Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce budeme určovat zejména:

1. Definiční obor, obor spojitosti, limity (i jednostranné) v bodech nespojitosti a v hraničních bodech def. oboru.
2. Sudost, lichost, periodicitu.
3. Množiny monotonie funkce.
4. Body lokálních a globálních extrémů.
5. Obor hodnot, omezenost funkce.
6. Nulové body, případně další význačné body.
7. Konvexnost, konkávnost, inflexní body.
8. Asymptoty.

Definice 1. Funkce f je *sudá*, pokud pro každé $x \in D_f$ je $-x \in D_f$ a platí $f(-x) = f(x)$. Funkce f je *lichá*, pokud pro každé $x \in D_f$ je $-x \in D_f$ a platí $f(-x) = -f(x)$. Funkce je *periodická*, jestliže existuje kladné číslo p, pro které platí, že pro $x \in D_f$ je také $x + p \in D_f$ a dále $f(x \pm p) = f(x)$.

Definice 2. Řekneme, že funkce f je v bodě $c \in \mathbb{R}$ *neklesající* (*nerostoucí*, *rostoucí*, *klesající*), pokud existuje $\Delta > 0$ tak, že $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$, $f(x) < f(c)$, $f(x) > f(c)$) pro $x \in (c-\Delta, c)$ a $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq$, $f(x) > f(c)$, $f(x) < f(c)$) pro $x \in (c, c + \Delta)$. Funkce nerostoucí a neklesající nazýváme *monotónní*, funkce rostoucí a klesající nazýváme *ryze monotónní*.

Definice 3. Řekneme, že funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ *lokální maximum* (*lokální minimum*, *ostré lokální maximum*, *ostré lokální minimum*), jestliže existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $x \in (c-\Delta, c+\Delta)$, $x \neq c$ platí $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$, $f(x) < f(c)$, $f(x) > f(c)$).

Definice 4. Řekneme, že funkce f má v bodě $c \in M \subset D_f$ *globální maximum* (*globální minimum*, *ostré globální maximum*, *ostré globální minimum*), jestliže pro všechny $x \in M$, $x \neq c$ platí $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$, $f(x) < f(c)$, $f(x) > f(c)$).

Věta 5. i) Je-li $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), je funkce f v bodě c rostoucí (klesající).

ii) Je-li funkce f spojitá na intervalu I a je-li $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) \leq 0$) pro všechna x z vnitřku intervalu I, pak je rostoucí (neklesající, klesající, nerostoucí) na I.

iii) Má-li f v c lokální extrém, pak buď derivace f v tomto bodě neexistuje nebo je rovná nule.

iv) Má-li f v bodě $c \in M$ globální extrém na M, pak je bod c buď hraničním bodem M nebo je v něm derivace rovná nule nebo derivace neexistuje.

Věta 6. Nechť pro nějaké přirozené n je $f^{(k)}(c) = 0$ pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$. Potom platí:

i) je-li n sudé, má f v bodě c ostrý lokální extrém a to minumum pro $f^{(n)}(c) > 0$ a maximum pro $f^{(n)}(c) < 0$.

ii) je-li n liché, je f v bodě c ryze monotónní, a to rostoucí pro $f^{(n)}(c) > 0$ a klesající pro $f^{(n)}(c) < 0$.

Definice 7. Řekneme, že funkce f je konvexní (konkávní, ryze konvexní, ryze konkávní) na intervalu I, jestliže pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$ leží bod $[y, f(y)]$ pod spojnicí bodů $[x, f(x)]$ a $[z, f(z)]$ nebo na ní (nad spojnicí nebo na ní, pod spojnicí, nad spojnicí). Jinak zapsáno

$$K = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = L \quad (K \geq L, K < L, K > L)\,.$$

Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ *inflexní bod*, je-li v tomto bodě spojitá a buď v něm nemá vlastní derivaci, nebo přechází z konvexní funkce na konkávní (z jedné strany tečny na druhou).

Věta 8. Nechť je funkce f spojitá na intervalu I a má ve všech vnitřních bodech tohoto intervalu druhou derivaci. Je-li pro všechna tato x $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$, $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$) je funkce f na intervalu I konvexní (konkávní, ryze konvexní, ryze konkávní).

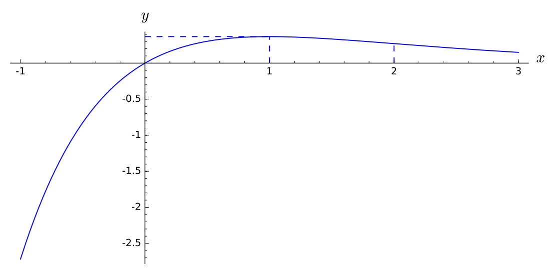
Věta 9. Je-li c inflexním bodem funkce f a $f''(c)$ existuje, pak je $f''(c) = 0$. Je-li pro nějaké $n \geq 2$ $f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$ a $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, pak pro n sudé je c inflexním bodem f a pro n liché je f v c ryze konvexní (ryze konkávní), je-li $f^{(n+1)}(c) > 0$ ($f^{(n+1)}(c) < 0$).

Definice 10. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to \infty$ ($x \to -\infty$), je-li

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \quad (\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0)\,.$$

Věta 11. Aby přímka $y = kx + q$ byla asymptotou funkce f pro $x \to \infty$ ($x \to -\infty$), je nutné a stačí, aby platilo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R}$$
$$(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R})\,.$$



Obrázek 1: Graf funkce $x\,\mathrm{e}^{-x}$

1 Příklady

Příklad 12. *Určete průběh funkce* $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Řešení: Funkce má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$, spojitá je také na celém $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,.$$

Funkce není ani sudá, ani lichá. Není periodická. Body podezřelé z extrému zjistíme položením derivace rovné nule.

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1\,.$$

Dosazením některého čísla z daného intervalu do derivace a zjištěním jejího znaménka určíme, kde je funkce rostoucí a kde klesající. Na intervalu $(-\infty, 1)$ je rostoucí, $(1, \infty)$ je klesající. Proto v 1 je lokální i globální maximum. Funkční hodnota je $f(1) = \frac{1}{e}$. Obor hodnot je $H(f) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$, funkce je shora omezená. Nulový bod je $x = 0$. Inflexní body určíme z druhé derivace.

$$f''(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\,.$$

Ze znamének druhé derivace máme, že funkce je konkávní na $(-\infty, 2)$ a konvexní na $(2, \infty)$. Inflexní bod je 2. Nakonec určíme asymptoty

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x} = \infty\,.$$

Máme asymptotu $y = 0$ pro $x \to \infty$. Graf funkce je znázorněn na obrázku 1.

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 6

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 5