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1 \\ & \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln\left|x + \frac{4}{3}\right| + C$$

3.2 Případ $R(x) = \frac{(Ax+B)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}$, kde jmenovatel nemá reálné kořeny

Pokud je $A \neq 0$, snažíme se výraz upravit tak, aby čitatel byl derivací závorky ve jmenovateli. Obdržíme dva zlomky, z nichž u prvního z nich je čitatel derivací závorky ve jmenovateli a u druhého je v čitateli pouze konstanta. Naším cílem je tedy dostat v čitateli prvního zlomku $2x+\beta$. Zároveň ale potřebujeme, součet obou zlomků by roven původnímu zlomku. Aby odpovídaly členy s x, vynásobíme jej $A/2$. Tedy

$$Ax + B = \frac{A}{2}(2x+\beta) + C_1\,,$$

kde C_1 je konstanta. Snadno dopočteme, že $C_1 = \frac{2B-\beta A}{2}$. Dostáváme

$$\int \frac{(Ax+B)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+\beta)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x + \frac{2B-\beta A}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}$$

První integrál je roven pro $k \geq 2$

$$\frac{A}{2}\int \frac{(2x+\beta)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x^2+\beta x+\alpha & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x+\beta \\ & \mathrm{d}t = (2x+\beta)\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$
$$= \frac{A}{2}\int t^{-k}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{2}\frac{t^{-k+1}}{(-k+1)} + C = \frac{A/2}{(-k+1)(x^2+\beta x+\alpha)^{k-1}} + C$$

Pro $k = 1$ dostáváme

$$\frac{A}{2}\int \frac{(2x+\beta)}{x^2+\beta x+\alpha}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x^2+\beta x+\alpha & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x+\beta \\ & \mathrm{d}t = (2x+\beta)\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{A}{2}\ln|t| + C = \frac{A}{2}\ln|x^2+\beta x+\alpha| + C$$

Nyní si rozebereme výpočet druhého integrálu. Jmenovatel upravíme tak, aby tvořil čtverec.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\beta x+\alpha)^k} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\frac{\beta}{2}x+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}+\alpha)^k} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma^2\right]^k}\,,$$

kde $\gamma^2 = \alpha - \frac{\beta^2}{4}$. Dále pokračujeme substitucí $y = x + \frac{\beta}{2}$ a následně $z = \frac{y}{\gamma}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma^2\right]^k} = \left| \begin{matrix} y = x+\frac{\beta}{2} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \\ & \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+\gamma^2)^k} =$$
$$= \frac{1}{\gamma^{2k}}\int \frac{\mathrm{d}y}{\left[\left(\frac{y}{\gamma}\right)^2+1\right]^k} = \left| \begin{matrix} z = \frac{y}{\gamma} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\gamma} \\ & \mathrm{d}z = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}y \end{matrix} \right| = \frac{1}{\gamma^{2k-1}}\int \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^k}\,.$$

Pro $k = 1$ dostáváme $\frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg} z$, kde $z = \frac{y}{\gamma} = \frac{x+\beta/2}{\sqrt{\alpha-\beta^2/4}}$. Pro vyšší k integrál vyjádříme pomocí integrálu s k o jedna menším a $\int \frac{z^2}{(1+z^2)^k}\,\mathrm{d}z$. Druhý integrál vyřešíme per partes. Podrobnější postup lze naleznout v Kopáčkovi [8].

Příklad 3.4. *Vypočítejte* $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Vypočteme derivaci jmenovatele, tj. $2x+2$ a první ze zlomků napíšeme tak, aby čitatel byl derivací jmenovatele. Druhý zlomek bude mít v čitateli konstantu, kterou určíme tak, aby platila rovnost.

$$\int \frac{2x-3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{5}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x^2+2x+3| - \int \frac{5}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+2x+3| - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \ln|x^2+2x+3| - \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \ln|x^2+2x+3| - \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t + C = \ln|x^2+2x+3| - \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C\,.$$

Při výpočtu druhého integrálu upravíme jmenovatel tak, aby se k výrazu s proměnnou přičítala jednička. Pak zavedeme vhodnou substituci, abychom dostali jmenovatel t^2+1, což vede na arcustangens.

Příklad 3.5. *Vypočítejte* $\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

První integrál je

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x^2-x+1 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x-1 \\ & \mathrm{d}t = (2x-1)\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{3}{2}\ln|t| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|x^2-x+1| + C_1\,.$$

Výraz ve druhém integrálu upravíme nejdříve na čtverec a pak zavedeme substituci.

$$\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) & \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{\sqrt{3}} & \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \frac{10}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + C_2 = \frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C_2\,.$$

Výsledek příkladu tedy je

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{3}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C\,.$$

Příklad 3.6. *Vypočítejte* $\int \frac{x+1}{2x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zlomek si opět vyjádříme jakou součet dvou zlomků, přičemž první z nich má v čitateli derivaci jmenovatele.

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x =$$

První integrál je roven

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = 2x^2+3x+3 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 4x+3 \\ & \mathrm{d}t = (4x+3)\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln|t| + C_1 = \frac{1}{4}\ln|2x^2+3x+3| + C_1\,.$$

Druhý integrál upravíme a zavedeme substituci.

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{2x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{16}{15}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\frac{4}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right]^2+1} = \left| \begin{matrix} t = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{3}{4}\right) & \mathrm{d}t = \frac{4}{\sqrt{15}}\,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{\sqrt{15}} & \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{15}}{4}\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{15}\frac{\sqrt{15}}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\sqrt{15}}{30}\operatorname{arctg} t + C_2 = \frac{\sqrt{15}}{30}\operatorname{arctg}\left[\frac{4}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right] + C_2\,.$$

Výsledek integrálu je

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|2x^2+3x+3| + \frac{\sqrt{15}}{30}\operatorname{arctg}\left[\frac{4}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right] + C\,.$$

Příklad 3.7. *Vypočítejte* $\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Postupujeme obdobně, nejdříve si zlomek napíšeme jako součet dvou zlomků, z nichž čitatel prvního je derivací závorky ve jmenovateli.

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

První integrál je roven

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x^2+2x+2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x+2 \\ & \mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$
$$= \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + C_1 = -\frac{1}{x^2+2x+2} + C_1\,.$$

Pro druhý integrál dostáváme po úpravě na čtverec

$$-\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{[(x+1)^2+1]^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} z = x+1 & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 \\ & \mathrm{d}z = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$
$$= -\int \frac{1}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = -\int \frac{1+z^2-z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z =$$
$$= -\int \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z =$$
$$= -\operatorname{arctg} z + \int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = -\operatorname{arctg}(x+1) + \int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Zbylý integrál vypočítáme metodou per partes. Nejdříve vypočítáme integrál, který při per partes použijeme.

$$\int \frac{2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \left| \begin{matrix} t = z^2+1 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = 2z \\ & \mathrm{d}t = 2z\,\mathrm{d}z \end{matrix} \right| =$$
$$= \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + C_2 = -\frac{1}{z^2+1} + C_2\,.$$

$$\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \left| \begin{matrix} u' = \frac{2z}{(z^2+1)^2} & v = \frac{1}{2}z \\ u = -\frac{1}{z^2+1} & v' = \frac{1}{2} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C_3 = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C_3\,.$$

Výsledek tedy je

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^2+2x+2} - \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\frac{x+1}{(x+1)^2+1} +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C = -\frac{1}{2}\frac{x+3}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C\,.$$

3.3 Obecný případ

Rozebereme obecný případ $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty. Nejdříve si uvědomíme, že případ, kdy stupeň polynomu P je větší nebo roven stupni polynomu Q, lze snadno převést na opačný případ. Polynomy totiž částečně podělíme a zintegrujeme členy x^k. Budeme se tedy zabývat případem, kdy stupeň polynomu P je menší než stupeň Q.

Polynom Q rozdělíme na součin

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s}(x^2 + \beta_j x + \alpha_j)^{l_j} ,$$

kde a_i jsou reálné kořeny tohoto polynomu a trojčlen $x^2 + \beta_j x + \alpha_j$ nemá reálné kořeny. Tento rozklad vždy existuje, protože každý polynom řádu n má n komplexních kořenů a kvůli tomu, že polynom Q má reálné koeficienty, existují jeho nereálné kořeny vždy v komplexně sdružených dvojicích. Pak existuje rozklad

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{k_1,1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1,1}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{k_r,r}}{(x-a_r)^{k_r}} + \cdots +\\ + \frac{A_{1,r}}{x-a_r} + + \frac{C_{l_1,1}x + D_{l_1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\alpha_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{C_{1,1}x + D_{1,1}}{x^2+\beta_1 x+\alpha_1} + \cdots +\\ + \frac{C_{l_s,s}x + D_{l_s,s}}{(x^2+\beta_s x+\alpha_s)^{l_s}} + \cdots + \frac{C_{1,s}x + D_{1,s}}{x^2+\beta_s x+\alpha_s} .\end{aligned}$$

Všimněte si, že je-li ve jmenovateli výraz s kořenem polynomu, dáváme do čitatele pouze konstantu, je-li tam kvadratický trojčlen bez reálných kořenů, dáváme do čitatele lineární dvojčlen. Porovnáním členů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic pro tyto koeficienty. Koeficienty tedy vypočteme. Jednotlivé členy zintegrujeme podle prvních dvou případů.

Příklad 3.8. *Vypočítejte* $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} .$$

Koeficient Q si rozložíme pomocí kořenů kvadratické rovnice v x^2.

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4) .$$

Hledáme tedy koeficienty A, B, C a D, aby platilo

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} .$$

$$5x^2 + 4 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A+4C)x + (B+4D) .$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých exponentů dostáváme

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad 0 = A + C,\\
x^2 &: \quad 5 = B + D,\\
x &: \quad 0 = A + 4C,\\
0 &: \quad 4 = B + 4D.
\end{aligned}$$

$$A \ = 0\,, \quad B = \frac{16}{3}\,, \quad C = 0\,, \quad D = -\frac{1}{3}\,.$$

Integrál tedy vyjádříme jako:

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \frac{16}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \\ = x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + C\,.$$

Využili jsme integrálu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \left| \begin{matrix} t = \frac{x}{2} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \\ & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C_1\,.$$

Příklad 3.9. *Vypočítejte* $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+2x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve rozdělíme polynom $x^3 + 2x^2 - x - 2$ na součin lineárních dvojčlenů nebo kvadratických trojčlenů. Abychom to mohli udělat, odhadneme jeden z kořenů. Je zřejmé, že kořenem je např. $x = 1$. Podělíme polynomy $(x^3 + 2x^2 - x - 2)/(x - 1) = x^2 + 3x + 2$ a najdeme kořeny kvadratického trojčlenu. Dostáváme $x^3+2x^2-x-2 = (x-1)(x+1)(x+2)$. Zlomek pod integrálem tedy lze zapsat jako součet tří zlomků ve tvaru

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}\,. \tag{3}$$

V čitatelích jsou jen konstanty, protože ve jmenovateli je vždy lineární dvojčlen. Zlomky můžeme převést na společný jmenovatel a porovnat čitatel s levou stranou.

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)\ . \tag{4}$$

Dostáváme

$$2x^2 + 5x - 1 = (A + B + C)x^2 + (3A + B)x + (2A - 2B - C)\,,$$

z čehož porovnáním koeficientů získáme soustavu rovnic, kterou vyřešíme.

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad 2 = A + B + C, \\ x &: \quad 5 = 3A + B, \\ 0 &: \quad -1 = 2A - 2B - C. \end{aligned}$$
$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = -1.$$

Koeficienty můžeme také dostat alternativním způsobem, který bývá mnohdy jednodušší, protože zjednodušuje soustavu rovnic. Do rovnosti (4) dosadíme tři (tolik je neznámých koeficientů) různé hodnoty x. Tak dostáváme tři rovnice pro A, B, C, které vyřešíme. Abychom dostali jednoduchou soustavu rovnic, volíme pokud možno kořeny polynomu Q.

$$\begin{aligned} x = 1 &: \quad 6 = 6A \quad \Rightarrow \quad A = 1, \\ x = -1 &: \quad -4 = -2B \quad \Rightarrow \quad B = 2, \\ x = -2 &: \quad -3 = 3C \quad \Rightarrow \quad C = -1. \end{aligned}$$

Čtenáře možná může napadnout otázka, proč můžeme dosazovat do rovnice kořeny polynomu Q, když původní zlomky pro tyto kořeny definované nejsou. Když rovnici (3) vynásobíme jmenovatelem zlomku na levé straně, dostáváme na pravé straně výraz

$$\frac{A(x-1)(x+1)(x-2)}{x-1} + \frac{B(x-1)(x+1)(x-2)}{x+1} + \frac{C(x-1)(x+1)(x-2)}{x+2}.$$

Tento výraz sice není v bodech 1, 2 a -1 definovaný, má však v těchto bodech limitu a může být touto limitou dodefinovaný. Po dodefinování dostáváme spojitou funkci a porovnáváme tedy na levé i pravé straně dvě spojité funkce na $\mathbb{R}$.

Nyní můžeme integrál napsat jako součet tří integrálů a vyřešit.

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} =$$
$$= \ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{(x-1)(x+1)^2}{x+2}\right| + C.$$

Příklad 3.10. *Vypočítejte* $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Protože polynom v čitateli má stejný řád jako polynom ve jmenovateli, částečně je podělíme.

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}.$$

Polynom ve jmenovateli rozložíme

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3).$$

Hledáme tedy koeficienty A, B, C, aby platilo

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\,.$$

Po vynásobení jmenovatelem máme

$$5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)\,.$$

Dosazením kořenů polynomu Q dostáváme

$$\begin{aligned}
x=0:&\qquad 1=6A &&\Rightarrow\quad A=\frac{1}{6}\,,\\
x=2:&\qquad 9=-2B &&\Rightarrow\quad B=-\frac{9}{2}\,,\\
x=3:&\qquad 28=3C &&\Rightarrow\quad C=\frac{28}{3}\,.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x&=\int 1\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{9}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}+\frac{28}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}=\\
&=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C\,.
\end{aligned}$$

Příklad 3.11. *Vypočítejte* $\int\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Rozložíme si polynom ve jmenovateli. Jedním z kořenů je 1, proto

$$(x^3-4x^2+5x-2)/(x-1)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\,,$$

další kořeny jsou tedy 1 a 2. Hledáme tedy koeficienty, aby

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}\,.$$

Po vynásobení jmenovatelem levé strany dostáváme

$$x^2+x+1=A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2\,.$$

Dosadíme kořeny 1 a 2 a dále např. číslo 0.

$$\begin{aligned}
x=1:&\qquad 3=-B &&\Rightarrow\quad B=-3\,,\\
x=2:&\qquad 7=C\,,\\
x=0:&\qquad 1=2A-2B+C &&\Rightarrow\quad A=-6\,.
\end{aligned}$$

Pro integrál tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,\mathrm{d}x&=-6\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+7\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}=\\
&=-6\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+7\ln|x-2|+C\,.
\end{aligned}$$

Příklad 3.12. *Vypočítejte* $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3-4x^2+4x-3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve rozložíme polynom ve jmenovateli. Jeden z jeho kořenů je 3 (což zjistíme zkoušením některých celých čísel). Podělíme polynomy.

$$(x^3-4x^2+4x-3)/(x-3) = x^2-x+1\,.$$

Tento trojčlen nemá reálný kořen. Proto hledáme koeficienty A, B, C, že

$$\frac{2x^2+x-1}{x^3-4x^2+4x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,.$$

Všimněte si, že u kvadratického trojčlenu ve jmenovateli je v čitateli lineární dvojčlen, ne jen konstanta. Po vynásobení jmenovatelem zlomku na levé straně máme

$$2x^2+x-1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-3)\,.$$

Dosadíme kořen 3 a dále zvolíme např. 0 a 1.

$$\begin{aligned}
x=3: &\qquad 20 = 7A &\quad\Rightarrow\quad& A = \frac{20}{7}\,,\\
x=0: &\qquad -1 = A-3C &\quad\Rightarrow\quad& C = \frac{9}{7}\,,\\
x=1: &\qquad 2 = A-2B-2C &\quad\Rightarrow\quad& B = -\frac{6}{7}\,.
\end{aligned}$$

Zvlášť vypočítáme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} = \left|\begin{matrix} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) & \mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{3}} & \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + C_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C_1\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{7}\int \frac{2x-3}{x^2-x+1} &= -\frac{3}{7}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{7}\int \frac{2}{x^2-x+1} =\\
&= -\frac{3}{7}\ln|x^2-x+1| + \frac{4\sqrt{3}}{7}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C_2\,.
\end{aligned}$$

Výsledek tedy je

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+x-1}{x^3-4x^2+4x-3}\,\mathrm{d}x &= \frac{20}{7}\int \frac{1}{x-3} - \frac{3}{7}\int \frac{2x-3}{x^2-x+1} =\\
&= \frac{20}{7}\ln|x-3| - \frac{3}{7}\ln|x^2-x+1| + \frac{4\sqrt{3}}{7}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C\,.
\end{aligned}$$

Příklad 3.13. *Vypočítejte* $\int \frac{x^2-x+3}{(x+2)(x^2+2x+4)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Hledáme konstanty A, B, C, aby

$$\frac{x^2-x+3}{(x+2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\,.$$

Dostáváme

$$x^2-x+3 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x+2)\,.$$

Za x zvolíme kořen -2, dále 0 a 1.

$$\begin{aligned}
x=-2: &\qquad 9=4A &\qquad \Rightarrow \quad A &= \frac{9}{4}\,,\\
x=0: &\qquad 3=4A+2C &\qquad \Rightarrow \quad C &= -3\,,\\
x=1: &\qquad 3=7A+3B+3C &\qquad \Rightarrow \quad B &= -\frac{5}{4}\,.
\end{aligned}$$

Integrál z $\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$ si vypočítáme zvlášť.

$$\int \frac{-\frac{5}{4}x-3}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{8}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x - \frac{7}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4}\,.$$

Druhý integrál je

$$\begin{aligned}
-\frac{7}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4} &= -\frac{7}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+3} = -\frac{7}{12}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\right]^2+1} =\\
&= \left| \begin{matrix} t=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1) & \mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{3}} & \mathrm{d}x=\sqrt{3}\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = -\frac{7\sqrt{3}}{12}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =\\
&= -\frac{7\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg} t + C_1 = -\frac{7\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\right] + C_1\,.
\end{aligned}$$

$$\int \frac{-\frac{5}{4}x-3}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{8}\ln|x^2+2x+4| - \frac{7\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\right] + C_2\,.$$

Výsledek je

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-x+3}{(x+2)(x^2+2x+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\ln|x+2| - \frac{5}{8}\ln|x^2+2x+4| -&\\
-\frac{7\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\right] + C&
\end{aligned}$$

3.4 Literatura

Pro další studium doporučujeme např. [8], pro procvičení na příkladech např. [10, 4, 23].

3.5 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 3.14. *Vypočtěte následující integrály*

a) $\int \frac{1}{(x+4)^2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{2}{5x+8}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{x+3}{x^2-3x+12}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{3x+4}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{x^3+3x^2+4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$,

f) $\int \frac{x^3+x^2-3x+2}{x^3+x^2-4x-4}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+5x+4}\,\mathrm{d}x$,

h) $\int \frac{x^2-3x+2}{(x+2)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x$,

i) $\int \frac{x^3+2x^2+x-4}{x^4+5x^2+6}\,\mathrm{d}x$.

4 Eulerovy substituce

4.1 Teorie

V této sekci se zaměříme na integrál obsahující odmocninu z trojčlenu $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Jeho elegantním řešením jsou tzv. Eulerovy substituce, které jej převádí na integrál z racionální funkce.

I. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + y, \quad \text{pro } a > 0,$

II. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xy \pm \sqrt{c}, \quad \text{pro } c > 0,$

III. $y = \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}, \quad$ pro $x_1 < x_2$, kde x_1 a x_2 jsou dva reálné kořeny trojčlenu ax^2+bx+c. Platí jen pro ta x, pro která je y definováno.

4.2 Příklady

Příklad 4.1. *Vypočtěte* $\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Příklad můžeme řešit metodou I. i II., pro názornost si ukážeme obě metody.

Metoda I.: Zvolíme substituci $\sqrt{1+x+x^2} = x + y$ (vybrali jsme si kladné znaménko). Postupně dostáváme

$$1+x+x^2 = x^2+2xy+y^2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{y^2-1}{1-2y}\,,$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2y(1-2y)+2(y^2-1)}{(1-2y)^2}\,\mathrm{d}y = -2\frac{y^2-y+1}{(1-2y)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Odsud je integrál roven

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{\frac{y^2-1}{1-2y}+y}\,\frac{y^2-y+1}{(1-2y)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{1-2y}\,\mathrm{d}y =$$

$$= -\int \frac{1}{y-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{matrix} t = y-\frac{1}{2} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{matrix} \right| = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln|t| + C =$$

$$= -\ln\left|y-\frac{1}{2}\right| + C = -\ln\left|\sqrt{1+x+x^2}-x-\frac{1}{2}\right| + C\,.$$

Metoda II.: Zvolíme substituci $\sqrt{1+x+x^2} = xy+1$. Dostáváme

$$1+x+x^2 = x^2y^2+2xy+1 \quad\Rightarrow\quad x(1+x) = x(xy^2+2y)\,,$$

Po vydělení x

$$1+x = xy^2+2y \quad\Rightarrow\quad 1-2y = x(y^2-1) \quad\Rightarrow\quad x = \frac{1-2y}{y^2-1}\,,$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2(y^2-1)-2y(1-2y)}{(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y = 2\frac{y^2-y+1}{(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrál je roven

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{1-2y}{y^2-1}y+1}\,\frac{2(y^2-y+1)}{(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int \frac{y^2-y+1}{(-y^2+y-1)(y^2-1)}\,\mathrm{d}y = -2\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}y\,.$$

Najdeme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}\,,$$

$$1 = A(y+1) + B(y-1) = (A+B)y + A - B$$

$$A = -B\,,\quad 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -B = \frac{1}{2}\,.$$

Pro integrál tedy dostáváme

$$-2\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y - \int \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y = \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1+x}{\sqrt{1+x+x^2}-1-x}\right| + C\,.$$

Můžeme snadno ověřit, že

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1+x}{\sqrt{1+x+x^2}-1-x} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}-x-\frac{1}{2}}\,,$$

vzhledem k vlastnostem logaritmu jsme oběma způsoby tedy došli k (až na konstantu) stejnému výsledku.

Příklad 4.2. *Vypočtěte* $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použijeme metodu II., konkrétně substituci $\sqrt{1-2x-x^2} = xy-1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} 1-2x-x^2 &= (xy-1)^2 &\quad\Rightarrow\quad& 1-2x-x^2 = x^2y^2-2xy+1\,,\\ -2x-x^2 &= x^2y^2-2xy &\quad\Rightarrow\quad& -2-x = xy^2-2y\,,\\ xy^2+x &= 2y-2 &\quad\Rightarrow\quad& x = 2\frac{y-1}{y^2+1}\,. \end{aligned}$$

Pro diferenciál dostáváme

$$\mathrm{d}x = 2\frac{y^2+1-2y(y-1)}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = -2\frac{y^2-2y-1}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrál je roven

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{1+\frac{2(y-1)}{y^2+1}y-1}\,\frac{y^2-2y-1}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int \frac{-y^2+2y+1}{(y-1)y(y^2+1)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Určíme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{Ay+B}{y^2+1}+\frac{C}{y-1}+\frac{D}{y}=\frac{-y^2+2y+1}{(y-1)y(y^2+1)}\,,$$

$$(Ay+B)(y-1)y+Cy(y^2+1)+D(y-1)(y^2+1)=-y^2+2y+1\,,$$

Dosazením konkrétních čísel získáme

$$\begin{aligned}
y=0:&\qquad -D=1 \quad\Rightarrow\quad D=-1\,,\\
y=1:&\qquad 2C=2 \quad\Rightarrow\quad C=1\,,\\
y=i:&\qquad (Ai+B)(-1-i)=2+2i \quad\Rightarrow\quad B=-2, A=0\,.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\int\frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y+\int\frac{\mathrm{d}y}{y-1}-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\\
&=\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|-2\mathrm{arctg}\,y+C=\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|\\
&\qquad -2\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right)+C\,.
\end{aligned}$$

Příklad 4.3. *Vypočtěte* $\int\frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Pro výpočet zvolíme metodu III. Kořeny trojčlenu pod odmocninou jsou $x_1=-1$, $x_2=1$. Proto zvolíme substituci $y=\sqrt{-\frac{x-1}{x+1}}$. Odsud

$$\begin{aligned}
y^2(x+1)=1-x \qquad&\Rightarrow\qquad x(y^2+1)=1-y^2\,,\\
x=\frac{1-y^2}{1+y^2}&
\end{aligned}$$

Odsud pro diferenciál máme

$$\mathrm{d}x=\frac{-2y(1+y^2)-2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y=\frac{-4y}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Hledaný integrál tedy je

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\frac{1-y^2}{1+y^2}}{\left[1-\frac{(1-y^2)^3}{(1+y^2)^3}\right]\sqrt{1-\frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2}}}\,\frac{(-4)y}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y=\\
=&\int\frac{(-4)y(1-y^2)(1+y^2)}{(y^6+3y^4+3y^2+1+y^6-3y^4+3y^2-1)\sqrt{y^4+2y^2+1-y^4+2y^2-1}}\,\mathrm{d}y=\\
&\qquad=\int\frac{(y^2-1)(y^2+1)}{y^2(y^4+3)}\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Nyní musíme rozložit výraz $y^4 + 3$ na součin dvou kvadratických trojčlenů. To uděláme tak, že najdeme komplexní kořeny tohoto výrazu (vizte sekci 1 a proveďte výpočet detailně), dostáváme

$$y^4+3 = \left[y - \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1+i)\right]\left[y - \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1-i)\right]\left[y + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1+i)\right]\left[y + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1-i)\right].$$

Roznásobením dvojic komplexně sdružených členů dostáváme

$$y^4 + 3 = (y^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3})(y^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}).$$

Opět musíme zlomek pod integrálem převést na součet parciálních zlomků.

$$\begin{aligned}\frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} + \frac{Cy + D}{y^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}} + \frac{Ey + F}{y^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}} &= \\ &= \frac{(y^2-1)(y^2+1)}{y^2(y^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3})(y^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3})}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}A(y^4+3) + By(y^4+3) + (Cy+D)y^2(y^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}) &+ \\ + (Ey+F)y^2(y^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}) &= (y^2-1)(y^2+1).\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin y dostáváme rovnice

$$\begin{aligned}
y^5:&\quad B + C + E = 0\,,\\
y^4:&\quad A + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}C + D - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}E + F = 1\,,\\
y^3:&\quad \sqrt{3}C + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}D + \sqrt{3}E - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}F = 0\,,\\
y^2:&\quad \sqrt{3}D + \sqrt{3}F = 0\,,\\
y^1:&\quad 3B = 0\,,\\
y^0:&\quad 3A = -1\,.
\end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic je

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = -E = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}, \quad D = F = 0\,.$$

Integrál vede tedy na

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}} - \\
-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}} &= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\int \frac{(2y - \sqrt{2}\sqrt[4]{3})\,\mathrm{d}y}{y^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}} + \\
+\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\int &\frac{(2y + \sqrt{2}\sqrt[4]{3})\,\mathrm{d}y}{y^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}} + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{3}y + \sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Vypočteme si zvlášť integrál

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}y+\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y-\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y-1\right)^2+1} = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y-1 & \mathrm{d}y = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\mathrm{d}y & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y-1\right)+C\,.$$

Obdobně dostáváme

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}y+\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y+\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y+1\right)^2+1} = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y+1 & \mathrm{d}y = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\mathrm{d}y & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y+1\right)+C\,.$$

Výsledný integrál je tedy

$$\int \frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3y} + \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\ln\left|\frac{y^2-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}y+\sqrt{3}}{y^2+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}y+\sqrt{3}}\right| +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}y+1\right)\right]+C\,,$$

kde $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

4.3 Literatura

Další příklady lze nalézt např. v [10] nebo [4].

4.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 4.4. *Vypočtěte následující integrály*

a) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$, *d)* $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

5 Určitý (Riemannův) integrál

5.1 Supremum a infimum

Dříve než zadefinujeme určitý integrál, představíme pojmy suprema a infima, které jsou zobecněním pojmů maximum a minimum množiny.

Definice 5.1. Řekneme, že číslo G je *supremem* (=nejmenší horní hranicí) množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

1. $x \leq G \ \forall x \in M$,
2. $\forall \tilde{G} < G \ \exists x_{\tilde{G}} \in M$, že $x_{\tilde{G}} > \tilde{G}$.

Obdobně je definováno *infimum* (=největší dolní hranice) množiny M.
Supremem (infimem) funkce f na množině M nazveme supremum (infimum) množiny $f(M)$.

Supremum můžeme chápat jako nejnižší horní hranici množiny; zobrazíme-li množinu na svislou reálnou osu a necháme-li z $+\infty$ padat zarážku, nematematicky řečeno bude supremum bodem, ve kterém se pád zarážky zastaví. Obdobně infimum je největší horní hranice. Narozdíl od maxima a minima vždy v $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existují. Jako cvičení si čtenář může napsat definici infima množiny, které v předchozí definici není detailně uvedeno.

Příklad 5.2. *Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin, pokud existují.*

a) $M = \{1, 2, 3\}$,

b) $M = (-1, 1)$,

c) $M = [1, 2)$,

d) $M = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$,

e) $M = \left\{n + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$,

Řešení:

a) Množina je dána výčtem svých tří prvků. Víme, že $1 < 2 < 3$. Maximum je tedy 3, minimum 1. Supremum je 3, neboť $\forall x \in M : x \leq 3$ a žádné číslo menší než 3 není větší než všechny prvky této množiny. Obdobně infimum je 1.

b) Pro každý prvek množiny M ostře menší než 1 existuje některé číslo, které je větší než tento prvek. Proto $\max M \geq 1$ a $\sup M \geq 1$. Zároveň ale 1 ani libovolné vyšší číslo nepatří do dané množiny. Maximum tedy neexistuje. Oproti tomu supremum ano; supremem je číslo 1, protože $\forall x \in M : x \leq 1$ a $\forall \tilde{G} < 1 \ \exists x_{\tilde{G}} \in M$ (například $x_{\tilde{G}} = \frac{1+\tilde{G}}{2}$), že $x_{\tilde{G}} > \tilde{G}$. Obdobně minimum neexistuje a infimum je -1.

c) Obdobně jako v předchozím příkladě maximum neexistuje. Supremum je 2, neboť $x \leq 2\ \forall x \in M$ a $\forall \tilde{G} < 2\ \exists x_{\tilde{G}} = \frac{2+\tilde{G}}{2} \in M$, že $x_{\tilde{G}} > \tilde{G}$. Minimum nyní existuje a je rovno 1 (protože 1 patří do množiny M), infimum je také 1.

d) Posloupnost $\frac{1}{n}$ je klesající, jejím maximem bude první člen, tj. 1. To je zároveň i supremem, protože všechny prvky posloupnosti jsou menší nebo rovny 1 a zároveň při volbě $\tilde{G} < 1$ by existoval prvek množiny M (konkrétně 1), který je větší než než $\tilde{G}$. Limita posloupnosti je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Infimem M je 0, protože $x \geq 0\ \forall x \in M$ a $\forall \tilde{G} > 0\ \exists x_{\tilde{G}} \in M$, že $x_{\tilde{G}} < \tilde{G}$. To plyne z toho, že limita je 0. Minimum neexistuje.

e) Nejdříve si uvědomíme, že

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq 1\,.$$

Proto $\lim_{n\to\infty} n + \frac{(-1)^n}{n} = \infty$. Proto maximum neexistuje a $\sup M = \infty$. Zároveň také $n + \frac{(-1)^n}{n} \geq 0$ a snadno ověříme, že první člen této posloupnosti je 0. Minimum a infimum tedy je 0.

5.2 Určitý integrál

V předchozí podsekci zavedených pojmů suprema a infima využijeme k definici určitého integrálu.

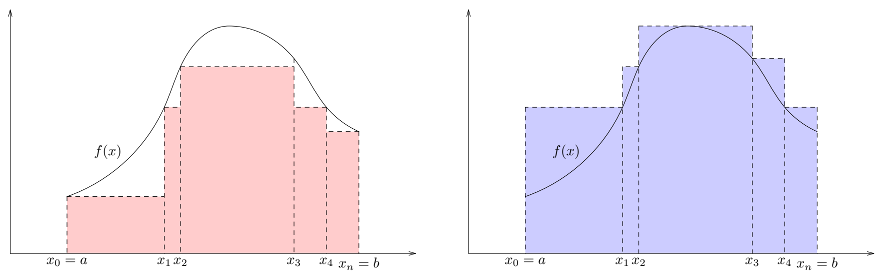
Definice 5.3. Mějme funkci f na intervalu $[a, b]$. Tento interval rozdělíme body $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Definujeme

$$m_i = \inf{}_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad M_i = \sup{}_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Potom číslo $s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ nazýváme *dolním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícímu danému dělení D. Číslo $S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ nazýváme *horním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícímu danému dělení D. Jestliže je supremum dolních součtů funkce f na intervalu $[a, b]$ rovno infimu horních součtů, pak jejich společnou hodnotu nazýváme *určitým (Riemannovým) integrálem* funkce f na intervalu $[a, b]$ a značíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Na Obr. 6 je znázorněn dolní Riemannův součet (růžově) a horní Riemannův součet (světle modře) pro dané dělení D a danou funkci f. Pokud se oba součty k sobě blíží, zjemňujeme-li dělení intervalu, a rovnají se v limitě „nekonečně jemného dělení“, označíme tuto hodnotu za určitý integrál z funkce f.

Nyní si uvedeme několik vět o určitém integrálu.



(a) Dolní Riemannův součet (b) Horní Riemannův součet

Obrázek 6: Horní a dolní Riemannův součet pro konkrétní dělení D.

Definice 5.4. Pro $a, b \in \mathbb{R}, b < a$ definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0\,.$$

Definice 5.5. Integrálem komplexní funkce f na intervalu $[a, b]$ rozumíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud integrály napravo existují.

Definice 5.6. Platí

1. $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
   pokud integrály napravo existují a α a β jsou konstanty.

2. $$\int_a^b C\,\mathrm{d}x = C(b-a)\,,$$
   kde C je konstanta

3. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
   pokud integrál přes největší z intervalů existuje.

Věta 5.7. Existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak pro každé c mezi a a b je funkce

$$F_c(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

spojitá na $[a, b]$. Je-li f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, pak je $F_c'(x_0) = f(x_0)$. Je-li f spojitá na $[a, b]$, pak je F_c primitivní k f na $[a, b]$.

Věta 5.8. *(Newtonova-Leibnizova formule)*
Je-li f spojitá na $[a, b]$ a F je k ní na $[a, b]$ primitivní, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b\,.$$

Tento vzorec platí i pro $b \le a$, je-li f spojitá a F k ní primitivní na $[b, a]$.

Newtonova-Leibnizova formule nám říká, jak určitý integrál vypočíst. Vypočteme neurčitý integrál a tuto primitivní funkci vyjádříme v krajních bodech intervalu a odečteme primitivní funkci v bodě b od primitivní funkce v bodě a.

Obdobně jako u neurčitého integrálu platí věty o integraci per partes a substituci, člen, který u per partes neintegrujeme, musíme vyjádřit v krajních bodech intervalu.

Všimněte si, že integrační konstanta, kterou jsme psali u neurčitého integrálu, se v Newtonově-Leibnizově formuli odečte.

Věta 5.9. *(o integraci per partes)*
Mají-li u a v spojité derivace na $[a, b]$, pak je

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Obdobně jako v předchozí větě tato věta platí i pro $b \le a$.

Věta 5.10. *(o substituci)*
Nechť funkce φ má spojitou derivaci na $[a, b]$ a zobrazuje tento interval na interval J. Nechť funkce f je spojitá na J. Potom platí

$$\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Je-li φ navíc ryze monotónní, pak body $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ jsou koncové body intervalu J, k φ existuje na J inverzní funkce φ^{-1} a pro každé $\alpha, \beta \in J$ je

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad 5.11. *Vypočtěte* $\int_2^3 (x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Vypočteme neurčitý integrál a využijeme Newtonovy-Leibnizovy formule.

$$\int_2^3 (x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{27}{3} + 9 - \frac{8}{3} - 4 = \frac{34}{3}\,.$$

Příklad 5.12. *Vypočtěte* $\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použijeme per partes a člen, který není pod integrálem, vyjádříme v zadaných mezích.

$$\int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \sin x & v \ = x \\ u \ = -\cos x & v' = 1 \end{vmatrix} =$$
$$= [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi\,.$$

Příklad 5.13. *Vypočtěte* $\int_0^1 (x^2 - x + 2)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použijeme per partes.

$$\int_0^1 (x^2 - x + 2)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v \ = x^2 - x + 2 \\ u \ = \mathrm{e}^x & v' = 2x - 1 \end{vmatrix} = \big[(x^2 - x + 2)\,\mathrm{e}^x\big]_0^1 -$$
$$- \int_0^1 (2x-1)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v \ = 2x - 1 \\ u \ = \mathrm{e}^x & v' = 2 \end{vmatrix} = \big[(x^2 - x + 2)\,\mathrm{e}^x\big]_0^1 -$$
$$- \big[(2x-1)\,\mathrm{e}^x\big]_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \big[(x^2 - x + 2 - 2x + 1 + 2)\,\mathrm{e}^x\big]_0^1 =$$
$$= \big[(x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{e}^x\big]_0^1 = 3\mathrm{e} - 5\,.$$

Příklad 5.14. *Vypočtěte* $\int_0^1 x(4 + x^2)^3 \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Využijeme substituce $t = 4 + x^2$. Při substituci nesmíme zapomenout dosadit tři věci: funkci, diferenciál a nové meze.

$$\int_0^1 x(4 + x^2)^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (4 + x^2)^3\, 2x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \begin{vmatrix} t = 4 + x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x & t(0) = 4 \\ & \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & t(1) = 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_4^5 t^3 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_4^5 = \frac{369}{8}\,.$$

Příklad 5.15. *Vypočtěte* $\int_{-1}^1 \frac{4x+6}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_{-1}^1 \frac{4x+6}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \begin{vmatrix} t = x^2 + 3x + 5 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x + 3 & t(-1) = 3 \\ & \mathrm{d}t = (2x+3)\,\mathrm{d}x & t(1) = 9 \end{vmatrix} = 2\int_3^9 \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$
$$= 2\,[\ln|t|]_3^9 = 2(\ln 9 - \ln 3) = 2\ln\frac{9}{3} = 2\ln 3\,.$$

Příklad 5.16. *Vypočtěte* $\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\ln x| \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve se zbavíme absolutní hodnoty tím, že integraci provedeme pro dva intervaly podle znaménka logaritmu. Poté pokračujeme metodou per partes jako v obdobném příkladu u neurčitého integrálu.

$$\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\ln x| \,\mathrm{d}x = -\int_{1/\mathrm{e}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$
$$= -[x \ln x]_{1/\mathrm{e}}^{1} + [x \ln x]_{1}^{\mathrm{e}} + \int_{1/\mathrm{e}}^{1} x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x - \int_{1}^{\mathrm{e}} x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = -[x \ln x - x]_{1/\mathrm{e}}^{1} +$$
$$+ [x \ln x - x]_{1}^{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}} \ln \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{\mathrm{e}} + \mathrm{e} \ln \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}\,.$$

Příklad 5.17. *Vypočtěte* $\int_0^{\ln 2} x\,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Nejdříve vypočteme neurčitý integrál

$$\int \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = -x & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -1 \\ & \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{vmatrix} = -\int \mathrm{e}^{t} \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{t} + C = -\mathrm{e}^{-x} + C\,.$$

Nyní tento integrál využijeme; původní integrál řešíme metodou per partes.

$$\int_0^{\ln 2} x\,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^{-x} & v = x \\ u = -\mathrm{e}^{-x} & v' = 1 \end{vmatrix} = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} (-\mathrm{e}^{-x}) \,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} =$$
$$= -\ln 2\,\mathrm{e}^{-\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2} + 1 = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)\,.$$

Příklad 5.18. *Vypočtěte* $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použijeme substituci.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \arcsin \sqrt{x} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)x}} & t(0) = 0 \\ & 2\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{(1-x)x}} \,\mathrm{d}x & t(1) = \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Příklad 5.19. *Vypočtěte* $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1 + 3x^8} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použijeme substituci. Můžeme substituovat za vnitřek odmocniny a následně použít druhou substituci. Derivace polynomu pod odmocninou je výraz úměrný x^7, zbylý člen x^8 můžeme lehce nahradit substituovanou proměnnou.

Případně můžeme rovnou substituovat za celou odmocninu.

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = 1+3x^8 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 24x^7 & t(0)=1 \\ x^8 = \frac{t-1}{3} & \mathrm{d}t = 24x^7\,\mathrm{d}x & t(1)=4 \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{24}\frac{t-1}{3}t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u = t^{\frac{1}{2}} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u & u(1)=1 \\ t = u^2 & \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & u(4)=2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{72}\int_1^2 (u^2-1)2u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{36}\int_1^2 (u^4-u^2)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{36}\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{36}\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{29}{270}\,.$$

5.3 Literatura

Teorii naleznete např. v Kopáčkových učebnicích [8, 10], dostatek dalších příkladů je v referencích [10, 4, 23]. Použití určitého integrálu ve fyzice a geometrii je věnován studijní text k předmětu Doplňková matematika 2 [15].

5.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 5.20. *Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin, pokud existují.*

a) $\left\{\frac{1}{2}, -2, 3, \frac{7}{2}\right\}$,

b) $(0, 4]$,

c) $\left(-\frac{1}{2}, 0.4\right)$,

d) $\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$,

e) $\{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 5.21. *Vypočtěte.*

a) $\int_{-27}^{8} x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,\mathrm{d}x$,

c) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int_0^1 x(3-x^2)^{14}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 5.22. *Jakou práci je třeba vykonat, abychom těleso o hmotnosti m vyzvedli ze zemského povrchu do výše h? Hmotnost Země je M, její poloměr R a gravitační síla mezi dvěma tělesy je $\frac{\kappa m M}{r^2}$, kde r je vzdálenost jejich středů. Určete limitu této práce pro $h \to \infty$.*

Příklad 5.23. *Hustota tyče délky l závisí na vzdálenosti x od jejího levého konce podle vztahu $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-x}$. Najděte vzdálenost těžiště tyče od tohoto konce. Souřadnice těžiště je dána vzorcem*

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M} \int_0^l x\rho(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde

$$M = \int_0^l \rho(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 5.24. *Určete souřadnice těžiště polokruhu, jehož poloměr je r. Počátek souřadnic je v jeho středu.*

6 Použití integrálního počtu ve fyzice

6.1 Kinematika

Uvedeme si jednoduché použití neurčitého integrálu pro výpočet rychlosti a polohy při pohybu v prostoru. Máme zadanou zadanou rychlost a polohu v čase t_0 a zrychlení jako funkci času. Určujeme závislost rychlosti a polohy na čase; protože se jedná o vektory, musíme určit všechny tři jejich složky.

Složky rychlosti jsou

$$v_i(t) = \int a_i(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

integrační konstantu zvolíme tak, aby se složky rychlosti v čase $t = 0$ rovnaly složkám zadané počáteční rychlosti $v_i(t_0) = v_{0i}$. Obdobně určíme složky polohy

$$x_i(t) = \int v_i(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

integrační konstantu volíme s ohledem na $x_i(t_0) = x_{0i}$.

Příklad 6.1. *Rychlost jednorozměrného pohybu závisí na čase vztahem* $v = 3t - \frac{1}{t^2}$. *Určete závislost polohy na čase, znáte-li* $x(2) = 0\,\mathrm{m}$.

Řešení: Polohu určíme z výše uvedeného vztahu

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{t} + C\,.$$

Konstantu určíme z počáteční podmínky $x(2) = 0$

$$\frac{3}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2} + C = 0 \quad\Rightarrow\quad C = -\frac{13}{2}\,.$$

Závislost polohy na čase tedy je

$$x(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{t} - \frac{13}{2}\,.$$

Příklad 6.2. *Určete závislost složek rychlosti a polohy na čase při pohybu v rovině s* $a_1(t) = 1\,\mathrm{ms}^{-2}$, $a_2(t) = \frac{1\,\mathrm{ms}^{-1}}{t+1\,\mathrm{s}}$, *když v čase* $t = 0\,\mathrm{s}$ *je* $v_1(0) = 2\,\mathrm{ms}^{-1}$, $v_2(0) = 1\,\mathrm{ms}^{-1}$, $x(0) = -2\,\mathrm{m}$ *a* $y(0) = 3\,\mathrm{m}$.

Řešení: Ze vztahu pro rychlost dostaneme

$$v_1(t) = \int a_1(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C_1\,,$$

dosazením počáteční podmínky máme

$$\begin{aligned} v_1(0) = 2 \quad\Rightarrow\quad 2 = 0 + C_1 \quad &\Rightarrow C_1 = 2\,,\\ &v_1 = t + 2\,. \end{aligned}$$

Obdobně pro druhou složku

$$
\begin{aligned}
v_2(t) = \int a_2(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{dt} = \ln(t+1) + C_2\,, \\
v_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 + C_2 \quad \Rightarrow C_2 = 1\,, \\
v_1 = \ln(t+1) + 1\,.
\end{aligned}
$$

Složky polohy dostaneme integrací složek rychlosti podle času.

$$
\begin{aligned}
x(t) = \int v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int (t+2)\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + 2t + C_3\,, \\
x(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad -2 = C_3\,, \\
x(t) = \frac{t^2}{2} + 2t - 2\,.
\end{aligned}
$$

Obdobně určíme závislost y-ové souřadnice na čase. Při integraci použijeme metodu per partes

$$
\begin{aligned}
y(t) = \int v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int \ln(t+1)\,\mathrm{d}t + \int \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} f = \ln(t+1) & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{t+1} & g = t+1 \end{vmatrix} = \\
= (t+1)\ln(t+1) - \int \mathrm{d}t + \int \mathrm{d}t = (t+1)\ln(t+1) + C_4\,, \\
y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = \ln 1 + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 3\,, \\
y(t) = (t+1)\ln(t+1) + 3\,.
\end{aligned}
$$

Obdobně můžeme získat úhlovou rychlost z úhlového zrychlení a úhel z úhlové rychlosti.

6.2 Potenciál, potenciální energie

Pokud je intenzita pole K funkcí jedné proměnné a je závislá pouze na pozici objektu, je potenciál dán jako primitivní funkce k $-K$. Integrační konstantu můžeme volit libovolně (podle toho, kde zvolíme nulovou hladinu). Obdobně potenciální energie je primitivní funkcí k negativně vzaté síle $-F$. Síle, která závisí pouze na pozici objektu, říkáme *konzervativní*.

Příklad 6.3. *Určete potenciální energii odpovídající elastické síle* $F(x) = -kx$.

Řešení: Potenciální energie je

$$
E_\mathrm{p}(x) = \int -F(x)\,\mathrm{d}x = \int kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 + E_0\,.
$$

Příklad 6.4. *Určete potenciální energii odpovídající elektrostatické síle* $F_\mathrm{e}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}$.

Řešení: Potenciální energie je

$$
E_\mathrm{p}(r) = \int -F_\mathrm{e}(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + E_0\,.
$$

Příklad 6.5. *Určete potenciální energii odpovídající gravitační síle* $F_\mathrm{g}(r) = -\kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Řešení: Potenciální energie je

$$E_\mathrm{p}(r) = \int -F_\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\kappa\frac{m_1 m_2}{r} + E_0\,.$$

Jako nulovou hladinu potenciální energie můžeme vzít např. povrch Země (v tom případě dostaneme $E_0 = \kappa\frac{m_1 m_2}{R_\mathrm{Z}}$) nebo nekonečno ($E_0 = 0$).

Příklad 6.6. *Určete potenciální energii homogenního tíhového pole se silou* $F_\mathrm{G}(h) = -mg$.

Řešení: Potenciální energie je

$$E_\mathrm{p}(h) = \int -F_\mathrm{G}(x)\,\mathrm{d}x = \int mg\,\mathrm{d}h = mgh + E_0\,.$$

6.3 Určení těžiště tělesa

Budeme uvažovat tuhé těleso v homogenním tíhovém poli. Na hmotný bod v tíhovém poli působí moment síly $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_\mathrm{G}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor síly vzhledem k ose otáčení. Moment síly působící na element tělesa o hmotnosti $\mathrm{d}m$ je $\mathbf{r}\times\mathbf{g}\,\mathrm{d}m$, kde $\mathbf{g}$ je tíhové zrychlení. Celkový moment síly působící na těleso tedy bude $\mathbf{M} = \int_{(m)}\mathbf{r}\times\mathbf{g}\,\mathrm{d}m$, kde se integruje přes celou hmotnost tělesa. Účinek momentu sil se rovná momentu výslednice sil, která má působiště v těžišti $\mathbf{M} = \mathbf{r}_\mathrm{T}\times\mathbf{g}m$, kde $\mathbf{r}_\mathrm{T}$ je polohový vektor těžiště. Porovnáním obou vztahů pro momenty dostáváme pro polohu těžiště

$$\mathbf{r}_\mathrm{T} = \frac{1}{m}\int_{(m)}\mathbf{r}\,\mathrm{d}m\,,$$

pro jednotlivé složky dostáváme

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{m}\int_{(m)} x\,\mathrm{d}m\,,\quad y_\mathrm{T} = \frac{1}{m}\int_{(m)} y\,\mathrm{d}m\,,\quad z_\mathrm{T} = \frac{1}{m}\int_{(m)} z\,\mathrm{d}m\,.$$

Využijeme-li vztahu pro hustotu tělesa $m = \rho V$, tedy $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$, dostáváme

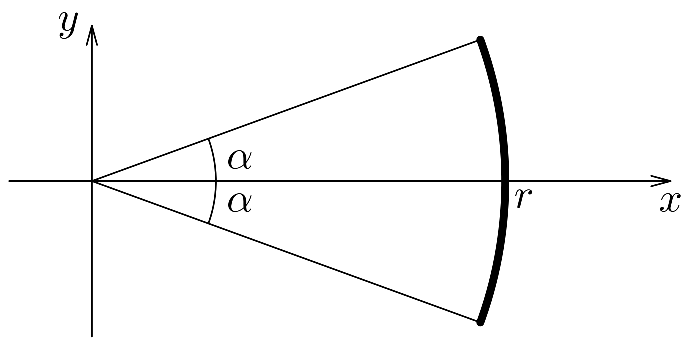
$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{\rho V}\int_{(V)} x\rho\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_{(V)} x\,\mathrm{d}V\,,\quad y_\mathrm{T} = \frac{1}{V}\int_{(V)} y\,\mathrm{d}V\,,\quad z_\mathrm{T} = \frac{1}{V}\int_{(V)} z\,\mathrm{d}V\,.$$

Obdobně pro těleso se stále stejnou výškou dostáváme

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{S}\int_{(S)} x\,\mathrm{d}S\,,\quad y_\mathrm{T} = \frac{1}{S}\int_{(S)} y\,\mathrm{d}S\,,\quad z_\mathrm{T} = \frac{1}{S}\int_{(S)} z\,\mathrm{d}S$$

a pro těleso se stejným průřezem

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{\ell}\int_{(\ell)} x\,\mathrm{d}\ell\,,\quad y_\mathrm{T} = \frac{1}{\ell}\int_{(\ell)} y\,\mathrm{d}\ell\,,\quad z_\mathrm{T} = \frac{1}{\ell}\int_{(\ell)} z\,\mathrm{d}\ell\,.$$



Obrázek 7: Drát ve tvaru kruhového oblouku

Příklad 6.7. *Stanovte polohu těžiště homogenního velmi tenkého drátu tvaru kruhového oblouku s poloměrem r a středovým úhlem 2α.*

Řešení: Zvolíme si osu x tak, aby tvořila osu symetrie oblouku (viz obr. 7). Ze symetrie vidíme $y_\mathrm{T} = z_\mathrm{T} = 0$. Délka oblouku je $\ell = 2r\alpha$, oblouk můžeme parametrizovat $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a malý element délky oblouku je $\mathrm{d}\ell = r\,\mathrm{d}\varphi$. Pro výpočet x-ové souřadnice těžiště použijeme vztah

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{\ell}\int_{(\ell)} x\,\mathrm{d}\ell = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{2\alpha r}r^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{r}{2\alpha}[\sin\varphi]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r}{\alpha}\sin\alpha\,.$$

Příklad 6.8. *Určete polohu tenké homogenní desky omezené obloukem paraboly $y^2 = 2px$ a přímkou $x = a$ (viz obr. 8).*

Řešení: Ze symetrie máme $y_\mathrm{T} = z_\mathrm{T} = 0$. Obsah desky vypočítáme tak, že ji „rozkrájíme“ na malé proužky o tloušťce $\mathrm{d}x$ a zintegrujeme. Dostáváme

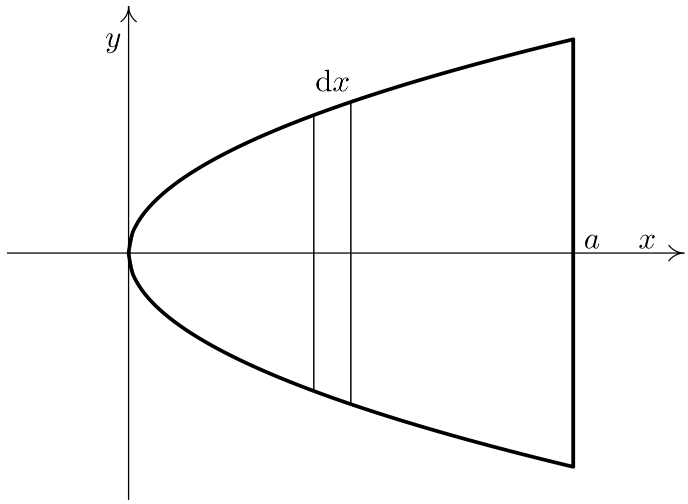
$$S = 2\int_0^a y\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2p}\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2p}\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^a = \frac{4\sqrt{2p}}{3}a^{3/2}\,.$$

x-ová souřadnice těžiště tedy je s využitím $\mathrm{d}S = 2y\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x$

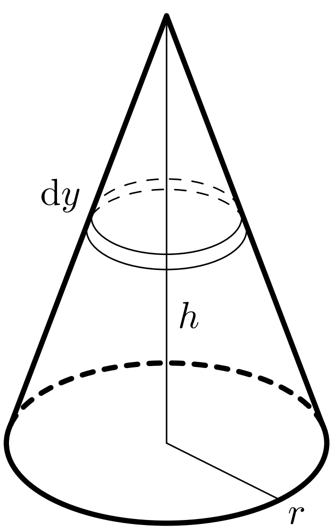
$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{S}\int_{(S)} x\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\frac{4\sqrt{2p}}{3}a^{3/2}}\int_0^a x2\sqrt{2p}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2a^{3/2}}\left[\frac{2x^{5/2}}{5}\right]_0^a = \frac{3}{5}a\,.$$

Příklad 6.9. *Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele, který má poloměr podstavy r a výšku h.*

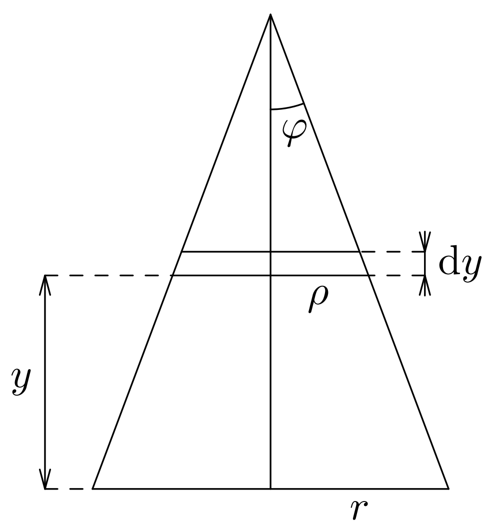
Řešení: Zvolíme si souřadnou soustavu tak, že osa y je osou kužele a počátek je ve středu jeho podstavy. Ze symetrie vidíme $x_\mathrm{T} = z_\mathrm{T} = 0$. Kužel rozřežeme



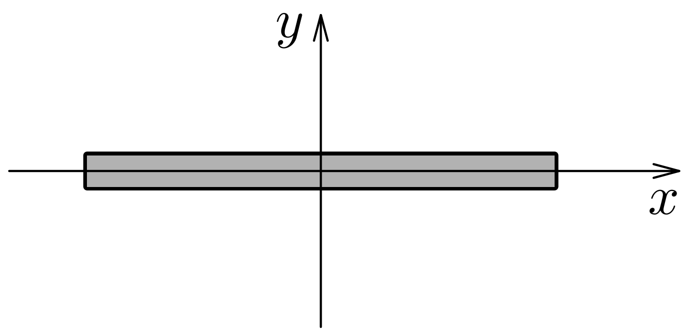
Obrázek 8: Deska tvaru paraboly



Obrázek 9: Rotační kužel



Obrázek 10: Řez kuželem



Obrázek 11: Velmi tenká tyč

na válce o výšce $\mathrm{d}y$ a poloměru ρ (viz obr. 9 a 10), dostáváme $\mathrm{d}V = \pi\rho^2\,\mathrm{d}y$. Z geometrie máme (viz průřez na obr. 10)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{h} = \frac{\rho}{h-y} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{h}(h-y) = \rho\,.$$

Objem je

$$V = \int_0^h \mathrm{d}V = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[h^2y - hy^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h\,.$$

y-ovou souřadnici těžiště určíme ze vztahu

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{V}\int_{(V)} y\,\mathrm{d}V = \frac{3}{\pi r^2 h}\int_0^h y\pi\frac{r^2}{h^2}(h-y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{3}{h^3}\int_0^h y(h-y)^2\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{3}{h^3}\left[h^2\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}hy^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{3}{h^3}\left(\frac{h^4}{2} - \frac{2}{3}h^4 + \frac{h^4}{4}\right) = \frac{h}{4}\,.$$

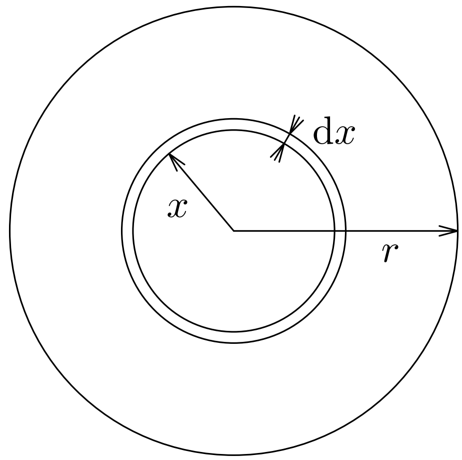
6.4 Moment setrvačnosti

Při určení momentu setrvačnosti tuhé těleso opět rozložíme na elementy o hmotnosti $\mathrm{d}m$ vzdálené r od osy otáčení. Příspěvek tohoto elementu do celkového momentu setrvačnosti je $\mathrm{d}I = r^2\,\mathrm{d}m$, dostáváme tedy vztah $I = \int_{(m)} r^2\,\mathrm{d}m$.

Příklad 6.10. *Určete moment setrvačnosti homogenní velmi tenké tyče délky ℓ a hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm tyče kolmo na tyč.*

Řešení: Určujeme moment setrvačnosti tyče na obr. 11 vzhledem k ose y. Nechť tyč má hustotu ρ a průřez S. Pak pro element hmotnosti platí $\mathrm{d}m = \rho S\,\mathrm{d}x$. Pro moment setrvačnosti máme

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2\rho S\,\mathrm{d}x = \rho S\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \rho S\left(\frac{\ell^3}{8\cdot 3} + \frac{\ell^3}{8\cdot 3}\right) = \rho S\ell\frac{\ell^2}{12} = \frac{1}{12}m\ell^2\,.$$



Obrázek 12: Řez válcem

Příklad 6.11. *Určete moment setrvačnosti homogenního rotačního válce o hmotnosti m a poloměru r vzhledem k podélné ose válce.*

Řešení: Nechť je délka válce ℓ a jeho hustota ρ. Rozřežeme válec na tenké slupky (v řezu na obr. 12). Element hmotnosti je $\mathrm{d}m = \rho 2\pi x \ell \,\mathrm{d}x$. Moment setrvačnosti podle výše uvedeného vztahu je

$$I = \int_0^r \rho 2\pi x^3 \ell \,\mathrm{d}x = 2\pi\rho\ell \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r = 2\pi\rho\ell\frac{r^4}{4} = \frac{1}{2}mr^2 .$$

Příklad 6.12. *Určete moment setrvačnosti koule poloměru r a hmotnosti m vzhledem k ose jdoucí středem.*

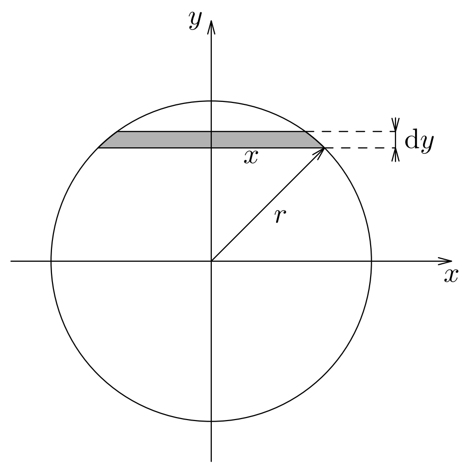
Řešení: Kouli budeme řezat na válcovité plátky o výšce $\mathrm{d}y$ a poloměru x. Element hmotnosti je $\mathrm{d}m = \rho\pi x^2 \,\mathrm{d}y$. Z Pythagorovy věty máme $x^2 + y^2 = r^2$, a tedy $\mathrm{d}m = \rho\pi(r^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$. Z výše uvedeného vztahu pro moment setrvačnosti a výsledku předchozího příkladu dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_{(m)} \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \rho\pi(r^2 - y^2)^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-r}^{r} (r^4 - 2r^2y^2 + y^4)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\rho\pi\left[r^4 y - \frac{2}{3}r^2y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-r}^{r} = \rho\pi\frac{15r^5 - 10r^5 + 3r^5}{15} = \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho r^5 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \frac{2}{5}r^2 = \frac{2}{5}mr^2 . \end{aligned}$$

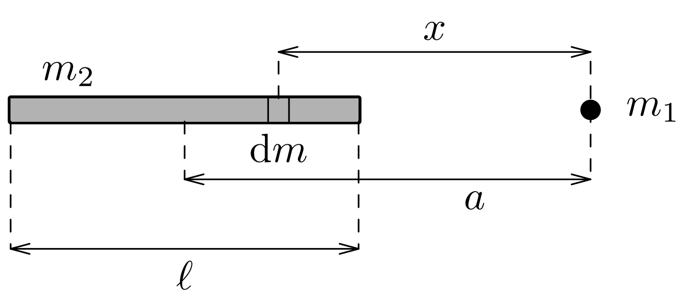
6.5 Gravitační síla mezi dvěma tělesy

Gravitační síla mezi dvěma hmotnými body (nebo dvěma koulemi) je

$$F_{\mathrm{g}} = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2} ,$$



Obrázek 13: Řez koulí



Obrázek 14: Tyč a hmotný bod

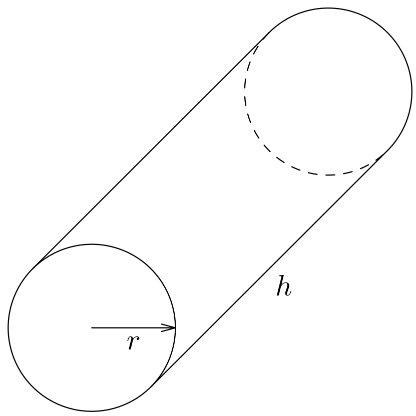
kde r je vzdálenost těchto bodů (resp. vzdálenost středů koulí), m_1 a m_2 jejich hmotnosti a κ gravitační konstanta. Tohoto vztahu využijeme a element gravitační síly mezi dvěma elementy hmotnosti tuhých těles vyjádříme jako

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{g}} = \kappa \frac{\mathrm{d}m_1 \mathrm{d}m_2}{r^2}\,, \quad F_{\mathrm{g}} = \int_{(m)} \mathrm{d}F_{\mathrm{g}}\,.$$

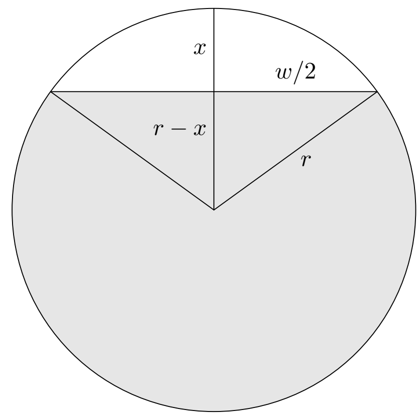
Příklad 6.13. *Určete velikost gravitační síly, kterou na sebe vzájemně působí hmotný bod o hmotnosti m_1 a homogenní tyč délky ℓ a hmotnosti m_2, jejíž hmotný střed má vzdálenost a od hmotného bodu a hmotný bod leží v prodloužení podélné osy tyče.*

Řešení: Nechť je průřez tyče S a její hustota ρ. Rozřežeme si ji na elementy $\mathrm{d}m$ dle obr. 14. Gravitační síla je podle výše uvedeného vztahu

$$F_{\mathrm{g}} = \kappa m_1 \int_{a-\ell/2}^{a+\ell/2} \frac{\rho S\,\mathrm{d}x}{x^2} = \kappa m_1 \rho S \left[-\frac{1}{x}\right]_{a-\ell/2}^{a+\ell/2} = \frac{\kappa m_1 m_2}{l} \left(\frac{1}{a-\ell/2} - \frac{1}{a+\ell/2}\right)\,.$$



Obrázek 15: Válcový tank



Obrázek 16: Řez válcem

6.6 Výpočet práce

Práci určíme jako $W = \int_{(s)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$, tj. integrujeme průmět síly do trajektorie po dráze, po které je těleso přemisťováno.

Příklad 6.14. *Vypočtěte mechanickou práci, která je zapotřebí k vyčerpání vody z válcového tanku s vodou. Válec o poloměru podstavy r a výšce h má osu symetrie vodorovnou a otvor má na horním okraji (viz obr. 15).*

Řešení: Zaveďme si označení jako na obr. 16. Potom element objemu vody (tenká vrstva vody při hladině) je $\mathrm{d}V = hw\,\mathrm{d}x$, kde x je vzdálenost hladiny od otvoru. Z Pythagorovy věty vidíme, že

$$w = 2\sqrt{r^2 - (r-x)^2} = 2r\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2}\,.$$

Síla působící na element hmotnosti je rovna součinu tohoto elementu s gravitačním zrychlením, proto pro element práce dostáváme $\mathrm{d}W = gx\,\mathrm{d}m$. Práce je rovna

$$W = \int_0^{2r} g\rho hx2r\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2g\rho hr\int_0^{2r} x\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrál vypočteme pomocí substituce

$$\int_0^{2r} x\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = 1 - \frac{x}{r} & \mathrm{d}t = -\frac{1}{r}\,\mathrm{d}x \\ x = r(1-t) & \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_1^{-1} r(1-t)(-r)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -r^2\int_1^{-1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + r^2\int_1^{-1} t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Druhý integrál je nulový, protože integrujeme lichou funkci přes symetrický interval. V prvním integrálu zavedeme substituci $t = \sin u$, $\mathrm{d}t = \cos u \,\mathrm{d}u$ a dostáváme

$$-r^2 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos^2 u \,\mathrm{d}u = -r^2 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2} \,\mathrm{d}u = |v = 2u,\ \mathrm{d}v = 2\mathrm{d}u| =$$

$$= -r^2 \int_{\pi}^{-\pi} \frac{1}{4}\mathrm{d}v - r^2 \int \pi^{-\pi} \frac{1}{4} \cos v \,\mathrm{d}v = -\frac{r^2}{4} \left[v + \sin v\right]_{\pi}^{-\pi} = \frac{1}{2}\pi r^2 \,.$$

Práce tedy je

$$W = 2ghr\frac{1}{2}\pi r^2 = mgr = -E_{\mathrm{p}} \,,$$

což je záporně vzatá potenciální energie těžiště vzhledem k otvoru.

Příklad 6.15. *Určete vztah pro práci plynu při izotermickém ději.*

Řešení: Při izotermickém ději platí $pV = c$, kde c je konstanta, z toho $p = \frac{c}{V}$. Element práce je roven $\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}s = pS\,\mathrm{d}s = p\,\mathrm{d}V$. Práce je rovna

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{c}{V} \,\mathrm{d}V = c \ln \frac{V_1}{V_0} \,,$$

kde V_0 je počáteční a V_1 konečný objem.

Příklad 6.16. *Určete vztah pro práci plynu při adiabatickém ději.*

Řešení: Pro adiabatický děj platí $pV^{\kappa} = c$, kde c a κ jsou konstanty. Obdobně jako v předchozím příkladě dostáváme

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p \,\mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_1} \frac{c}{V^{\kappa}} \,\mathrm{d}V = c \left[\frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right]_{V_0}^{V_1} = c\frac{V_1^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}}{1-\kappa} \,.$$

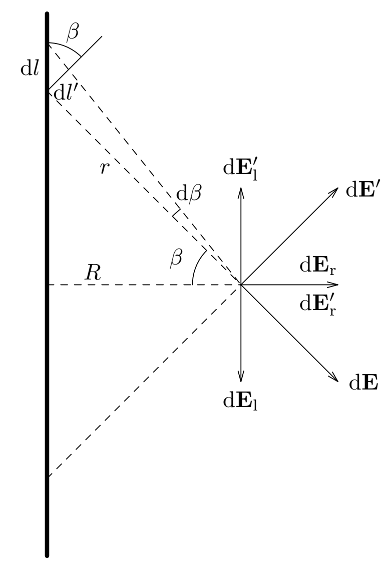
6.7 Elektrostatika

Intenzita elektrického pole je rovna součtu intenzit způsobených jednotlivými elementy náboje $\mathrm{d}\mathbf{E} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{r}_0$, kde $\mathbf{r}_0$ je jednotkový vektor ve směru od elementu náboje do bodu, ve kterém intenzitu zjišťujeme.

Příklad 6.17. *Určete intenzitu pole nabité přímky s lineární hustotou náboje τ ve vzdálenosti R od této přímky.*

Řešení: Náboj v části přímky o délce $\mathrm{d}\ell$ je z definice lineární hustoty náboje $\mathrm{d}Q = \tau \mathrm{d}\ell$. Tento náboj způsobuje v bodě vzdáleném R od přímky intenzitu $\mathrm{d}\mathbf{E}$ (viz obr. 17). Tuto intenzitu lze rozložit do dvou složek – složky rovnoběžné s přímkou $\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{l}}$ a složky kolmé k přímce $\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{r}}$. Složka $\mathbf{E}_{\mathrm{l}}$ se vyruší s příspěvkem opačné části přímky $\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{l}}'$, zatímco $\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{r}}$ se sečte se stejně velkou složkou $\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{r}}'$. Velikost kolmé složky je

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{r}} = \mathrm{d}E \cos\beta = \frac{\tau \mathrm{d}\ell \cos\beta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,.$$



Obrázek 17: Pole nabité přímky

Z geometrie vidíme $\mathrm{d}\ell' = \mathrm{d}\ell \cos\beta = r\,\mathrm{d}\beta$, z tohoto vztahu dosadíme do předchozí rovnice za $\mathrm{d}\ell\cos\beta$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{r}} = \frac{\tau\,\mathrm{d}\beta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau\,\mathrm{d}\beta\cos\beta}{4\pi\varepsilon_0 R}\,,$$

neboť $R = r\cos\beta$. Velikost celkové intenzity tedy je

$$E = E_{\mathrm{r}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}[\sin\beta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

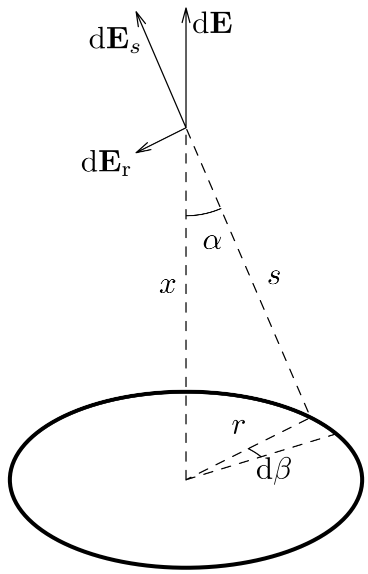
Příklad 6.18. *Určete velikost intenzity pole nabitého prstence na jeho ose. Hustota náboje je μ, poloměr prstence r a vzdálenost bodu, ve kterém intenzitu měříme, od středu prstence je x.*

Řešení: Situace je znázorněna na obr. 18. Elektrostatická síla od elementu prstence je $\mathrm{d}\mathbf{E}_s$, která se dá rozložit na složku rovnoběžnou s osou prstence $\mathrm{d}\mathbf{E}$ a složku k ní kolmou $\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{r}}$. Příspěvky $\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{r}}$ od opačných stran prstence se vyruší, takže nás zajímá pouze velikost $\mathrm{d}\mathbf{E}$. Ta je

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_s\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 s^2}\cos\alpha\,.$$

Element náboje $\mathrm{d}Q = \mu\,\mathrm{d}\ell = \mu r\,\mathrm{d}\beta$ dosadíme do vztahu výše

$$\mathrm{d}E = \frac{\mu r\,\mathrm{d}\beta}{4\pi\varepsilon_0 s^2}\cos\alpha = \frac{\mu r\,\mathrm{d}\beta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\,.$$



Obrázek 18: Pole nabitého prstence

Intenzita tedy je

$$E = \frac{\mu r}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta =$$
$$= \frac{\mu r}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}2\pi = \frac{\mu}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{x^2+r^2}}\,.$$

Příklad 6.19. *Určete intenzitu nabité roviny (plošná hustota náboje σ) ve vzdálenosti x od ní.*

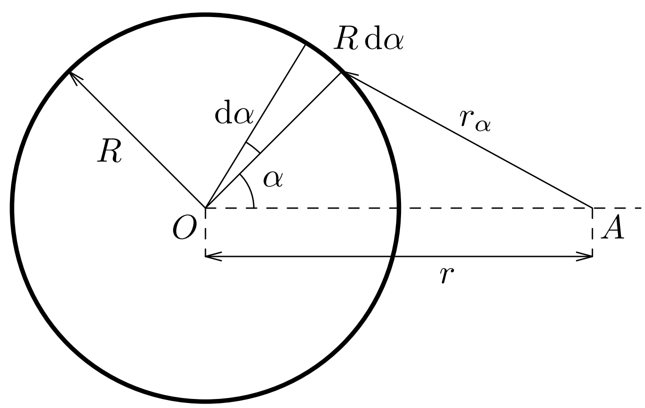
Řešení: Využijeme obrázku v předchozím příkladu. Z geometrie vidíme, že $s\,\mathrm{d}\alpha = \cos\alpha\,\mathrm{d}r$, zároveň $s = \frac{x}{\cos\alpha}$. Kombinací těchto dvou vztahů dostáváme $\mathrm{d}r = \frac{x\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha}$. Využijeme vztahu mezi lineární a plošnou hustotou $\mu = \sigma\,\mathrm{d}r$ a výsledku předchozího příkladu.

$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma\,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{x^2+r^2}}\frac{x\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Velikost intenzity tedy je

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[-\cos\alpha]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,.$$

Všimněte si, že intenzita nezávisí na vzdálenosti od roviny.



Obrázek 19: Pole nabité kulové slupky

Příklad 6.20. *Určete potenciál a intenzitu nabité kulové slupky o poloměru R ve vzdálenosti r od jejího středu.*

Řešení: Budeme uvažovat prstenec elementární šířky $R\,\mathrm{d}\alpha$ kolmý k ose OA (viz obr. 19). Tento prstenec má náboj

$$\mathrm{d}Q = \sigma(2\pi R\sin\alpha)R\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi R^2\sigma\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Z kosinové věty máme $r_\alpha^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha$, diferencováním tohoto vztahu dostáváme $2r_\alpha\,\mathrm{d}r_\alpha = 2Rr\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$. Odsud vyjádříme $\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ a dosadíme do vztahu pro element náboje

$$\mathrm{d}Q = \frac{2\pi R\sigma}{r} r_\alpha\,\mathrm{d}r_\alpha\,.$$

Element potenciálu je

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r_\alpha} = \frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}r_\alpha\,.$$

Pokud A leží vně plochy ($r \geq R$), dostáváme

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}r_\alpha = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Pokud A leží uvnitř plochy ($r < R$), dostáváme

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_{R-r}^{r+R}\mathrm{d}r_\alpha = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

V prvním případě dostáváme potenciál nabitého bodu, uvnitř kulové slupky je potenciál konstantní. Intenzitu určíme ze vztahu $\mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\mathbf{r}_0$, její velikost je tedy záporně vzatou derivací potenciálu.

$$
\begin{aligned}
r \geq R: &\qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,, \\
r < R: &\qquad E = 0
\end{aligned}
$$

Uvnitř koule je intenzita nulová, jedná se o Faradayovu klec.

6.8 Literatura

Další příklady lze nalézt např. v [10] nebo [4].

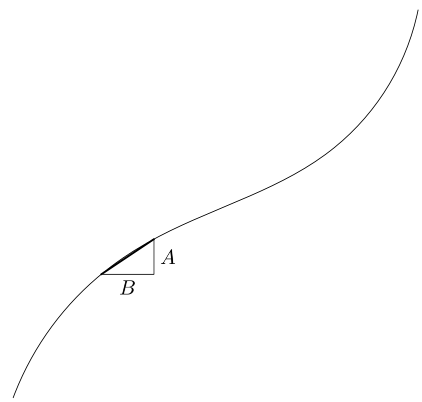
6.9 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 6.21. *Určete závislost složek rychlosti a složek polohy na čase pro pohyb v rovině s* $a_1(t) = (t+2\,\mathrm{s})\cdot 4\mathrm{ms}^{-3}$, $a_2(t) = (t^2+1\,\mathrm{s}^2)\cdot 3\mathrm{ms}^{-4}$, *počátečními hodnotami složek rychlosti* $v_1(0) = 1\,\mathrm{ms}^{-1}$, $v_2(0) = 0\,\mathrm{ms}^{-1}$ *a polohy* $x(0) = -1\,\mathrm{m}$, $y(0) = 2\,\mathrm{m}$.

Příklad 6.22. *Určete polohu těžiště tenké homogenní půlkruhové desky o poloměru* r *se středem v počátku.*

Příklad 6.23. *Určete moment setrvačnosti rotačního kužele o výšce* h *a poloměru podstavy* R *vzhledem k ose procházející osou jeho symetrie.*

Příklad 6.24. *Dokažte, že gravitační síla mezi hmotným bodem a homogenní koulí je stejná jako v případě, kdy kouli nahradíme hmotným bodem o stejné hmotnosti. (Rozdělte kouli na kulové slupky a dále postupujte obdobně jako v příkladu 6.20).*



Obrázek 20: K délce křivky

7 Geometrické aplikace určitého integrálu

7.1 Délka křivky

Křivka je zobrazení φ intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$). Množinu $\varphi([a, b])$ nazýváme geometrickým obrazem křivky. Délku křivky vypočítáme tak, že ji aproximujeme lomenými čarami a sčítáme jejich délky; zjemňujeme dělení a díváme se, zda se výsledek blíží nějakému číslu obdobně jako v definici Riemannova integrálu.

a) křivka parametricky zadaná

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad t \in [a, b]\,.$$

Předpokládáme, že f_i mají spojité derivace. Pak je délka křivky rovna

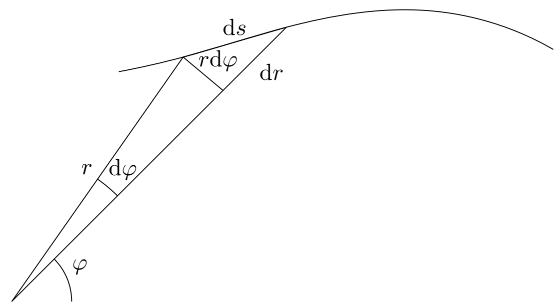
$$s = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (f_i'(t))^2}\,\mathrm{d}t\,, \quad N = 2, 3\,. \tag{5}$$

b) křivka zadaná jako graf spojitě derivovatelné funkce
Podle obr. 20 $\frac{A}{B} = f'(x)$, kde $B = \mathrm{d}x$. Potom z Pythagorovy věty $\mathrm{d}s = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Dostáváme

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{6}$$

Jiný způsob odvození je pomocí vztahu (5) s použitím $x = x$, $y = f(x)$.

Příklad 7.1. *Určete délku kružnice zadané parametricky $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.*



Obrázek 21: Křivka zadaná v polárních souřadnicích

Řešení: Určíme derivace

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\sin t\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\cos t\,.$$

S využitím vztahu (5) dostáváme

$$s = \int 0^{2\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = 2\pi r\,.$$

Příklad 7.2. *Určete délku kružnice zadané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$.*

Řešení: Horní půlkruh popíšeme rovnicí $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x = [-r, r]$, dolní půlkruh $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $x = [-r, r]$. Derivace je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,.$$

Délka křivky je (počítáme integrál přes horní polovinu a násobíme dvěma)

$$s = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left|\begin{array}{ll} x = rt & x = -r \;\Rightarrow\; t = -1 \\ \mathrm{d}x = r\mathrm{d}t & x = r \;\Rightarrow\; t = 1 \end{array}\right| = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - r^2 t}}r\,\mathrm{d}t =$$

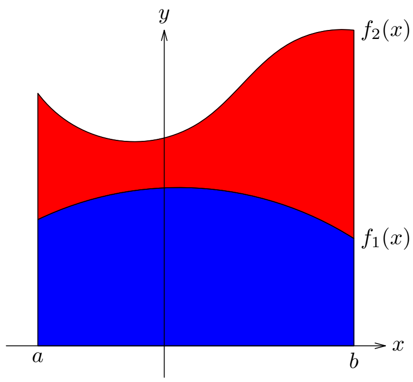
$$= 2r\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = 2r[\arcsin t]_{-1}^{1} = 2r\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi r\,.$$

c) křivka zadaná v polárních souřadnicích
Křivka je zadána vztahem $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Podle obr. 21 a Pythagorovy věty dostáváme

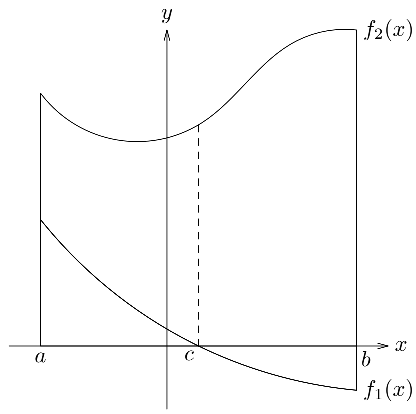
$$(\mathrm{d}s)^2 = (r\,\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}r)^2 = f(\varphi)^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + f'(\varphi)^2(\mathrm{d}\varphi)^2\,.$$

Z toho

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$
$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$



Obrázek 22: Obsah plochy mezi křivkami



Obrázek 23: Obsah plochy mezi křivkami, když f_1 nabývá záporných hodnot

Příklad 7.3. *Určete délku kružnice zadané v polárních souřadnicích $r = R$.*

Řešení: S využitím předchozího vztahu dostáváme

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi R\,.$$

7.2 Plošný obsah rovinných množin

a) Množina M je omezena grafy funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ s $f_1(x) \leq f_2(x)$ pro $x \in [a, b]$ a přímek $x = a$, $x = b$. Obsah plochy mezi křivkami (vybarvený červeně na obr. 22) je rozdílem plochy pod křivkou $f_1(x)$ (vybarvené některou z barev) a plochy pod křivkou $f_2(x)$ (vybarvené modře). Tedy

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, \mathrm{d}x\,.$$

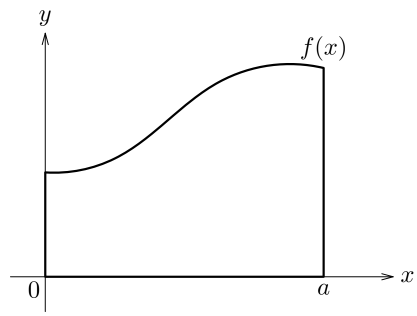
Stejný vztah platí i pro případ, kdy některá z funkcí nabývá záporných hodnot (viz obr. 23). V tomto případě dostáváme

$$S = \int_a^c (f_2(x) - f_1(x))\, \mathrm{d}x + \int_c^b f_2(x)\, \mathrm{d}x - \int_c^b f_1(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, \mathrm{d}x\,.$$

Stejný vztah bude platit i v případě, kdy záporných hodnot nabývá $f_2(x)$.

b) $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená uzavřenou křivkou danou parametricky $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $t \in [a, b]$, $f_i(a) = f_i(b)$, $i = 1, 2$.

Příklad 7.4. *Parametricky popište křivku na obrázku 24 a nalezněte vztah pro obsah plochy uzavřené touto křivkou pomocí parametrického popisu.*



Obrázek 24: Křivka zadaná parametricky

Řešení: Popíšeme postupně čtyři části křivky.

1.
$$x = f_1(t) = t\,, \quad y = f_2(t) = 0\,, \quad t \in [0, a]\,.$$

2.
$$x = f_1(t) = a\,, \quad y = f_2(t) = t - a\,, \quad t \in [a, f(a) + a]\,.$$

3.
$$x = f_1(t) = -t + f(a) + 2a\,, \quad y = f_2(t) = f(f(a) + 2a - t)\,, \quad t \in [f(a) + a, f(a) + 2a]\,.$$

4.
$$x = f_1(t) = 0\,, \quad y = f_2(t) = -t + f(a) + 2a + f(0)\,, \quad t \in [f(a) + 2a, f(a) + 2a + f(0)]\,.$$

Obsah můžeme určit ze vztahu pro obsah plochy pod křivkou:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)+2a}^{f(a)+a} y(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{f(a)+2a}^{f(a)+a} f_2(t) f_1'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_{f(a)+a}^{f(a)+2a} f_2(t) f_1'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{f(a)+2a+f(0)} f_2(t) f_1'(t)\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

neboť integrály přes části 1), 2) a 4) jsou nulové.

Předchozí vztah platí i obecně. Uvažujme uzavřenou křivku parametrizovanou parametrem t. Má-li v některém bodě parametr t hodnotu a a po obkroužení hodnotu b, lze obsah plochy uzavřené křivkou vyjádřit jako

$$S = -\int_\alpha^\beta f_1'(t) f_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad 7.5. *Určete obsah kruhu o poloměru r metodou a), tedy omezením plochy dvěma křivkami.*

Řešení: V našem případě $f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Proto

$$\begin{aligned} S &= \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi & x = -r \ \Rightarrow\ \varphi = -\pi \\ \mathrm{d}x = -r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi & x = r \ \Rightarrow\ \varphi = 0 \end{matrix} \right| = \\ &= 2\int_{-\pi}^{0} r\sqrt{1 - \cos^2\varphi}\, r(-\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2r^2 \int_{-\pi}^{0} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left| \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right| = r^2 \left([\varphi]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \right) = \pi r^2\,. \end{aligned}$$

Druhý integrál v předposledním výrazu je roven nule, protože integrujeme kosinus přes celou periodu.

Příklad 7.6. *Určete obsah kruhu o poloměru r metodou b), tedy pomocí parametrizace.*

Řešení: Kružnici, která omezuje kruh, parametrizujeme pomocí

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Pro derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = -r\sin\varphi\,.$$

Proto

$$\begin{aligned} S &= -\int_{0}^{2\pi} (-r\sin\varphi) r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = r^2 \int_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &\qquad = \frac{1}{2} r^2 \left([\varphi]_{0}^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi} \sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \right) = \pi r^2\,. \end{aligned}$$

Opět integrujeme sinus přes celou periodu, proto druhý integrál v předposledním výrazu je nulový.

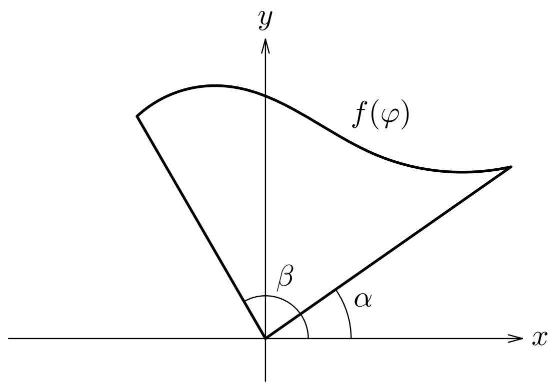
c) M je dána dvěma polopřímkami v polárních souřadnicích $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ a křivkou $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.
V tomto případě si plochu na obr. 25 rozdělíme na elementární trojúhelníky s jedním vrcholem v počátku souřadnic a dvěma vrcholy na křivce. Výška trojúhelníků je přibližně $f(\varphi)$, délka nejmenší strany je $f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. Obsah je tedy

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

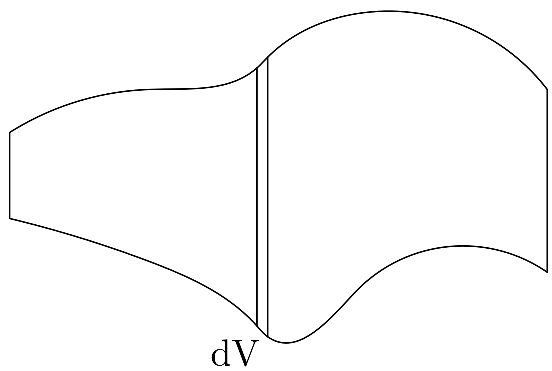
Příklad 7.7. *Určete obsah kruhu o poloměru R pomocí metody c), křivky zadané v polárních souřadnicích.*

Řešení: Zde $f(\varphi) = R$, tedy s využitím předchozího vztahu

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} R^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2} [\varphi]_{0}^{2\pi} = \pi R^2\,.$$



Obrázek 25: Obsah plochy omezené křivkou danou v polárních souřadnicích



Obrázek 26: K výpočtu objemu tělesa, bod a)

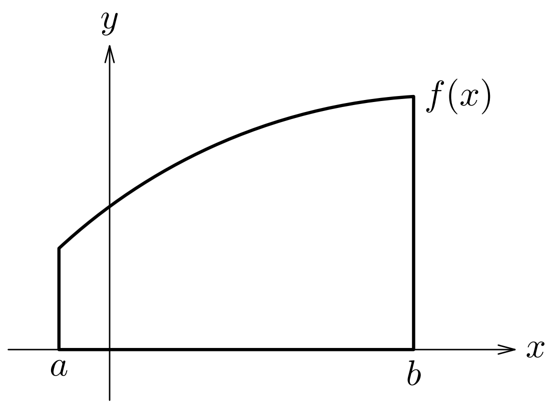
7.3 Výpočet objemů těles

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$ a $x = b$, $a < b$ a pro všechna $x \in [a, b]$ známe plošný obsah $S(x)$.
Element objemu (viz obr. 26) je $\mathrm{d}V = S(x)\,\mathrm{d}x$. Vztah pro objem tedy je

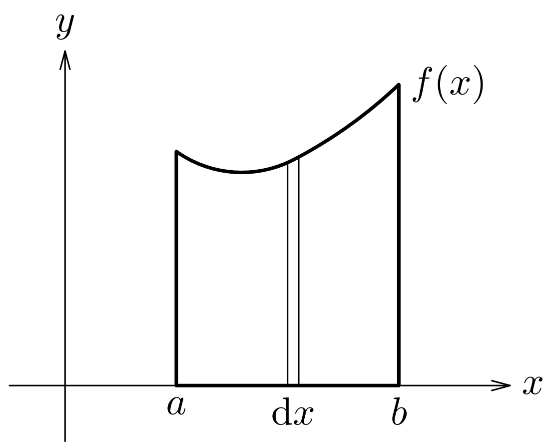
$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Těleso je tvořeno otáčením množiny M (ta leží v rovině xy) kolem osy x. Množina M je omezena přímkami $x = a$ a $x = b$, $a < b$, osou x, a grafem funkce $y = f(x)$, $0 \le f(x)$ (případně grafy funkcí f_1, f_2, kde $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$) pro $x \in [a, b]$ (viz obr. 27).
Obsah řezu je $\pi f^2(x)$, resp. $\pi(f_2^2(x) - f_1^2(x))$, integrací podle proměnné x tedy dostáváme

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{resp.} \quad \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\,\mathrm{d}x\,.$$



Obrázek 27: K výpočtu objemu tělesa, bod b)



Obrázek 28: K výpočtu objemu tělesa, bod c)

c) V tomto případě je těleso vytvořeno otáčením množiny M z bodu b) s $a \geq 0$ kolem osy y.
Těleso si rozdělíme na tenkými řezy soustřednými válci s osou symetrie y (viz obr. 28). Element objemu pak je

$$\mathrm{d}V = f(x)\,\mathrm{d}x\,2\pi x\,.$$

Integrací dostáváme

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{resp.} \quad V = 2\pi \int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 7.8. *Určete objem koule o poloměru r metodou a).*

Řešení: Objem je

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = $$
$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.$$

Příklad 7.9. *Určete objem koule o poloměru r metodou b).*

Řešení: V tomto případě je funkce f rovna $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Dostáváme

$$V = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.$$

Příklad 7.10. *Určete objem koule o poloměru r metodou c).*

Řešení: Horní polokouli popíšeme popisem v bodě c) s funkcí $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$. Výsledek musíme tedy vynásobit ještě dvěma, abychom dostali celou kouli.

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y = r^2 - x^2 & x = 0 \ \Rightarrow \ y = r \\ \mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x & x = r \ \Rightarrow \ y = 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 4\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \int_r^0 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^r y^{1/2}\mathrm{d}y = 2\pi \left[\frac{2y^{3/2}}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.$$

7.4 Výpočet povrchů rotačních ploch

Uvažujeme plochu v $\mathbb{R}^3$, která vznikne rotací okolo osy x (y) křivky zadané parametricky

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad t \in [a, b]$$

s $f_2 \geq 0$ ($f_1 \geq 0$). Potom její obsah spočteme pomocí vztahu

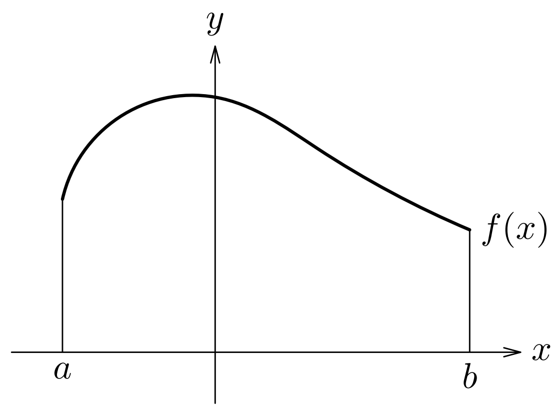
$$P = 2\pi \int_a^b f_2(t)\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}\,\mathrm{d}t \,,$$
$$\left(P = 2\pi \int_a^b f_1(t)\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}\,\mathrm{d}t \right) .$$

Vztah odvodíme tak, že si uvědomíme (viz obr. 29), že element obsahu plochy je dán jako

$$\mathrm{d}P = 2\pi y\,\mathrm{d}s = 2\pi f_2(t)\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}\,\mathrm{d}t \,.$$

Speciálně, je-li graf funkce $y = f(x)$, $0 \leq f(x)$, $x \in [a, b]$ rotovaný kolem osy x, dostáváme

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \,.$$



Obrázek 29: K odvození výpočtu povrchů rotačních ploch

Příklad 7.11. *Vypočtěte povrch jednotkové koule.*

Řešení: Zmíněnou křivku (jednotkovou polokružnici) si parametrizujeme

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in (0, \pi)\,.$$

Podle výše zmíněného vztahu je povrch koule

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = 2\pi[-\cos t]_0^{\pi} = -2\pi(-1-1) = 4\pi\,.$$

7.5 Literatura

Další příklady lze nalézt např. v [10] nebo [4].

7.6 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 7.12. *Určete délku asteroidy parametrizované $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Příklad 7.13. *Určete délku oblouku kardiody parametrizované polárními souřadnicemi $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Při výpočtu můžete použít vztahu $\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$.*

Příklad 7.14. *Odvoďte vztah pro obsah elipsy o poloosách a a b dané rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Při jednom ze způsobů výpočtu můžete použít vztah*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\,.$$

Příklad 7.15. *Odvoďte vztah pro objem a povrch kužele o poloměru podstavy R a výšce h.*

8 Základy diferenciálního počtu funkcí více proměnných

V minulém semestru a předchozích kapitolách tohoto studijního textu jsme probrali diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné. Nyní si stručně ukážeme, jak se výsledky změní, budeme-li uvažovat funkci závislou na dvou a více proměnných.

8.1 Limita a spojitost

Nejdříve si funkci více proměnných zadefinujeme.

Definice 8.1. Zobrazení $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ nazveme reálnou funkcí r reálných proměnných.

Narozdíl od funkce jedné proměnné, která jednomu reálnému číslu přiřadila jiné reálné číslo, nyní máme na vstupu r reálných čísel.

Nyní definujme pojem okolí.

Definice 8.2. Pro kladné ε nazveme *ε-ovým okolím* $U_\varepsilon(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^r$ množinu

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x, x \in \mathbb{R}^r, \rho(x, x_0) < \varepsilon\},$$

kde $\rho(\cdot,\cdot)$ je vzdálenost dvou bodů v $\mathbb{R}^r$.

Redukovaným ε-ovým okolím nazveme ε-ové okolí bodu x_0 mimo tohoto bodu, tedy množinu

$$U^*_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\}.$$

Nyní můžeme zadefinovat limitu funkce více proměnných a její spojitost.

Definice 8.3. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, která je definovaná na $U^*_\varepsilon(x_0)$. Potom f má v x_0 limitu rovnou y_0, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in U^*_\delta(x_0).$$

Definice 8.4. Mějme opět funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ definovanou na $U_\varepsilon(x_0)$. Řekneme, že je spojitá v x_0, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in U_\delta(x_0).$$

Jinými slovy, je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Limita popisuje chování funkce, když se blížíme k danému bodu. U funkcí více proměnných však existuje více způsobů, jak se k danému bodu přiblížit, než v jedné dimenzi. Můžeme se blížit např. po přímkách, po parabole, po spirále, atd. Funkce má limitu jen v tom případě, že při přiblížení libovolným způsobem dostaneme tutéž hodnotu.

Pro limity také platí, že limita součtu je součet limit, limita rozdílu rozdíl limit, limita součinu součin limit a limita podílu podíl limit (za předpokladu, že limita, kterou dělíme, je nenulová). Začneme příklady, u kterých dokážeme, že limita neexistuje. Stačí dokázat, že limita po dvou různých křivkách do daného bodu je různá, případně, že po určité křivce neexistuje.

Příklad 8.5. *Určete limitu funkce* $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ *v bodě* $(0,0)$.

Řešení: Zkusíme nejdříve limity po přímkách $y = kx$. Dostáváme

$$f(x,kx) = \frac{k^2x^4}{x^4+k^4x^4} = \frac{k^2}{1+k^4}\,.$$

Limita vzhledem ke každé z přímek je různá, proto limita této funkce neexistuje.

Příklad 8.6. *Určete limitu funkce* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *v bodě* $(0,0)$.

Řešení: Opět začneme přímkami $y = kx$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3k}{x^4+k^2x^2} = 0\,.$$

Kandidátem na limitu je tedy číslo 0. To, že je limita při blížení se po všech přímkách stejná, ale neznamená, že funkce má limitu. Zkusme se blížit po parabole.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}\,.$$

Limita tedy neexistuje.

Příklad 8.7. *Určete* $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin\frac{1}{x-y-z}$.

Řešení: V tomto případu využijeme větu, že limita součinu funkce jdoucí k nule a funkce omezené je nula. (Platí obdobně jako v jedné proměnné.) Protože $\left|\sin\frac{1}{x-y-z}\right| \le 1$ a $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x| = 0$, máme

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin\frac{1}{x-y-z} = 0\,.$$

Příklad 8.8. *Ukažte spojitost funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

v bodě $(0,0)$.

Řešení: Musíme ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ je $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. Máme

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = |x|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|}{2}\,,$$

kde jsme využili nerovnosti $|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2}$. Dále protože $|x|/2 \le \sqrt{x^2+y^2}/2 < \delta/2$, stačí zvolit $\delta = 2\varepsilon$.

8.2 Parciální derivace

Podobně jako u funkce jedné proměnné lze definovat derivaci. Derivujeme však podle určité proměnné.

Definice 8.9. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ definovanou na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_r)$. Potom parciální derivací funkce f podle i-té proměnné v bodě a nazveme limitu

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_r) - f(a)}{t}\,.$$

Parciální derivaci označujeme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nebo $\partial_{x_i} f$ nebo f_{x_i}.

Parciální derivaci tedy prakticky vypočítáme tak, že derivujeme funkci jako funkci jedné proměnné (té, podle které derivujeme) a ostatní proměnné jsou brány jako konstanty. Platí věta, že funkce, která má v $U(a)$ všechny první derivace a tyto derivace jsou omezené, je v bodě a spojitá. Dále můžeme (analogicky jako v jedné proměnné) definovat druhé a vyšší derivace. U druhé derivace máme druhé derivace podle daných proměnných (dvakrát derivujeme podle stejné proměnné) nebo smíšené derivace (kde derivujeme nejdřív podle jedné a potom podle druhé proměnné).

U velké části funkcí jsou smíšené derivace záměnné (tím je myšleno to, že derivujeme-li nejdříve podle proměnné x_i a poté podle proměnné x_j, dostaneme stejný výsledek, jako když nejdříve derivujeme podle proměnné x_j a potom podle proměnné x_i). Pozor, obecně parciální derivace podle různých proměnných nejsou záměnné. Ilustruje to následující příklad.

Příklad 8.10. *Určete druhé smíšené parciální derivace funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & |x| \geq |y| \\ 0 & |x| < |y| \end{cases}$$

v bodě $(0,0)$.

Řešení: Tato funkce se ve dvou oblastech chová jako xy a ve dvou oblastech jako 0. Pro všechna y platí $\partial_x f(0,y) = 0$ a pro všechna x platí $\partial_y f(x,0) = x$. Proto

$$\partial_y(\partial_x f)(0,0) = 0\,, \quad \partial_x(\partial_y f)(0,0) = \partial_x(x)(0,0) = 1\,.$$

Druhé parciální derivace nejsou tedy záměnné.

Příklad 8.11. *Ověřte záměnnost druhých parciálních derivací funkce* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

Řešení: Vypočítáme postupně parciální derivace podle x, podle y a poté druhé smíšené parciální derivace.

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 4x^3 - 8xy^2\,, \\ \partial_y f(x,y) &= 4y^3 - 8x^2y\,, \\ \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) &= -16xy\,. \end{aligned}$$

Příklad 8.12. *Ověřte záměnnost druhých parciálních derivací funkce* $f(x,y) = x^y$.

Řešení: Definiční obor zadané funkce je $(0,\infty)\times\mathbb{R}$. Využijeme vztahu $x^y = \mathrm{e}^{\ln(x^y)} = \mathrm{e}^{y\ln x}$.

$$\begin{aligned}\partial_x x^y &= \mathrm{e}^{y\ln x}\frac{1}{x}y\,,\\ \partial_y x^y &= \mathrm{e}^{y\ln x}\ln x\,,\\ \partial_y\partial_x x^y = \partial_x\partial_y x^y &= \mathrm{e}^{y\ln x}\ln x\frac{1}{x}y + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{y\ln x}\,.\end{aligned}$$

Příklad 8.13. *Vypočtěte všechny druhé parciální derivace funkce* $f(x,y) = \sin(x+2y^2)$.

Řešení: Derivováním postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x+2y^2)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y\cos(x+2y^2)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin(x+2y^2)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4\cos(x+2y^2) - 16y^2\sin(x+2y^2)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= -4y\sin(x+2y^2)\,.\end{aligned}$$

Příklad 8.14. *Vypočtěte všechny druhé parciální derivace funkce* $f(x,y) = x^2\ln y$.

Řešení: Nejdříve určíme definiční obor funkce. Kvůli tomu, že logaritmus je definovaný pro kladná čísla, je definiční obor funkce f množina $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Na této množině derivace jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\ln y\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^2}{y}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\ln y\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{x^2}{y^2}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{2x}{y}\,.\end{aligned}$$

8.3 Literatura

Teorii lze nalézt v Kopáčkovi [8], příklady v Kopáčkovi či Děmidovičovi [10, 4]. Více o funkcích více proměnných lze nalézt také v [17].

8.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 8.15. *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\,.$$

Využijte přitom věty, že limita omezené funkce krát funkce jdoucí k nule je nula.

Příklad 8.16. *Dokažte, že následující limita neexistuje*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}\,.$$

Příklad 8.17. *Vypočítejte všechny druhé parciální derivace*

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y^2}$,

b) $f(x,y) = x\sin y$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^2}$,

d) $f(x,y) = \cos(x^2y)$.

e) $f(x,y) = \frac{1}{xy^3+y}$.

9 Diferenciální rovnice – separace proměnných

Diferenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých se vyskytuje neznámá funkce a její derivace. Naším cílem je tuto funkci určit. K řešení těchto rovnic byly vytvořeny různé metody, jednou z nejjednodušších a nejstandardnějších je separace proměnných.

Budeme se zabývat rovnicí

$$y' = f(x)g(y)$$

na otevřené množině $\Omega = (a, b) \times (c, d)$. Lze snadno nahlédnout, že tato rovnice má triviální řešení $y(x) = y_0 = \text{konst.}$ takové, že $g(y_0) = 0$. Vyloučíme-li toto řešení, lze psát

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)g(y)\,, \\ \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= f(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Obě proměnné jsme separovali, na jednu stranu rovnice jsme dali vše s x, na druhou stranu rovnice vše s y, formálně včetně diferenciálů. Poté jsme obě strany rovnice zintegrovali. Vyřešením integrálů můžeme nalézt řešení diferenciální rovnice. Přesněji řečeno, obdržíme rovnici, ve které se vyskytuje pouze neznámá funkce a proměnná, ne však derivace neznámé funkce. Pokud máme štěstí, můžeme z ní přímo vyjádřit tuto neznámou funkci (řešení v tzv. explicitním tvaru); pokud se neznámá funkce vyskytuje v rovnici ve složitém výrazu, musíme se spokojit pouze se zmíněnou rovnicí. Pak říkáme, že řešení je v implicitním tvaru.

Lze hledat tzv. maximální řešení, tedy řešení, které je definované na maximálním možném intervalu (viz např. [11, 1]). V tomto textu budeme hledat pouze řešení lokální. Máme-li dvě různá řešení (např. triviální řešení a řešení nalezené separací proměnných), můžeme řešení „sešívat“. Pokud obě řešení mají v jednom bodu stejnou funkční hodnotu, můžeme definovat spojité řešení, které nalevo od tohoto bodu má tvar jednoho řešení a napravo druhého.

Příklad 9.1. *Najděte řešení rovnice* $y' = -y \operatorname{cotg} x$

Řešení: Triviální řešení je $y = 0$. Obecně triviální řešení určíme tak, že položíme funkci g rovnou nule. Má-li funkce g kořen y_0, je $y(x) = y_0$ triviálním řešením. Nyní najdeme ostatní řešení. Derivaci napíšeme pomocí diferenciálů.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y \operatorname{cotg} x\,.$$

Separujeme proměnné vydělením y a vynásobením $\mathrm{d}x$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rovnici integrujeme.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po integraci (vpravo použijeme substituci $t = \sin x$) dostáváme

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln C_1\,.$$

Nesmíme zapomenout na integrační konstantu, kterou jsme zapsali ve tvaru $\ln C_1$. Integrační konstantu stačí psát jen na jednu stranu rovnice, protože integrační konstanty obou integrálů dají po odečtení jinou (jednu) konstantu. Rovnici lze upravit na

$$\ln|y\sin x| = \ln C_1\,.$$

Po odlogaritmování (obě strany rovnice napíšeme jako argumenty exponenciály) dostáváme

$$y\sin x = \pm C_1\,.$$

Obecné řešení lze tedy zapsat ve tvaru (záporně vzatá konstanta je stále konstanta, následující zápis proto zahrnuje obě znaménka předchozí rovnice)

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}\,.$$

Tento tvar zahrnuje i triviální řešení.

Příklad 9.2. *Najděte řešení rovnice* $(x-1)y' + y^2 = 0$ *s počáteční podmínkou* $y(2) = -1$.

Řešení: Triviální řešení je $y = 0$. Vyloučíme-li toto řešení, můžeme upravit rovnici do tvaru

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2\,,$$

což vede po vydělení y^2, $(x-1)$, vynásobení $\mathrm{d}x$ a zintegrování k

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\,.$$

Po integraci dostáváme

$$-\frac{1}{y} = -\ln|x-1| + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\ln|x-1| - C}\,.$$

Zaměříme se na $x > 1$, což odpovídá intervalu, ve kterém je definovaná počáteční podmínka. Nyní dosadíme počáteční podmínku, z čehož zjistíme konstantu C.

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C} \quad \Rightarrow \quad C = 1\,.$$

Hledané řešení pro $x > 1$ tedy je

$$y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}\,.$$

Pro $x < 1$ dostáváme řešení

$$y(x) = \frac{1}{\ln(1-x) - C_2}$$

a nalezené řešení v pravé části můžeme sešívat v $x = 1$ s tímto řešení nebo s triviálním řešením.

Příklad 9.3. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice* $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

Řešení: Triviální řešení je $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vyloučíme-li toho řešení, můžeme psát po úpravě

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos y}{\sin y}\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Obě strany zintegrujeme (vlevo použijeme substituci za sinus, vpravo za kosinus)

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Po integrování máme

$$\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin y \cos x| = \ln C\,.$$

Tedy po odlogaritmování

$$\sin y = \pm\frac{C}{\cos x} = \frac{C_1}{\cos x}\,.$$

Využili jsme toho, že znaménka $\pm$ můžeme odstranit předefinováním konstanty. Odsud $y(x) = \arcsin\frac{C}{\cos x}$. Řešení máme na intervalech $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ tedy intervalech, na kterých je kosinus nenulový. Opět můžeme „sešívat“ tato řešení s triviálními řešeními.

Příklad 9.4. *Najděte řešení rovnice* $y' \sin x = y \cos x$.

Řešení: Triviální řešení je $y = 0$. Rovnici upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

Separujeme proměnné a integrujeme (vpravo s použitím substituce za sinus).

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x\,.$$

Dostáváme

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C\,,$$

Tedy máme

$$\ln\left|\frac{y}{\sin x}\right| = \ln C\,,$$
$$\frac{y}{\sin x} = \pm C$$

Řešením je tedy

$$y = C_1 \sin x\,.$$

Daný zápis zahrnuje i triviální řešení.

Příklad 9.5. *Najděte řešení rovnice* $x^2y' - y^2 = 1$*.*

Řešení: Triviální řešení není. Rovnice se dá přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+y^2}{x^2}\,,$$

Což po úpravě vede na

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Po integraci dostáváme

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{x} + C\,,$$

Tedy

$$y = \operatorname{tg}\left(C - \frac{1}{x}\right)\,.$$

Příklad 9.6. *Najděte řešení rovnice* $2xyy' = x + 2$*.*

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Můžeme psát

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+2}{2x}$$

Po separaci proměnných dostáváme

$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x\,,$$

po integraci pak

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x}{2} + \ln|x| + C\,,$$

Výsledek je

$$y = \pm\sqrt{x + 2\ln|x| + C}\,.$$

Příklad 9.7. *Řešte rovnici* $(xy^2 + x) + (y - x^2y)y' = 0$*.*

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Rovnice lze upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x(y^2+1)}{y(1-x^2)}\,.$$

Po separaci proměnných zintegrování obou stran dostáváme

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\,,$$

což vede při použití substituce za jmenovatele obou zlomků a vynásobení rovnice dvěma k
$$\ln|x^2-1| = \ln|y^2+1| - \ln C\,.$$
Tedy
$$\ln\left|\frac{x^2-1}{y^2+1}\right| = -\ln C$$
a obdobně jako v minulých příkladech
$$1+y^2 = C(x^2-1)\,.$$
Osamostatněním y máme
$$y = \pm\sqrt{C(x^2-1)-1}\,.$$

Příklad 9.8. *Řešte rovnici $xyy' = 1-x^2$.*

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Rovnici lze upravit na tvar
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-x^2}{xy}\,.$$
Separací proměnných dostáváme
$$\int y\,\mathrm{d}y = \int\left(\frac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x\,.$$
Integrace je jednoduchá.
$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C\,.$$
Odsud osamostatníme y.
$$y = \pm\sqrt{2\ln|x| - x^2 + C_1}\,.$$

Příklad 9.9. *Řešte rovnici $xy + (x+1)y' = 0$.*

Řešení: Triviální řešení je $y=0$. Rovnici lze upravit na
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{xy}{x+1}\,.$$
Separací proměnných dostáváme
$$\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = -\int 1\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\,,$$
integrací pak
$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C\,.$$

Tedy máme

$$\left|\frac{y}{x+1}\right| = C\mathrm{e}^{-x}$$

A obdobně jako v minulých příkladech

$$y = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Tento zápis zahrnuje i triviální řešení.

Příklad 9.10. *Řešte rovnici* $\sqrt{y^2+1} = xyy'$.

Řešení: Triviální řešení neexistuje. Rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}\,,$$

Separací proměnných dostáváme

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

což řešíme substitucí za vnitřek odmocniny nalevo a tabulkovým integrálem napravo. Dostáváme

$$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C\,.$$

Osamostatněním y pak máme

$$y = \pm\sqrt{(C+\ln|x|)^2-1}\,.$$

9.1 Literatura

Teorie je vyložena v [9], další řešené i neřešené příklady lze nalézt v [11, 1, 19, 3, 6, 29, 5, 22, 14].

9.2 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 9.11. *Řešte rovnici* $y'\operatorname{tg} x - y = a$.

Příklad 9.12. *Řešte rovnici* $y'\operatorname{cotg} x + y = 2$ *s počáteční podmínkou* $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Příklad 9.13. *Řešte rovnici* $y'\sin x\cos x - y = 0$.

Příklad 9.14. *Řešte rovnici* $(xy^2+x) + (y - x^2y)y' = 0$.

Příklad 9.15. *Řešte rovnici* $xyy' = 1 - x^2$.

10 Vícenásobný integrál

10.1 Teorie

V poslední kapitole probereme úvod do integrace ve více proměnných, zaměříme se hlavně na dvojné integrály.

U dvojného integrálu je naším cílem vypočítat integrál z funkce dvou proměnných přes plochu ohraničenou zadanými křivkami. Obdobně u trojného integrálu počítáme integrál přes určitou oblast z funkce tří proměnných. Dvojný integrál značíme $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, někdy se můžeme setkat s komplikovanějším značením pomocí dvou integrálů $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Fubiniho věta nám umožní převést integrál přes tuto podmnožinu $\mathbb{R}^2$ (u trojného integrálu $\mathbb{R}^3$) na sled dvou (tří) jednorozměrných integrací. Uvedeme si ji pro dvojný integrál, pro trojný je znění analogické.

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

V závorce v prostředním výrazu je jednorozměrný integrál přes proměnnou y z funkce závislé na x a y v mezích závislých na x, jehož výsledkem je funkce závislá na x. Tu poté integrujeme v pevných mezích přes proměnnou x a dostaneme číslo. Výraz na pravé straně předchozí rovnice je pouze jiný druh zápisu těchto dvou jednorozměrných integrací. Pořadí integrací lze také vyměnit. Nejdříve můžeme integrovat přes x a poté přes y. Pořadí integrací zvolíme podle toho, který způsob je početně jednodušší. U první proměnné jsou meze závislé na druhé proměnné, u druhé proměnné jsou meze pevné.

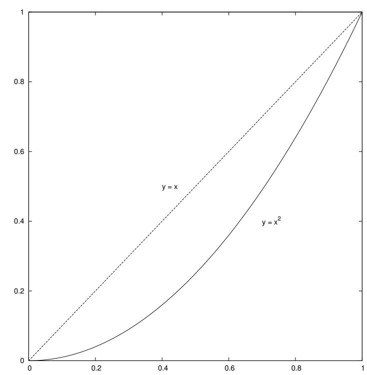
10.2 Příklady

Příklad 10.1. *Vypočtěte integrál $\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina M je ohraničena shora funkcí $y = x$ a zdola funkcí $y = x^2$.*

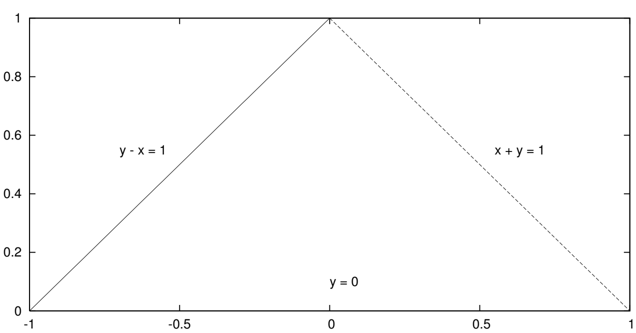
Řešení: Nejdříve musíme určit meze jednotlivých proměnných. x jde od 0 do 1 a y jde při pevném x od x^2 do x (viz obr. 30). To vidíme z toho, že když zafixujeme x a zvyšujeme y (jdeme po svislé přímce $x =$ konst.), se zvyšujícím se y nejdříve narazíme na křivku $y = x^2$ a poté na křivku $y = x$. Máme tedy meze integrálů $0 < x < 1$, $x^2 < y < x$ a můžeme vypočítat

$$\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^x y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{24}\,.$$

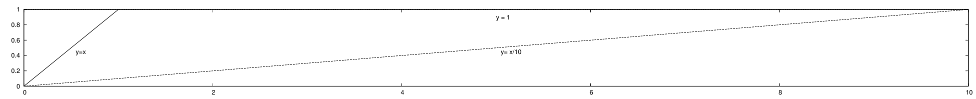
Příklad 10.2. *Vypočtěte integrál $\int_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $y = 0$, $x + y = 1$ a $y - x = 1$.*



Obrázek 30: Obrázek k příkladu 10.1



Obrázek 31: Obrázek k příkladu 10.2



Obrázek 32: Obrázek k příkladu 10.3

Řešení: Vnitřní integrál zvolíme přes x. Meze jsou například $0 < y < 1$, $y-1 < x < 1-y$. Nejdříve jsme určili meze pro y jako minimální a maximální y, kterého můžeme v rámci zadaného trojúhelníku dosáhnout. Poté jsme zafixovali y šli po vodorovné přímce $y =$ konst. směrem od menšího x k většímu. Nejdříve narazíme na přímku $x = y - 1$ a poté na $x = 1 - y$. Nyní můžeme vypočítat integrál

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{y-1}^{1-y} \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^3}{3} + y^2(1-y) - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1)\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - 2y + 4y^2 - \frac{8}{3}y^3\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}y - y^2 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{2}{3}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Samozřejmě bychom mohli provádět i integraci nejdříve přes y a poté přes x, ale v tom případě bychom museli trojúhelník rozdělit na dva svislou čarou z jeho horního vrcholu, protože horní ohraničení oblasti je dáno dvěma různými křivkami. Počítali bychom tedy dva integrály.

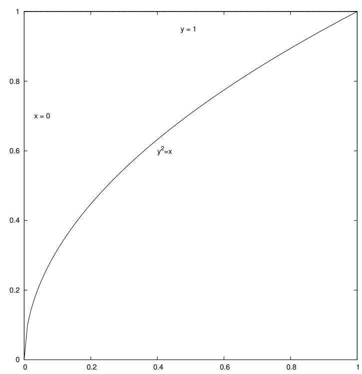
Příklad 10.3. *Vypočtěte integrál* $\int_M \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána vztahy* $0 < y < 1$, $y < x < 10y$.

Řešení: Meze integrálu máme rovnou zadané, můžeme proto přikročit k jeho výpočtu.

$$\int_0^1 \left(\int_y^{10y} \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{xy-y^2} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{y} & t(y) = 0 \\ x = \frac{t^2+y^2}{y} & \mathrm{d}x = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{y} & t(10y) = 3y \end{matrix}\right| =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{3y} \frac{2t^2}{y}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{y}\frac{(3y)^3}{3}\,\mathrm{d}y = 18\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = 18\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 6$$

Příklad 10.4. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y^2 = x$, $x = 0$ *a* $y = 1$.

Řešení: Meze jsou $0 < y < 1$, $0 < x < y^2$. Jako vnější proměnnou jsme zvolili y a určili její meze. Meze v proměnné x určíme tak, že při pevném y zvyšujeme



Obrázek 33: Obrázek k příkladu 10.4

x. Narazíme postupně na přímku $x=0$ a parabolu $x=y^2$.

$$\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} t=\frac{x}{y} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y} & t(0)=0 \\ & \mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}t & t(y^2)=y \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 y\left(\int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[y\mathrm{e}^t\right]_0^y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 y(\mathrm{e}^y-1)\,\mathrm{d}y = 1 - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,,$$

neboť následující integrál můžeme vypočítat pomocí per partes.

$$\int_0^1 y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} u'=\mathrm{e}^y & v\ =y \\ u\ =\mathrm{e}^y & v'=1 \end{vmatrix} = [y\mathrm{e}^y]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y =$$

$$= [y\mathrm{e}^y]_0^1 - [\mathrm{e}^y]_0^1 = \mathrm{e}-\mathrm{e}+1 = 1\,.$$

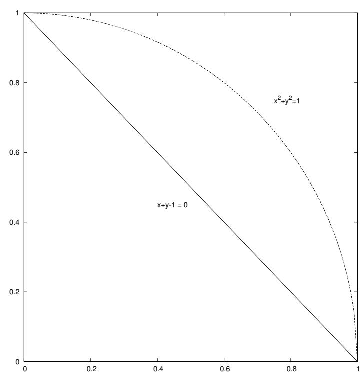
Příklad 10.5. *Vypočtěte integrál $\int_M 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $x^2+y^2=1$ a $x+y-1=0$.*

Řešení: Meze jsou $0<x<1$, $1-x<y<\sqrt{1-x^2}$. Za vnější proměnnou jsme zvolili x. Meze y jsme určili při pevném x díky tomu, že při zvyšujícím se y nejdříve narazíme na přímku $y=1-x$ a poté na křivku $y=\sqrt{1-x^2}$.

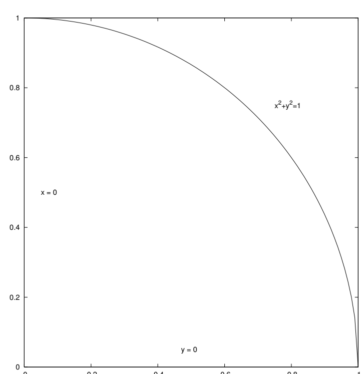
$$\int_M 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 2y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y^2\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 [1-x^2-(1-x)^2]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

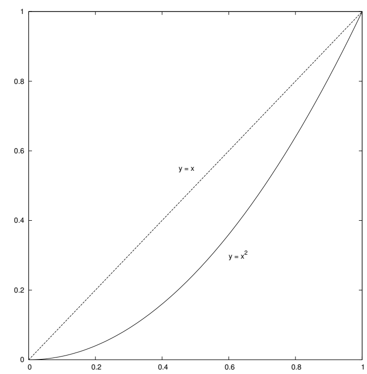
Příklad 10.6. *Vypočtěte integrál $\int_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je jednotkový čtvrtkruh v prvním kvadrantu.*



Obrázek 34: Obrázek k příkladu 10.5



Obrázek 35: Obrázek k příkladu 10.6



Obrázek 36: Obrázek k příkladu 10.8

Řešení: Rovnice jednotkové kružnice je $x^2 + y^2 = 1$. Jako vnější proměnnou zvolíme x. Při pevném x a zvyšujícím se y nejdříve narazíme na $y = 0$, poté na kružnici. Meze jsou $0 < x < 1$, $0 < y < \sqrt{1-x^2}$.

$$\int_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -2x & t(0) = 1 \\ & \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t(1) = 0 \end{matrix} \right| = \int_1^0 \left(-\frac{1}{2} \right) t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Příklad 10.7. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y = 4$ *a* $x = 1$ *a souřadnicovými osami.*

Řešení: Nyní integrujeme přes obdélník, situace je tedy jednoduchá. Meze obou proměnných jsou pevné: $0 < x < 1$, $0 < y < 4$.

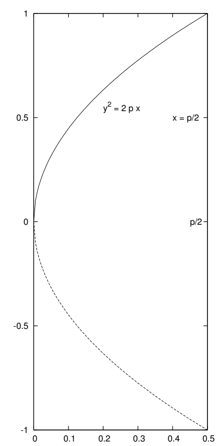
$$\int_M \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\int_0^1 \mathrm{e}^x y\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^4 y[\mathrm{e}^x]_0^1\,\mathrm{d}y = (\mathrm{e}-1)\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8(\mathrm{e}-1)\,.$$

Příklad 10.8. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y = x$ *a* $y = x^2$*.*

Řešení: Meze v proměnné x (vnější) dostaneme opět průmětem množiny M do osy x. Při zafixovaném x a rostoucím y nejdříve narazíme na parabolu $y = x^2$ a poté na přímku $y = x$. Meze jsou tedy $0 < x < 1$, $x^2 < y < x$.

$$\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{40}\,.$$



Obrázek 37: Obrázek k příkladu 10.9

Příklad 10.9. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y^2 = 2px$ *a* $x = \frac{p}{2}$*,* $p > 0$*.*

Řešení: Jako vnější proměnnou zvolíme x, její meze jsou dané průmětem M do osy x. Při pevném x a rostoucím y potkáme nejdříve křivku $y = -\sqrt{2px}$ a poté teprve křivku $y = \sqrt{2px}$. Meze jsou $0 < x < \frac{p}{2}$, $-\sqrt{2px} < y < \sqrt{2px}$.

$$\int_M xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{p}{2}} x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\frac{p}{2}} x \frac{(2px)^{\frac{3}{2}} + (2px)^{\frac{3}{2}}}{3} \,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}p^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}p^{\frac{3}{2}}}{3} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{2}{7} = \frac{p^5}{21}\,.$$

Příklad 10.10. *Vypočtěte integrál* $\int_M x^2 y \mathrm{e}^{xy} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* $M = [0,1] \times [0,2]$*.*

Řešení: Integrujeme přes obdélník, meze máme dány a jsou pro obě proměnné pevné. Nejdříve si spočítáme následující neurčitý integrál

$$\int \mathrm{e}^{xy} \,\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} t = xy & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = x \\ & \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy} + C\,.$$

Toho využijeme, abychom pomocí per partes vypočítali vnitřní integrál.

$$\int_M x^2 y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\left(\int_0^2 y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^{xy} & v = y \\ u = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy} & v' = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 x^2\left(\left[\frac{y}{x}\mathrm{e}^{xy}\right]_0^2 - \frac{1}{x}\int_0^2 \mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^2\left(\frac{2}{x}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy}\right]_0^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[(2x-1)\mathrm{e}^{2x}+1\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2' = \mathrm{e}^{2x} & v_2 = 2x-1 \\ u_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} & v_2' = 2 \end{vmatrix} = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(2x-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 + [x]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} + 1 = 2\,.$$

Příklad 10.11. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2+y^2-1 \le 0$ *a* $x+y-1 \ge 0$.

Řešení: Můžeme opět využít obrázku 34. Meze jsou obdobně jako v příkladu 10.5 $0 \le x \le 1$, $1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

$$\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{3}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x)^3\right]\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int_0^1 (-2x)(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 1-x^2 & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -2x & t(0) = 1 \\ & \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t(1) = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_1^0 t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\frac{2}{5}[t^{\frac{5}{2}}]_0^1 -$$

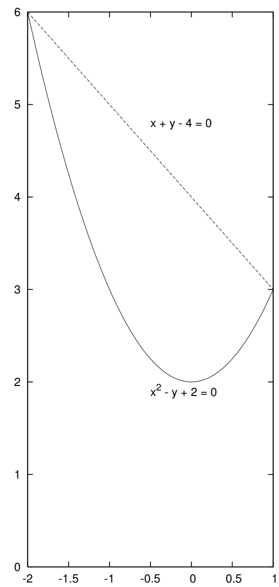
$$-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{20}$$

Příklad 10.12. *Vypočtěte integrál* $\int_M y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2-y+2=0$ *a* $x+y-4=0$.

Řešení: Nejdříve si vypočítáme průsečíky paraboly a přímky.

$$x^2-(4-x)+2 = 0\,,$$
$$(x+2)(x-1) = 0\,.$$

Průsečíky jsou tedy -2 a 1. Meze integrálu budou $-2 < x < 1$, $x^2+2 < y < 4-x$,



Obrázek 38: Obrázek k příkladu 10.12

protože při pevném x z daného intervalu je křivka $y = x^2 + 2$ níže než $y = 4 - x$.

$$\int_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2+2}^{4-x} \mathrm{d}x =$$

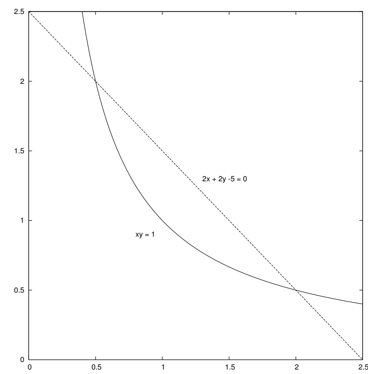
$$= \int_{-2}^{1} \frac{(4-x)^2 - (x^2+2)^2}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-2}^{1} (-x^4 - 3x^2 - 8x + 12) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x^2 + 12x \right]_{-2}^{1} = \frac{162}{5}\,.$$

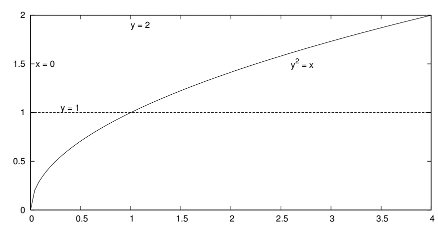
Příklad 10.13. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $xy = 1$ *a* $2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení: Nejdříve určíme průsečíky hyperboly a přímky.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0\,,$$
$$(2x-1)(x-2) = 0\,.$$



Obrázek 39: Obrázek k příkladu 10.13



Obrázek 40: Obrázek k příkladu 10.14

Meze jsou $\frac{1}{2} < x < 2$, $\frac{1}{x} < y < \frac{5}{2} - x$, protože hyperbola je níže.

$$\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2} \left[x \left(\frac{5}{2} - x \right)^2 - \frac{1}{x} \right] \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2} \left(\frac{25}{4} x - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{25}{8} x^2 - \frac{5}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} - \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{165}{128} - \ln 2\,.$$

Příklad 10.14. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x = 0$*,* $y = 1$*,* $y = 2$ *a* $y^2 = x$*.*

Řešení: Vnitřní proměnnou zvolíme x, protože výraz pod integrálem bychom přes y nezintegrovali. Při pevném y a zvyšujícím se x nejdříve narazíme na

$x = 0$ (je více vlevo). Meze jsou $1 < y < 2$, $0 < x < y^2$.

$$\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \begin{vmatrix} t = \frac{x}{y} & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} \\ & \mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} =$$

$$= \int_1^2 y \left[\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} \mathrm{d}y = \int_1^2 y(\mathrm{e}^y - 1)\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^y & v = y \\ u = \mathrm{e}^y & v' = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [y\mathrm{e}^y]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y - \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \left[y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \frac{3}{2}\,.$$

10.3 Literatura

Teorii i další příklady lze nalézt např. v [12, 20, 24].

10.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 10.15.

$\int_M (2x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je dána jako* $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$.

Příklad 10.16.

$\int_M \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničena křivkami* $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

Příklad 10.17.

$\int_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničena křivkami* $y = x^2$, $y^2 = x$.

Příklad 10.18.

$\int_M x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničena křivkami* $y = x^2 - 2x + 1$, $y = x + 1$.

11 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování

Př. 1.18: a) $5-i$,
b) $-1-7i$,
c) $9+3i$,
d) $-5-2i$,
e) $16+11i$,
f) $7+9i$.
Př. 1.19: a) $-4-5i$,
b) $2\,\mathrm{e}^{-\pi i/3}=1-\sqrt{3}i$,
c) $(2+5i)\,\mathrm{e}^{2+3i}$,
d) $\frac{(2-3i)(5+7i)}{(6-4i)(-1-2i)}$.
Př. 1.20: a) $\frac{5}{13}+\frac{i}{13}$,
b) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$,
c) $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$,
d) $\frac{2}{5}$.
Př. 1.21: a) $4(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))=4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$,
b) $2\sqrt{2}(\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4))=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}$.
Př. 1.22: a) 16,
b) i.
Př. 1.23: a) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ -\sqrt[3]{2}i$,
b) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{2}i$,
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ -i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$,
d) $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -3,\ \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.
Př. 1.24: a) $x_1=-1,\ x_2=-6$,
b) $x_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{11}}{3}i,\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{11}}{3}i$,
c) $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ x_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ x_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.
Př. 2.41: a) $\frac{x^9}{9}+C$,
b) $\frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}}+C=\frac{4}{15}x^3\sqrt[4]{x^3}+C$,
c) $\frac{1}{7}\operatorname{arctg}x+C$,
d) $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}}+C=\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+C$,
e) $\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+C$,
f) $3\,\mathrm{e}^x+C$,
g) $2x+2\cos x+C$,
h) $\frac{5^x}{2^x(\ln 5-\ln 2)}+C$.
Př. 2.42: a) $(x^2+3)\,\mathrm{e}^x+C$,
b) $\sin x-x\cos x+C$,
c) $\frac{x^{n+1}((n+1)\ln x-1)}{(n+1)^2}+C$,
d) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$,
e) $\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C$.
Př. 2.43: a) $-\frac{1}{2}\cos(x^2+2x)+C$,

b) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$,
c) $\arcsin \frac{x}{2} + C$,
d) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$,
e) $\ln(\sinh x) + C$,
f) $\frac{1}{3}\ln(x^3 + 3x^2 + 4) + C$,
g) $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C$.

Př. 2.44: a) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C$,
b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + C$,
c) $\frac{1}{3}(x^3-1)\,\mathrm{e}^{x^3} + C$,
d) $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$,
e) $2(\sqrt{x}-1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$.

Př. 2.45: a) $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\ln|1-x^2| + \frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$, per partes,
b) $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2} + C$, substituce,
c) $\frac{\mathrm{e}^x}{x+1} + C$, per partes,
d) $-\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + C$, substituce,
e) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C$, per partes,
f) $-2\,\mathrm{arg\,cotgh}\sqrt{1+\mathrm{e}^x} + C$, substituce.

Př. 3.14: a) $-\frac{1}{x+4} + C$,
b) $\frac{2}{5}\ln|5x+8| + C$,
c) $\frac{1}{2}\ln|x^2-3x+12| + 3\sqrt{\frac{3}{13}}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{39}}(2x-3)\right] + C$,
d) $\frac{3}{4}\ln|2x^2+x+1| + \frac{13}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{7}}(4x+1)\right] + C$,
e) $4\ln|x^2-2x+2| + \frac{1}{2}(x^2+10x) + 2\mathrm{arctg}\,(x-1) + C$,
f) $x + \frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{5}{3}\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$,
g) $\frac{5}{4}\ln|x^2+x+4| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{15}}(2x+1)\right] + C$,
h) $\frac{12}{x+2} + 6\ln|x+1| - 5\ln|x+2| + C$,
i) $-\frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \ln|x^2+3| - 4\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

Př. 4.4: a) $\frac{3}{2(2Z+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{|Z|^4}{|2Z+1|^3} + C$, kde $Z = x + \sqrt{x^2+x+1}$,
b) $\frac{1}{24}\left[Z^3 + \frac{1}{Z^3}\right] + \frac{1}{3}\left[Z^2 - \frac{1}{Z^2} + Z + \frac{1}{Z}\right] + \frac{1}{2}\ln|Z| + C$,
kde $Z = x - 1 + \sqrt{x^2-2x+2}$,
c) $\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| + C$,
d) $Z + \ln(x+1+Z) - \sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}Z}{x}\right| + C$, kde $Z = \sqrt{x^2+2x+2}$,
e) $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C$.

Př. 5.20: a) maximum a supremum $\frac{7}{2}$, minimum a infimum -2,
b) maximum a supremum 4, minimum neexistuje, infimum 0,
c) maximum a minimum neexistuje, supremum 0.4, infimum $-\frac{1}{2}$,
d) maximum a supremum 1, minimum a infimum -1,
e) maximum a supremum $\frac{1}{2}$, minimum neexistuje, infimum 0.

Př. 5.21: a) $\frac{3}{7}(2^7 + 3^7)$,
b) -2π,

c) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$,
d) $2 - \frac{\pi}{2}$,
e) $\frac{1}{30}(3^{15} - 2^{15})$.

Př. 5.22: práce $\frac{\kappa m M h}{R(R+h)}$, limita $\frac{\kappa m M}{R}$.

Př. 5.23: $\frac{1-\mathrm{e}^{-l}(1+l)}{1-\mathrm{e}^{-l}}$.

Př. 5.24: $x_{\mathrm{T}} = 0$, $y_{\mathrm{T}} = \frac{4r}{3\pi}$.

Př. 6.21: $v_1(t) = 2t^2 + 8t + 1$, $v_2(t) = t^3 + 3t$,
$x(t) = \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 + t - 1$, $y(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + 2$.

Př. 6.22: $x_{\mathrm{T}} = \frac{4r}{3\pi}$, $y_{\mathrm{T}} = 0$.

Př. 6.23: $I = \frac{3}{10} m R^2$.

Př. 7.12: $6a$.

Př. 7.13: $8a$.

Př. 7.14: $ab\pi$.

Př. 7.15: $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, $\pi R(R + \sqrt{R^2 + h^2})$.

Př. 8.15: 0.

Př. 8.16: Limita neexistuje, protože limita po přímkách $y = kx$ je $\frac{1-k}{1+k}$.

Př. 8.17: a) $\partial_{xx} f = \mathrm{e}^{x+y^2}$, $\partial_{yy} f = 2(1+2y^2)\mathrm{e}^{x+y^2}$, $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 2y\mathrm{e}^{x+y^2}$,
b) $\partial_{xx} f = 0$, $\partial_{yy} f = -x \sin y$, $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = \cos y$,
c) $\partial_{xx} f = \frac{3(x^4+4xy^2)}{4(x^3+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\partial_{yy} f = \frac{x^3}{(x^3+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = -\frac{3x^2 y}{2(x^3+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,
d) $\partial_{xx} f = -2y(\sin(x^2 y) + 2x^2 y \cos(x^2 y))$, $\partial_{yy} f = -x^4 \cos(x^2 y)$,
$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = -2x(\sin(x^2 y) + x^2 y \cos(x^2 y))$,
e) $\partial_{xx} f = \frac{2y^3}{(xy^2+1)^3}$, $\partial_{yy} f = \frac{12x^2y^4+6xy^2+2}{(xy^3+y)^3}$, $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = \frac{3xy^2-1}{(xy^2+1)^3}$.

Př. 9.11: $y = -a + C \sin x$.

Př. 9.12: $y = 2 - 4\cos x$.

Př. 9.13: $y = C \operatorname{tg} x$.

Př. 9.14: $y = \pm\sqrt{C(x^2-1) - 1}$.

Př. 9.15: $y = \pm\sqrt{2\ln|x| - x^2 + C_1}$.

Př. 10.15: $\frac{27}{2}$.

Př. 10.16: $\frac{1}{2}$.

Př. 10.17: $\frac{33}{140}$.

Př. 10.18: $\frac{729}{28}$.

Použitá a doporučená literatura

[1] Bárta, T. Separace proměnných. UK v Praze, Praha. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/Kapitola-SeparaceProm/separ.html

[2] Černý, R., Pokorný, M. Matematická analýza pro fyziky I. UK v Praze, Praha, 2016. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rcerny/skripta_MAF.pdf

[3] Černý, R., Pokorný, M. Matematická analýza pro fyziky II. UK v Praze, Praha, 2017. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rcerny/skripta_MAF2.pdf

[4] Děmidovič, B. P. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Havlíčkův Brod, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[5] Hekrdla, J. Obyčejné diferenciální rovnice. FEL ČVUT, 2008. Dostupné z www: http://math.feld.cvut.cz/hekrdla/Teaching/X01MA2/Prednasky/ODR.pdf

[6] Jarešová, M., Vybíral, B. Diferenciální rovnic. Studijní text FO. Dostupné z www: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difro.pdf

[7] Kneblík, R. Webová aplikace pro výuku komplexních čísel. Diplomová práce, UK v Praze, MFF, Praha, 2017. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/komplexni_cisla/

[8] Kopáček, J. Matematická analýza pro fyziky I. Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-89-8.

[9] Kopáček, J. Matematická analýza pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2003. ISBN 80-86732-10-X.

[10] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky I. Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-90-1.

[11] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2003. ISBN 80-86732-13-4.

[12] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky III. Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-95-2.

[13] Kreml, P. Matematika II. VŠB - TU Ostrava. Dostupné z www: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/

[14] Kreml, P. Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu. VŠB - TU Ostrava. Dostupné z www: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_8_1.pdf

[15] Kříž, J., Lipovský, J. Použití integrálního počtu ve fyzice a geometrii. Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, 2015. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/integraly_ve_fyzice_a_geometrii.pdf

[16] Lipovský, J. Matematika k základům fyziky (kombinované studium). Univerzita Hradec Králové, 2018. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/kmzf2.pdf

[17] Lipovský, J. Studijní texty k předmětům Matematika 1 a 2. Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, 2014. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching.html

[18] Rokyta, M. Tabulka základních primitivních funkcí. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/general/tahaky/primfce.htm

[19] Říhová, H. Diferenciální rovnice I. řádu. FBMI ČVUT, Praha. Dostupné z www: http://dagles.klenot.cz/rihova/difrce1.pdf

[20] Šibrava, Z. Příklady k Matematice 3 - Vícenásobné integrály. FSv ČVUT. Dostupné z www: http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf

[21] Šilarová, L. Komplexní čísla ve výuce matematiky na střední škole s využitím internetu. Diplomová práce, UK v Praze, MFF, Praha, 2006. Dostupné z www: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/silarova/index.html

[22] Tomiczek, P. Sbírka příkladů z matematické analýzy II. ZCU v Plzni. Dostupné z www: http://home.zcu.cz/~tomiczek/Data/sbirkaprikladukMA2.pdf

[23] Zemánek, P., Hasil, P. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. Masarykova univerzita, Brno, 2012. Dostupné z www: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/index.html

[24] Dvojný integrál - Fubiniho věta. FSI VUT. Dostupné z www: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=350

[25] heslo „Complex number“ na anglické Wikipedii. Dostupné z www: http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number

[26] heslo „Komplexní číslo“ na české Wikipedii. Dostupné z www: http://cs.wikipedia.org/wiki/Komplexn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo

[27] Komplexní čísla. Dostupné z www: http://math.feld.cvut.cz/0educ/predpokl/msu7.pdf

[28] Math Tutor – Metody výpočtů integrálů. Dostupné z www: http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3da3.htm

[29] Obyčejné diferenciální rovnice. FEL ČVUT. Dostupné z www: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/kalous/laa/prednasky/difrov.pdf