# Posloupnost a její limita

**Definice 1.** Posloupností reálných (komplexních) čísel rozumíme zobrazení množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných (komplexních) čísel $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Číslo přiřazené přirozenému číslu $n$ značíme $a_n$ a nazýváme jej $n$-tým členem posloupnosti. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Definice 2.** Číslo $a$ nazýváme vlastní limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon \,.$$

Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní* a má limitu $a$. Nemá-li vlastní limitu, pak je *divergentní*.

**Věta 3.** Posloupnost komplexních čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $c_n = a_n + ib_n$, konverguje, právě tehdy když konvergují posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Její limita je $c = a + bi$, kde $a$ a $b$ jsou limity příslušných posloupností.

**Věta 4.** *(Bolzano-Cauchyova podmínka)*
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \,.$$

**Definice 5.** Řekneme, že reálná posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$ ($-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 : \ a_n \geq K \quad (a_n \leq K) \,.$$

Nemá-li posloupnost ani vlastní, ani nevlastní limitu, řekneme, že je *oscilující*.

**Věta 6.** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. Limita nezávisí na konečném počtu členů posloupnosti.

**Věta 7.** Platí:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\pm\infty} &= 0 \,, \quad A \in \mathbb{R} \,, \\ A \cdot \infty &= \begin{cases} +\infty & A > 0 \\ -\infty & A < 0 \end{cases} \,, \\ +\infty + \infty = (+\infty) \cdot (+\infty) &= (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \,, \\ -\infty - \infty = (+\infty) \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \,. \end{aligned}$$

Nejsou definovány výrazy: $(\pm\infty) \cdot 0$, $+\infty - \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$.

**Věta 8.** *(O dvou policajtech)*
Nechť pro reálné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 : \quad a_n \leq b_n \leq c_n \,.$$

Pak

a) Jestliže existují limity $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, pak existuje limita $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

b) Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

c) Jestliže $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, pak $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

**Věta 9.** Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = AB\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}\,, \quad B \neq 0\,.$$

**Definice 10.** Reálná posloupnost je *omezená*, je-li omezená množina jejích členů. Reálná posloupnost je *rostoucí* (*neklesající*), jestliže $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$) pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost je *monotónní*, pokud je nerostoucí nebo neklesající.

**Věta 11.** Každá konvergentní posloupnost je omezená. Každá monotónní posloupnost má v $\mathbb{R}^* = \{\mathbb{R} \cup \infty \cup -\infty\}$ limitu. Limita je vlastní, právě když je posloupnost omezená.

**Věta 12.** Pro racionální lomenou posloupnost platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_p}{b_q}\right) \cdot \infty & : \quad p > q \\ \frac{a_p}{b_q} & : \quad p = q \\ 0 & : \quad p < q \end{cases} .$$

**Věta 13.** Pro mocniny a odmocniny platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p\,,$$

pokud $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje a výraz má smysl; $p \in \mathbb{Q}$.

**Věta 14.** Jsou dány posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

**Věta 15.** Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,.$$

# 1 Příklady

**Příklad 16.** *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4+2n^2+6}{2n^3+n+7}$.

*Řešení:* Jak z čitatele, tak z jmenovatele vytkneme $n^3$, tj. nejvyšší mocninu vyskytující se ve jmenovateli, a pokrátíme.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 + 2n^2 + 6}{2n^3 + n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(4n + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^3}\right)}{n^3\left(2 + \frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3}} = \infty\,.$$

Čitatel jde k nekonečnu, zatímco jmenovatel jde ke dvěma, výsledek je tedy nekonečno.

**Příklad 17.** *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[4]{n^3}+1)\cos n!}{n}$.

*Řešení:* Využijeme větu o součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule. $\cos n!$ je omezená posloupnost, protože kosinus nabývá jen hodnot mezi $-1$ a $1$. $\frac{(\sqrt[4]{n^3}+1)}{n}$ jde k nule.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[4]{n^3}+1)\cos n!}{n} = 0\,.$$

**Příklad 18.** *Určete* $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn}$.

*Řešení:* Provedeme substituci $m = \frac{n}{a}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{abm} = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{ab} = \mathrm{e}^{ab}\,.$$

Využili jsme vět 13 a 15.

**Příklad 19.** *Vypočtěte* $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - 5^{n+1}}{4^n + 5^n}$.

*Řešení:* Vytkneme $5^n$ na zkrátíme.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - 5^{n+1}}{4^n + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(\frac{4^n}{5^n} - 5\right)}{5^n\left(\frac{4^n}{5^n} + 1\right)} = -5\,.$$

Protože $\frac{4^n}{5^n}$ jde k nule, jde čitatel k $-5$ a jmenovatel k $1$ a $5^n$ se pokrátí.

# Použitá a doporučená literatura


1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 2

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 2