Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

SEMINÁŘ MATEMATICKÉ FYZIKY
KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.

Hradec Králové 2020 – 2021

Obsah

Předmluva

Tento soubor je souhrnem poznámek pro studenty předmětů Seminář matematické fyziky 1 a 2 vyučovaných na Katedře fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Definice a věty jsou převážně opsány z učebnice J. Kopáčka „Příklady z matematiky pro fyziky III“ [3]. Další informace o předmětech mohou být nalezeny na `http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching.html`. Pokud ve studijních textech najdete chybu, uvítám, pokud mě na to upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

V Hradci Králové 10. 10. 2020 Jiří Lipovský

verze 1.0

1 Vícenásobný integrál

Vizte příslušnou kapitolu v [8].

2 Substituce ve vícenásobném integrálu

Vizte příslušnou kapitolu v [8].

3 Parametrizace křivek

Definice 3.1. *Křivka φ v $\Omega \subset \mathbb{R}_r$ s definičním intervalem $I \subset \mathbb{R}$ je spojité zobrazení $\varphi : I \to \Omega$, pro které existují reálná čísla $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, že φ má spojité první derivace (včetně jednostranných derivací v eventuálních krajních bodech intervalu) na každém z intervalů $I \cap (-\infty, t_1]$, $I \cap [t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $I \cap [t_m, \infty)$. Množina $\langle\varphi\rangle = \varphi(I)$ se nazývá* geometrickým obrazem *křivky φ.*

Regulární *křivka φ je taková křivka, pro kterou derivace $\varphi'(t)$ existuje, je spojitá a nenulová ve všech bodech svého definičního intervalu I (v eventuálních krajních bodech se myslí jednostranné derivace). Vektor $\varphi'(t)$ se nazývá* tečným vektorem *φ v bodě $\varphi(t)$.*

Křivka φ se nazývá jednoduchou*, je-li zobrazení φ prosté. Křivka φ se nazývá* uzavřenou*, je-li $I = [a, b]$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$.*

Opačnou křivkou *(křivkou s opačnou parametrizací) ke křivce φ se nazývá křivka $-\varphi$, definovaná předpisem $(-\varphi)(t) = \varphi(-t)$ pro $t \in \{s; -s \in I\}$, kde I je definiční interval křivky φ.*

Hranicí $\partial\varphi$ křivky φ s definičním intervalem $[a, b]$ se nazývá formální součet bodů $\{\varphi(b)\} + (-1)\{\varphi(a)\}$.

Dále vizte kapitolu Křivkový integrál 1. druhu v [8].

4 Křivkový integrál 1. druhu

Vizte příslušnou kapitolu v [8].

5 Křivkový integrál 2. druhu

Definice 5.1. *Vektorovou funkci*

$$\vec{v}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = (v_1(x_1, x_2, \ldots, x_r), v_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, v_r(x_1, x_2, \ldots, x_r))$$

nazveme vektorovým polem v $\mathbb{R}_r$. Potenciálem vektorového pole nazveme skalární funkci $U(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, pro kterou platí

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_r}\right) \equiv \vec{\mathrm{grad}}\, U\,.$$

Nechť φ je křivka a nechť $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_r)$ je vektorové pole na jejím obrazu $\langle\varphi\rangle$. Pak definujeme křivkový integrál 2. druhu z pole $\vec{F}$ přes křivku φ předpisem

$$\int_\varphi \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \equiv \int_\varphi (F_1 \,\mathrm{d}x_1 + F_2 \,\mathrm{d}x_2 + \cdots + F_r \,\mathrm{d}x_r) :=$$
$$:= \int_I [(F_1 \circ \varphi)\varphi_1' + (F_2 \circ \varphi)\varphi_2' + \cdots + (F_r \circ \varphi)\varphi_r'] \,\mathrm{d}t\,.$$

Věta 5.2. *(o nezávislosti na parametrizaci)*
Nechť φ a ψ jsou jednoduché křivky, definované na uzavřených intervalech a $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$. Potom platí

$$\int_\varphi \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \pm \int_\psi \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}\,.$$

Plus platí při stejném směru probíhání, minus při opačném.

Věta 5.3. *(o vztahu mezi integrálem 1. a 2. druhu)*
Nechť φ je regulární křivka, $\vec{\tau}(t) = \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ je jednotkový tečný vektor k $\langle\varphi\rangle$ v bodě $\varphi(t)$. Pak platí

$$\begin{aligned}\int_\varphi \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_\varphi (\vec{F}, \vec{\tau}) \,\mathrm{d}s\,,\\ \int_\varphi f \,\mathrm{d}s &= \int_\varphi f \vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{x}\,,\end{aligned}$$

kde $(\vec{F}, \vec{\tau}) = \sum_{i=1}^{r} F_i \tau_i$.

Věta 5.4. *(o existenci potenciálu)*
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}_r$ je otevřená, $\vec{F}$ je spojité vektorové pole v Ω. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

i) *$\vec{F}$ má v Ω potenciál,*

ii) *$\int_\varphi \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 0$ pro každou uzavřenou křivku v Ω,*

iii) *$\int_\varphi \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ nezávisí na dráze v Ω, tj. jsou-li φ_1 a φ_2 libovolné dvě křivky v Ω, pro něž platí $\partial\varphi_1 = \partial\varphi_2$, pak $\int_{\varphi_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\varphi_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$.*

Je-li U potenciál pole $\vec{F}$ a φ je křivka na $[a, b]$, pak je $\int_\varphi \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a))$.

Postup výpočtu:

1. Pokud máme křivku např. v $\mathbb{R}_2$ zadanou přímo závislostí $y(x)$, dosadíme přímo tuto závislost za všechna y. Dále vypočítáme diferenciál y dle vztahu $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x = y'(x) \,\mathrm{d}x$.

2. Známe-li parametrizaci křivky, tj. v případě $\mathbb{R}_2$ závislosti $x(t)$, $y(t)$ (v případě více $\mathbb{R}_3$ také $z(t)$), dosadíme tyto závislosti za všechny x, y. Za diferenciály dosadíme $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$, obdobně pro $\mathrm{d}y$.

3. Existuje-li potenciál, je integrál roven rozdílu potenciálu v krajních bodech křivky.

Příklad 5.5. *Vypočítejte integrál*

$$I = \int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\,,$$

kde C je křivka $y(x) = 1 - |1 - x|$, $x \in [0, 2]$.

Řešení: Křivku máme zadanou přímo pomocí explicitní závislosti y na x. Operací s absolutní hodnotou získáváme, že pro $x \in [0, 1]$ je křivka dána vztahem $y = 1 - (1 - x) = x$. Pro $x \in [1, 2]$ dostáváme $y = 1 - (x - 1) = 2 - x$. Křivku C si tedy rozdělíme na dvě křivky, C_1 pro $x \in [0, 1]$ a C_2 pro $x \in [1, 2]$.

Integrál přes první křivku je roven

$$I_1 = \int_{C_1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [(x^2 + x^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - x^2)\,\mathrm{d}x] =$$

$$= 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

Pro druhou křivku dostáváme

$$I_2 = \int_{C_2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y = \int_1^2 [(x^2+(2-x)^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-(2-x)^2)\,(-\mathrm{d}x)] =$$

$$= 2\int_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x = 2\left[4x - 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\,.$$

Hledaný integrál je tedy $I = I_1 + I_2 = 2/3 + 2/3 = 4/3$.

Příklad 5.6. *Vypočítejte integrál v prostoru*

$$I = \int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je jeden závit šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$ s orientací danou parametrizací.

Řešení: Zde máme přímo zadanou parametrizaci dané křivky. Dosadíme tedy parametrizaci do integrálu, současně si vypočítáme diferenciály jednotlivých proměnných.

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(a\cos t) = -a\sin t\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}(a\sin t) = a\cos t\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}(bt) = b\,\mathrm{d}t\,.$$

Dostáváme

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} [a \sin(t)\,(-a)\sin(t)\,\mathrm{d}t + bta\cos(t)\,\mathrm{d}t + a\cos(t)\,b\,\mathrm{d}t] = \\
&\qquad = -a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t + ab\int_0^{2\pi} (1+t)\cos(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

První integrál vypočítáme pomocí substituce.

$$
\begin{aligned}
-a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t &= -a^2\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u &= 2t & \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \\ & & \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{a^2}{4}\int_0^{4\pi}(1-\cos(u))\,\mathrm{d}u = -\frac{a^2}{4}\,[u-\sin(u)]_0^{4\pi} = -a^2\pi\,.
\end{aligned}
$$

K výpočtu druhého integrálu použijeme per partes

$$
\begin{aligned}
ab\int_0^{2\pi}(1+t)\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \begin{vmatrix} u &= 1+t & v' = \cos(t) \\ u' &= 1 & v = \sin t \end{vmatrix} = \\
&= ab[(1+t)\sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}t = -[-\cos(t)]_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Integrál I je roven součtu obou výsledků, tedy $I = -a^2\pi$.

Příklad 5.7. *Vypočítejte integrál*

$$I = \int_C x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\,,$$

přes křivku C začínající v bodě $[-1,2]$ a končící v bodě $[2,3]$.

Řešení: Možná pro někoho překvapivě k tomuto příkladu nemusíme znát přesný průběh křivky. Výraz pod integrálem lze totiž zapsat jako totální diferenciál.

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(xy)\,.$$

Potenciál tedy je $U(x,y) = xy$. Můžeme to snadno ověřit.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y\,,\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x\,.$$

Protože $\vec{F} = (y,x)$ (výraz u dx je první souřadnice $\vec{F}$ a výraz u dy druhá), platí

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \vec{F}\,.$$

Výpočet integrálu je tedy jednoduchý; za souřadnice dosadíme „souřadnice konečného bodu minus počátečního bodu“.

$$I = U([2,3]) - U([-1,2]) = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 2 = 8\,.$$

Další zdroje: [3, 9, 11].

6 Greenova věta

Nyní si probereme větu, která uvádí vztah mezi křivkovým integrálem 2. druhu a dvojným integrálem. Díky ní lze v některých případech snadněji vypočítat křivkový integrál. Začneme definicemi.

Definice 6.1. *Nechť V je vektorový prostor dimenze r. Potom dvě jeho báze $v_1, \dots, v_r$ a $w_1, \dots, w_r$ jsou* souhlasně orientované*, pokud je determinant matice přechodu od jedné báze ke druhé kladný. V opačném případě jsou* nesouhlasně orientované*. Bázi $v_1, \dots, v_r$ nazveme* kladně orientovanou*, je-li souhlasně orientovaná s kanonickou bází $e_1, \dots, e_r$. V opačném případě je tato báze* záporně orientovaná.

Definice 6.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ a $\delta\Omega$ je její hranice. Nechť φ je křivka v $\mathbb{R}_2$ taková, že $\langle\varphi\rangle \subset \delta\Omega$ a $\varphi'(t_0) \neq 0$. Řekneme, že vektor ν je* vektorem vnější normály *k $\delta\Omega$ v bodě $\varphi(t_0)$, je-li*

1. *$(\nu, \varphi'(t_0)) = 0$,*
2. *existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \delta)$ platí $\varphi(t_0) + h\nu \notin \Omega$.*

Řekneme, že φ je kladně orientovaná vzhledem k Ω v bodě $\varphi(t_0)$, pokud dvojice $[\nu, \varphi'(t_0)]$ je kladně orientovaná báze v $\mathbb{R}_2$. Řekněme, že φ (definovaná na I) je kladně orientovaná *vzhledem k Ω, pokud existuje konečná množina $A \subset I$, že pro $t \in I \backslash A$ je φ kladně orientovaná vzhledem k Ω v bodě $\varphi(t)$.*

Věta 6.3. *(Greenova)*
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ je oblast, jejíž hranice $\delta\Omega = \langle c\rangle$, kde c je uzavřená jednoduchá kladně orientovaná křivka. Potom pro každé spojitě diferencovatelné pole $[T_1, T_2]$ na $\bar{\Omega}$ platí

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_c (T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2)\,.$$

Poznámka 6.4. *Křivka v $\mathbb{R}_2$ je kladně probíhaná, pokud jí uzavřená množina „zůstává vždy při probíhání po levé ruce“.*

Příklad 6.5. *Vypočítejte integrál*

$$I = \int_C xy^2\,\mathrm{d}y - x^2 y\,\mathrm{d}x\,,$$

přes kružnici $x^2 + y^2 = a^2$ probíhanou v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček).

Řešení: Využijeme Greenovu větu. V našem případě máme $[T_1, T_2] = [-x^2 y, xy^2]$. Podle Greenovy věty je integrál v zadání roven dvojnému integrálu

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega \left[\frac{\partial (xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^2 y)}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Integrál vypočteme pomocí polárních souřadnic (nezapomeňte, že jakobián je r, zjevně $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, a]$).

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi a^4}{2}\,.$$

Příklad 6.6. *(demonstrace Greenovy věty) Nechť $[F(x,y), G(x,y)]$ je vektorové pole, spojitě derivovatelné v nějakém okolí bodu (x_0, y_0). Nechť C_ε je kladně orientovaná kružnice o středu (x_0, y_0) a malém poloměru ε. Vypočítejte*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} F \,\mathrm{d}x + G \,\mathrm{d}y\,.$$

Řešení: Tento příklad ilustruje Greenovu větu a pomáhá pochopení, proč věta platí. Samozřejmě se ale nejedná o její důkaz. Nejdříve se parametrizujeme křivku C_ε:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon \cos t \\ y &= y_0 + \varepsilon \sin t \\ t &\in [0, 2\pi)\,. \end{aligned}$$

Pro malé ε a $\omega_\varepsilon(t)$ s vlastností $\lim_{\varepsilon\to 0+} \omega_\varepsilon(t) = 0$ platí (srovnejte např. s Taylorovou větou)

$$\begin{aligned} F(x,y) = F(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon\omega_\varepsilon(t) = \\ = F(x_0,y_0) + a\varepsilon\cos t + b\varepsilon \sin t + \varepsilon\omega_\varepsilon(t)\,, \end{aligned}$$

kde $a = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$. Obdobně dostáváme

$$G(x,y) = G(x_0,y_0) + c\varepsilon\cos t + d\varepsilon\sin t + \varepsilon\tilde{\omega}_\varepsilon(t)\,,$$

kde $c = \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)$, $d = \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Pak je křivkový integrál roven

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} F \,\mathrm{d}x + G \,\mathrm{d}y = \varepsilon \int_0^{2\pi} [-F(x(t),y(t))\sin t + G(x(t),y(t))\cos t]\,\mathrm{d}t = \\ = \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} [-a\cos t\sin t - b\sin^2 t + c\cos^2 t + d\sin t\cos t]\,\mathrm{d}t + \varepsilon^2\sigma_\varepsilon(t)\,, \end{aligned}$$

kde $\lim_{\varepsilon\to 0+}\sigma_\varepsilon(t) = 0$.

Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} F \,\mathrm{d}x + G \,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} [-a\cos t\sin t - b\sin^2 t + c\cos^2 t + d\sin t\cos t]\,\mathrm{d}t =$$

$$= (d-a)\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t + \frac{c}{2}\int_0^{2\pi} [1+\cos(2t)]\,\mathrm{d}t + \frac{b}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(2t) - 1]\,\mathrm{d}t$$

První integrál určíme pomocí substituce za sinus.

$$(d-a)\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u=\sin t \\ \mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = (d-a)\int_0^0 u\,\mathrm{d}u = 0\,.$$

Další dva integrály určíme pomocí substituce za $2t$.

$$\frac{c}{2}\int_0^{2\pi}[1+\cos(2t)]\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u=2t \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{vmatrix} = \frac{c}{2}[t]_0^{2\pi}+\frac{c}{4}\int_0^{4\pi}\cos u\,\mathrm{d}u = \pi c-[\sin u]_0^{4\pi} = \pi c\,.$$

$$\frac{b}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(2t)-1]\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u=2t \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{vmatrix} = -\frac{b}{2}[t]_0^{2\pi}+\frac{b}{4}\int_0^{4\pi}\cos u\,\mathrm{d}u = -\pi b-[\sin u]_0^{4\pi} = -\pi b\,.$$

Proto

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y = \pi(c-b) = \pi\left[\frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\,.$$

Vztah ke Greenově větě je vidět z toho, že obsah kruhu ohraničeného křivkou C_ε je $\pi\varepsilon^2$. Pro malé ε je výraz v hranaté závorce vyjádřený pro obecné x a y přibližně konstantní na celém kruhu a integrál z něj přes kruh je roven ε^2-ovému násobku pravé strany.

Příklad 6.7. *Vypočtěte*

$$\int_C (\mathrm{e}^x\sin y - my)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - m)\,\mathrm{d}y\,,$$

kde C je horní půlkružnice $x^2+y^2=ax$ probíhaná od bodu $[a,0]$ do bodu $[0,0]$

Řešení: Daná půlkružnice má střed v bodě $[a/2,0]$ a poloměr $a/2$. Vidíme to z rovnice

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Využijeme Greenovy věty. Budeme integrovat přes půlkruh ohraničený danou půlkružnicí a úsečkou od $[0,0]$ do $[a,0]$. Vidíme

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}-\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mathrm{e}^x\cos y - m)}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{e}^x\sin y - my)}{\partial y} = \mathrm{e}^x\cos y-(\mathrm{e}^x\cos y-m) = m\,.$$

Dvojný integrál je tedy integrál z m přes půlkruh o poloměru $a/2$. Integrál z konstanty je roven konstanta krát obsah plochy. Půlkruh má obsah $S=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$. Dvojný integrál tedy je $\frac{m\pi a^2}{8}$. Tento dvojný integrál je podle Greenovy věty roven součtu hledaného integrálu a integrálu přes zmíněnou úsečku. Úsečku si parametrizujeme následovně:

$$x=t,\quad y=0,\quad t\in(0,a)$$

Odsud $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y=0$. Dostáváme

$$\int_0^a(\mathrm{e}^t\sin 0 - m\cdot 0)\,\mathrm{d}t + 0 = 0\,.$$

Integrál přes úsečku je nulový, proto je hledaný integrál roven $\frac{m\pi a^2}{8}$.

Další informace a příklady o tématu např. v [3].

7 Aplikace křivkového integrálu 1. a 2. druhu

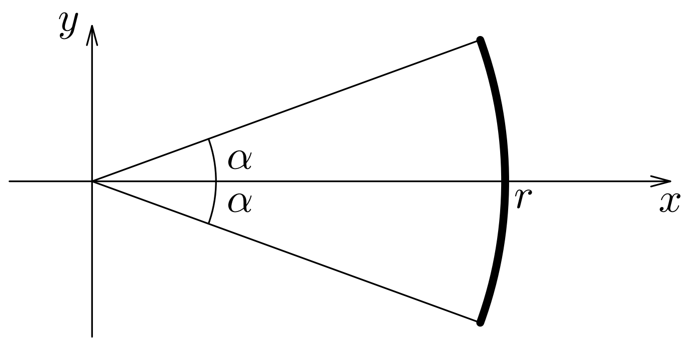
Křivkový integrál se aplikuje v mnoha oblastech fyziky a geometrie. Uvádíme, inspirováni [3] následující příklady.

1. Máme-li zadanou lineární hustotu ρ dané křivky φ, je její hmotnost dána vztahem
$$m = \int_\varphi \rho \, \mathrm{d}s$$
2. x-ová souřadnice hmotného středu (těžiště) je dána vztahem
$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{m} \int_\varphi x\rho \, \mathrm{d}s \,,$$
kde m je hmotnost a ρ lineární hustota křivky. Obdobný vztah platí pro y-ovou a z-ovou souřadnici těžiště.
3. Pokud síla $\vec{T} = [T_1(x,y,z), T_2(x,y,z), T_3(x,y,z)]$ působí po dráze, která je popsaná křivkou φ, pak práce vykonaná touto silou je rovna integrálu 2. druhu:
$$W = \int_\varphi (T_1 \, \mathrm{d}x + T_2 \, \mathrm{d}y + T_3 \, \mathrm{d}z) \,.$$
4. Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}_2$, pro niž platí $\delta\Omega = \langle c \rangle$, kde c je uzavřená křivka, pak pro obsah oblasti Ω platí následující vztah pomocí křivkového integrálu 2. druhu
$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \int_\varphi (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x) = \int_\varphi x \, \mathrm{d}y = -\int_\varphi y \, \mathrm{d}x \,.$$
Důkaz je zřejmý z Greenovy věty.
5. Nechť je daná křivka φ v $\mathbb{R}_3$ s danou lineární hustotou ρ. Pak momenty setrvačnosti vzhledem k jednotlivým souřadnicovým osám jsou určeny těmito křivkovými integrály 1. druhu.
$$I_x = \int_\varphi \rho(y^2+z^2) \, \mathrm{d}s \,, \quad I_y = \int_\varphi \rho(x^2+z^2) \, \mathrm{d}s \,, \quad I_z = \int_\varphi \rho(x^2+y^2) \, \mathrm{d}s \,.$$

Příklad 7.1. *(převzato z [4]) Stanovte polohu těžiště homogenního velmi tenkého drátu tvaru kruhového oblouku s poloměrem r a středovým úhlem 2α.*

Řešení: Zvolíme si osu x tak, aby tvořila osu symetrie oblouku (viz obr. 1). Ze symetrie vidíme $y_\mathrm{T} = z_\mathrm{T} = 0$. Délka oblouku je $\ell = 2r\alpha$, oblouk můžeme parametrizovat $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a malý element délky oblouku je $\mathrm{d}\ell = r\,\mathrm{d}\varphi$. Pro výpočet x-ové souřadnice těžiště použijeme vztah

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{\ell} \int_{(\ell)} x \, \mathrm{d}\ell = \frac{1}{\ell} \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \\ = \frac{1}{2\alpha r} r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{r}{2\alpha} [\sin\varphi]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r}{\alpha} \sin\alpha \,.$$



Obrázek 1: Drát ve tvaru kruhového oblouku

Příklad 7.2. *Najděte moment setrvačnosti obvodu rovnostranného trojúhelníka, který leží v rovině xy, má danou konstantní lineární hustotu ρ a jeho vrcholy jsou v bodech $[a,0,0]$, $[a\cos\frac{2\pi}{3}, a\sin\frac{2\pi}{3}, 0]$, $[a\cos\frac{4\pi}{3}, a\sin\frac{4\pi}{3}, 0]$. Tento moment setrvačnosti určete vůči ose z.*

Řešení: Ze symetrie vidíme, že hmotný střed trojúhelníka je v počátku souřadnic, kterým prochází osa, vzhledem ke které určujeme moment setrvačnosti. Proto moment setrvačnosti libovolné strany trojúhelníka je stejný. Vypočteme proto moment setrvačnosti svislé strany, která je nalevo, a vynásobíme ho třemi. Vrcholy mají souřadnice $\left[-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]$ a $\left[-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right]$. Tuto stranu si parametrizujeme:

$$x = -\frac{a}{2}\,, \quad y = t\,, \quad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right].$$

Moment setrvačnosti celého trojúhelníka vypočítáme jako trojnásobek momentu setrvačnosti této hrany pomocí křivkového integrálu 1. druhu

$$I_z = 3\int_\varphi \rho(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = 3\rho\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\frac{a^2}{4} + t^2\right) \mathrm{d}t = 3\rho\left[\frac{a^2}{4}t + \frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho a^3\,.$$

Příklad 7.3. *Pepíček, stojící v bodě o souřadnicích $[0,b]$ tahá silou o konstantní velikosti F pomocí napjatého provazu vagón z bodu o souřadnicích $[-a,0]$ do bodu o souřadnicích $[0,0]$. Vagón jede po rovných kolejích které kopírují x-ovou osu. Určete, jakou práci Pepíček vykoná.*

Řešení: Pohyb probíhá v ose x, proto si úsečku, po které se vagón pohybuje, parametrizujeme

$$x = t\,, \quad y = 0\,, \quad t \in [-a, 0]\,.$$

Vykonanou práci vypočteme pomocí integrálu

$$W = \int_\varphi F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y\,.$$

Protože $\mathrm{d}y = 0$ a $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, zajímá nás pouze integrál z F_x. Tuto složku vyjádříme jako průmět síly $\vec{F}$ do směru pohybu:

$$F_x = \frac{-t}{\sqrt{(-t)^2 + b^2}} F\,.$$

Výsledná práce tedy je

$$W = \int_{-a}^{0} \frac{-tF}{\sqrt{(-t)^2 + b^2}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u &= t^2 + b^2 \\ \mathrm{d}u &= 2t\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} F \int_{a^2+b^2}^{b^2} u^{\ -\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{2} F \int_{b^2}^{a^2+b^2} u^{\ -\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} [2u^{\frac{1}{2}}]_{b^2}^{a^2+b^2} = F(\sqrt{a^2+b^2} - b)\,.$$

Další zdroje: [3, 4].

8 Parametrizace ploch

Definice 8.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ je oblast, jejíž hranice $\delta\Omega$ je obraz uzavřené křivky. Nechť $O \subset \mathbb{R}_2$ je otevřená množina, pro kterou platí $\bar{\Omega} \subset O$, kde $\bar{\Omega}$ je uzávěr množiny Ω. Spojité diferencovatelné zobrazení $\varphi : O \to \mathbb{R}_3$ nazveme* parametrizací jednoduché regulární plochy $S \subset \mathbb{R}_3$ *na oblasti Ω, pokud platí*

i) $\varphi(\Omega) = S$,

ii) *φ je prosté na Ω a φ^{-1} je spojité na S,*

iii) *hodnost Jacobiho matice $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(u,v)}$ je rovna 2 pro každé $(u,v) \in \Omega$, kde $\varphi(u,v) = [\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)]$.*

Plocha S se nazývá geometrickým obrazem *parametrizace φ.*

Je-li φ parametrizací jednoduché regulární plochy $\langle\varphi\rangle \subset \mathbb{R}_3$, pak vektorový prostor dimenze 2 generovaný vektory $\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}$ nazveme tečným prostorem *k ploše $\langle\varphi\rangle$ v bodě $x = \varphi(u,v)$ je jeho prvky nazveme tečnými vektory.* Vektorem normály *nazveme vektor kolmý v tomto bodě na všechny tečné vektory.*

Množinu $S \subset \mathbb{R}_3$ nazveme zobecněnou plochou dimenze 2*, pokud je rovna sjednocení jednoduchých regulárních ploch a křivek a zároveň okraj jedné plochy se nedotýká vnitřku jiné plochy.*

Příklad 8.2. *Nalezněte parametrizaci sféry o poloměru R dané rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.*

Řešení: Řez sféry rovinou kolmou k ose z je kružnice, kterou parametrizujeme polárními souřadnicemi

$$x = r\cos t\,, \quad y = r\sin t\,, \quad t \in (0, 2\pi)\,.$$

Rovnice sféry tedy přejde na $r^2 + z^2 = R^2$. Zavedeme-li úhel u jako úhel od osy z, tj. vztahem $\cos u = z/R$, $u \in (0, \pi)$, platí

$$r^2 + R^2 \cos^2 u = R^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = R^2 \sin^2 u \quad \Rightarrow \quad r = R \sin u\,.$$

Neboť r a R jsou kladné, bereme kladné znaménko. Dosazením za r do polárních souřadnic dostáváme

$$x = R \sin u \cos t\,, \quad y = R \sin u \sin t\,, \quad z = R \cos u\,, \tag{1}$$

$$t \in (0, 2\pi)\,, \quad u \in (0, \pi)\,. \tag{2}$$

Takto parametrizovaná plocha ale neobsahuje půlkružnici

$$x = R \sin u\,, \quad y = 0\,, \quad z = R \cos u\,, \quad u \in [0, \pi]\,. \tag{3}$$

Celou sféru tedy můžeme vyjádřit jako zobecněnou plochu skládající se z obrazu parametrizace (1), (2) a křivky (3).

Příklad 8.3. *Parametrizujte torus („pneumatiku"), tj. množinu bodů vzdálených od kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ o b.*

Řešení: Zaveďme si vektor $\vec{\alpha}$ v rovině xy, který má počátek v počátku souřadnic a konec v bodu na zmíněné kružnici. Tedy z polárních souřadnic $\vec{\alpha} = (a \cos u, a \sin u, 0)$, $u \in (0, 2\pi)$. Dále zaveďme vektor $\vec{\beta}$ s počátkem v koncovém bodu vektoru $\vec{\alpha}$ o délce b, který leží v rovině dané vektorem $\vec{\alpha}$ a osou z. Rozmyslete si, že jeho tvar je $\vec{\beta} = (b \cos t \cos u, b \cos t \sin u, b \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Parametrizaci dostáváme pomocí součtu vektorů $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$.

$$x = (a + b \cos t) \cos u\,, \quad y = (a + b \cos t) \sin u\,, \quad z = b \sin t\,, \tag{4}$$

$$u \in (0, 2\pi)\,, \quad t \in (0, 2\pi)\,. \tag{5}$$

Tím, že jsme zvolili otevřené intervaly, vynechali jsme z celého toru dvě kružnice. První je

$$x = (a + b) \cos u\,, \quad y = (a + b) \sin u\,, \quad z = 0\,, \quad u = [0, 2\pi] \tag{6}$$

a druhá

$$x = (a + b \cos t)\,, \quad y = 0\,, \quad z = b \sin t\,, \quad t = [0, 2\pi] \tag{7}$$

Celý torus je zobecněná plocha skládající se z jednoduché regulární plochy parametrizované (11), (12) a dvou křivek parametrizovaných (6) a (7).

Příklad 8.4. *Zapište parametricky hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$.*

Řešení: Řez hyperboloidu rovinou kolmou k ose z je kružnice, vyjdeme proto z polárních souřadnic $x = r \cos s$, $y = r \sin s$, $s \in (0, 2\pi)$. Dostáváme rovnici $r^2 - z^2 = R^2$. Jedná se o rovnici hyperboly. Pro její parametrizaci můžeme využít vztahu $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Zvolíme-li $r = R \cosh t$, $z = R \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$, rovnice hyperboly bude splněna. Dále dosadíme za r do vztahů s polárními souřadnicemi výše a dostáváme

$$x = R\cos s\cosh t\,,\quad y = R\sin s\cosh t\,,\quad z = R\sinh t\,, \tag{8}$$

$$s \in (0, 2\pi)\,,\quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{9}$$

Tímto způsobem jsme nepopsali hyperbolu pro $s = 0$, tedy

$$x = R\cosh t\,,\quad y = 0\,,\quad z = R\sinh t\,. \tag{10}$$

Celý hyperboloid je zobecněná plocha skládající se z jednoduché regulární plochy parametrizované (8), (9) a křivky parametrizované (10).

Další zdroj: [3].

9 Parametrizace ploch - další příklady

Příklad 9.1. *Zapište parametricky plochu, která vznikne otáčením funkce* $\sin x$*,* $x \in [0, \pi]$ *okolo osy* x*.*

Řešení: Řezy hledané plochy pomocí rovin kolmých k ose x jsou kružnice o poloměru $r = \sin x$. Tyto kružnice si zparametrizujeme jako

$$y = r\cos t\,,\quad z = r\sin t\,,\quad t \in (0, 2\pi)\,.$$

Výsledná parametrizace plochy tedy je po dosazení za r

$$x = x\,,\quad y = \sin x\cos t\,,\quad z = \sin x\sin t\,,$$
$$x \in (0, \pi)\,,\quad t \in (0, 2\pi)\,.$$

Nakonec najdeme křivku, kterou jsme z parametrizace této plochy vyňali. Krajní body intervalu pro x odpovídají bodům $[0, 0, 0]$ a $[\pi, 0, 0]$. Křivka pro $t = 0$ odpovídá

$$x = x\,,\quad y = \sin x\,,\quad z = 0\,,\quad x \in (0, \pi)\,.$$

Chceme-li do křivky zahrnout i oba zmíněné body, vezmeme uzavřený interval $x \in [0, \pi]$.

Příklad 9.2. *Co dostaneme otáčením hyperboly* $x^2 - y^2 = a^2$ *okolo osy* x *resp.* y*? Umíte parametricky tyto plochy zapsat?*

Řešení: Otáčením kolem osy y dostaneme jednodílný hyperboloid daný rovnicí $x^2 + z^2 - y^2 = a^2$. Jeho parametrizace je (až na záměnu os y a z) popsána v příkladu 8.4. Nyní se zaměříme na rotaci kolem osy x, tedy rovnici $x^2 - r^2 = a^2$ s $r^2 = y^2 + z^2$. Z polárních souřadnic dostáváme $y = r\cos s$, $z = r\sin s$, $s \in (0, 2\pi)$. Hyperbolu parametrizujeme s využitím dříve zmíněné identity pro hyperbolický sinus a kosinus $x = a\cosh t$, $r = a\sinh t$, $t \in (-\infty, \infty)$. Dosazením za r máme

$$x = a\cosh t\,,\quad y = a\sinh t\cos s\,,\quad z = a\sinh t\sin s\,,$$
$$s \in (0, \pi)\,,\quad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Zároveň rovnici hyperboly splňuje i $x = -a\cosh t$, $r = a\sinh t$, $t \in (-\infty, \infty)$, což vede na

$$x = -a\cosh t\,, \quad y = a\sinh t\cos s\,, \quad z = a\sinh t\sin s\,,$$
$$s \in (0, \pi)\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Parametr s běží jen do π, protože pro $s \in (\pi, 2\pi)$ bychom plochu obkroužili znovu druhou částí hyperboly. V obou případech jsme vyňali křivku pro $s = 0$, tj.

$$x = \pm a\cosh t\,, \quad y = a\sinh t\,, \quad z = 0\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Příklad 9.3. *Zapište parametricky povrch válce $x^2 + y^2 \leq R^2$, $|z| \leq a$.*

Řešení: Plochu si rozdělíme na plášť, obě podstavy a křivky, které byly vyjmuty. Začneme pláštěm. Ten má rovnici $x^2 + y^2 = R^2$. Pro parametrizaci plochy použijeme v proměnných x a y polární souřadnice

$$x = R\cos t\,, \quad y = R\sin t\,, \quad z = u\,,$$
$$t \in (0, 2\pi)\,, \quad u \in (-a, a)\,.$$

Dále parametrizujeme obě podstavy. Protože je postup podobný, zapíšeme obě podstavy zároveň, rozdíl je pouze ve znaménku z-ové souřadnice.

$$x = r\cos t\,, \quad y = r\sin t\,, \quad z = \pm a\,,$$
$$t \in (0, 2\pi)\,, \quad r \in (0, R)\,.$$

Dále musíme parametrizovat vynechané křivky. V parametrizaci postav jsme vynechali křivky pro $t = 0$, tedy

$$x = r\,, \quad y = 0\,, \quad z = \pm a\,, \quad r \in [0, R]\,.$$

Obvody postav jsou na rozhraní obou ploch. Dostaneme je např. z postav pro $r = R$.

$$x = R\cos t\,, \quad y = R\sin t\,, \quad z = \pm a\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

A konečně poslední křivkou je $t = 0$ pro plášť.

$$x = R\,, \quad y = 0\,, \quad z = u\,, \quad u \in [-a, a]\,.$$

Další zdroj: [3].

10 Plošný integrál

Definice 10.1. *Nechť φ je parametrizace jednoduché regulární plochy na Ω a $\vec{T}$ je vektorové pole, definované na $\langle\varphi\rangle = \varphi(\Omega)$. Pak definujeme plošný integrál 2. druhu z vektorového pole $\vec{T}$ přes plochu $\langle\varphi\rangle$ s orientací danou parametrizací φ předpisem*

$$\int_\varphi \vec{T} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_\varphi T_1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + T_2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + T_3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega \left(\vec{T} \circ \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v\,,$$

kde $(\cdot,\cdot)$ je skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^3$ a $\times$ značí vektorový součin.

Je-li funkce f definovaná na $\langle\varphi\rangle = \varphi(\Omega)$, pak definujeme plošný integrál 1. druhu z funkce f přes plochu $\langle\varphi\rangle$ předpisem

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}S = \int_\Omega (f\circ\varphi)\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Věta 10.2. *(o nezávislosti na parametrizaci)*
Nechť $\vec{T}$ je spojité vektorové pole a f spojitá funkce na S. Nechť φ_1 a φ_2 jsou dvě souhlasně orientované parametrizace jednoduché regulární plochy S. Pak platí

$$\int_{\varphi_1}\vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\varphi_2}\vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_{-\varphi_1}\vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,,$$
$$\int_{\varphi_1} f\,\mathrm{d}S = \int_{\varphi_2} f\,\mathrm{d}S = \int_{-\varphi_1} f\,\mathrm{d}S\,.$$

Věta 10.3. *(vztah mezi integrály 1. a 2. druhu)*
Nechť S je jednoduchá regulární plocha a $\vec{\nu}$ spojité pole jednotkových normál na S. Je-li φ parametrizace S, kladně orientovaná vzhledem k $\vec{\nu}$, $\vec{T}$ je spojité vektorové pole a f spojitá funkce na S, pak platí

$$\int_\varphi \vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_\varphi (\vec{T},\vec{\nu})\,\mathrm{d}S$$
$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}S = \int_\varphi f\vec{\nu}\cdot\,\mathrm{d}\vec{S}\,.$$

Věta 10.4. *(Grammův determinant)*
Nechť je φ jednoduchá regulární plocha na Ω. Pak

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}S = \int_\Omega (f\circ\varphi)\sqrt{g}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,,$$

kde

$$g = \det\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\end{pmatrix}\,.$$

Příklad 10.5. *(povrch toru)*
Vypočtěte plošný obsah množiny z příkladu 8.3.

Řešení: Zopakujeme parametrizaci ze zmíněného příkladu. Všimněte si, že na výpočet plošných integrálů 1. i 2. druhu není důležité znát vyňaté křivky, protože ty nepřispívají do obsahu (jsou to množiny míry nula vzhledem k obsahu).

$$x = (a + b\cos t)\cos u\,,\quad y = (a+b\cos t)\sin u\,,\quad z = b\sin t\,, \tag{11}$$
$$u \in (0,2\pi)\,,\quad t\in(0,2\pi)\,. \tag{12}$$

Cílem je vypočíst integrál 1. druhu z jedničky. Můžeme využít Věty 10.4. Vypočteme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = b(-\sin t\cos u, -\sin t\sin u, \cos t)\,,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (-(a+b\cos t)\sin u, (a+b\cos t)\cos u, 0)\,.$$

Z toho

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= b^2(\sin^2 t\cos^2 u + \sin^2 t\sin^2 u + \cos^2 t) = b^2\,,\\
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= ab\,(\sin t\cos t\sin u - \sin t\sin u\cos u) + \\
&\quad + b^2(\sin t\cos u\cos t\sin u - \sin t\sin u\cos t\cos u) = 0\,,\\
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) &= (a+b\cos t)^2\sin^2 u + (a+b\cos t)^2\cos^2 u = (a+b\cos t)^2\,.
\end{aligned}$$

Odsud
$$\sqrt{g} = \sqrt{b^2(a+b\cos t)^2} = b(a+b\cos t)\,.$$

Počítáme tedy integrál přes torus T, který převedeme na dvojný integrál v mezích daných parametrizací toru.

$$\int_T \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\cos t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} b[at+b\sin t]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}u = 2\pi ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}u = 4\pi^2 ab\,.$$

Povrch toru je tedy $4\pi^2 ab$.

Příklad 10.6. *Určete plošný integrál 2. druhu*

$$I = \int_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes vnější stranu sféry S, která je dána rovnicí $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Řešení: Výraz pod integrálem je symetrický vůči cyklické záměně x, y a z, proto platí
$$I = 3\int_S z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_{S_+} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 3\int_{S_-} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

kde S_+ je horní polosféra a S_- dolní polosféra. Uvědomíme si, že integrál přes dolní polosféru je stejný jako přes horní, protože při záměně horní polosféry za dolní změní z znaménko, stejně však změní znaménko i z-ová souřadnice normálového vektoru. Dále si uvědomíme, že integrál přes horní polosféru je stejný jako integrál přes kruh $x^2+y^2=a^2$ v rovině xy. Proto

$$\int_{S_+} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

kde D je zmíněný kruh. Po použití polárních souřadnic dostáváme

$$\int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a r \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\,\mathrm{d}r =$$
$$= \left| \begin{matrix} t = a^2 - r^2 & \\ \mathrm{d}t = -2r\mathrm{d}r & r\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} 2\pi \int_{a^2}^0 t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \pi\frac{2}{3}[t^{3/2}]_0^{a^2} = \frac{2\pi}{3}a^3\,.$$

Integrál I je tedy roven šestinásobku této hodnoty, $I = 4\pi a^3$.

Další zdroj: [3].

11 Stokesova a Gaussova-Ostrogradského věta

V této části si uvedeme dvě věty, které převádějí různé probrané integrály na sebe a využívají diferenciálních operátorů vektorové analýzy (o těch více v [7]).

Věta 11.1. *(Stokesova)*
Nechť φ je parametrizace jednoduché regulární plochy S na $\Omega \subset \mathbb{R}_2$, přičemž Ω a uzavřená křivka c, kde $\langle c\rangle = \delta\Omega$ splňují předpoklady Greenovy věty. Je-li $\vec{T}$ vektorové pole, které je spojitě diferencovatelné na otevřené množině $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}_3$, $S \subset \mathcal{O}$, pak je

$$\int_\varphi (\operatorname{rot}\vec{T})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\varphi\circ c} \vec{T}\cdot \mathrm{d}\vec{x}\,.$$

Často se pro $S = \varphi(\Omega)$ a $\delta S = \langle \varphi \circ c\rangle$ píše předchozí vztah ve tvaru

$$\int_S (\operatorname{rot}\vec{T})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\delta S} \vec{T}\cdot \mathrm{d}\vec{x}\,.$$

Musíme ještě okomentovat, jak spolu souvisí orientace S a δS. Pokud máme zadané spojité pole jednotkových normál na S, pak směr obíhání okraje δS vybereme tak, aby člověk jdoucí po okraji plochy S s hlavou ve směru normály měl plochu po levé ruce.

Věta 11.2. *(Gaussova-Ostrogradského)*
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}_3$ je otevřená a omezená a $\delta\Omega$ je kladně orientovaná zobecněná plocha. Je-li vektorové pole $\vec{T}$ spojitě diferencovatelné na $\bar{\Omega}$ (uzávěru Ω), pak platí

$$\int_\Omega (\operatorname{div}\vec{T})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int_{\delta\Omega} \vec{T}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\delta\Omega} (\vec{T},\vec{\nu})\,\mathrm{d}S\,.$$

Příklad 11.3. *(využití Stokesovy věty)*
Vypočtěte integrál

$$I = \int_C (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je elipsa $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, $a > 0$, $h > 0$, orientovaná kladně vůči vektoru $\vec{v} = (h, 0, a)$.

Řešení: Elipsa je průnikem válce a roviny. Jako S si označíme plochu ohraničenou touto elipsou v zadané rovině $z = h\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ s definičním oborem $x^2 + y^2 \le a^2$. Elipsu orientujeme souhlasně vzhledem k normálovému vektoru $\vec{\nu} = (h, 0, a)$. Budeme uvažovat parametrizaci

$$x = t\,, \quad y = s\,, \quad z = h\left(1 - \frac{t}{a}\right)\,, \quad t^2 + s^2 \le a^2\,.$$

Vypočteme si pro tuto parametrizaci vektory $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ a $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ a jejich vektorový součin.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= (1, 0, -h/a)\,,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= (0, 1, 0)\,,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= (h/a, 0, 1)\,.\end{aligned}$$

Dále vypočteme rotaci zadaného vektorového pole

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\vec{T} = \nabla \times (y - z, z - x, x - y) =\\ &= \left(\frac{\partial(x-y)}{\partial y} - \frac{\partial(z-x)}{\partial z}, \frac{\partial(y-z)}{\partial z} - \frac{\partial(x-y)}{\partial x}, \frac{\partial(z-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y-z)}{\partial y}\right) = (-2, -2, -2)\,.\end{aligned}$$

Ze Stokesovy věty dostáváme pomocí výrazu pro výpočet plošného integrálu z Definice 10.1

$$\begin{aligned}I &= \int_P ((-2, -2, -2), (h/a, 0, 1))\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t =\\ &= -2\int_P (h/a + 1)\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t = -2(h/a + 1)\pi a^2 = -2\pi a(a + h)\,.\end{aligned}$$

Zde $P = \{(t, s) : t^2 + s^2 \le a^2\}$.

Příklad 11.4. *(využití Gaussovy-Ostrogradského věty)*
Vypočtěte integrál

$$I = \int_S (x - y + z)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - z + x)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z - x + y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

kde zobecněná plocha S je dána

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$$

orientovaná pomocí vnější normály vůči oblasti V, která je plochou S ohraničená.

Řešení: Použijeme Gaussovu-Ostrogradského větu. Vypočtěme divergenci

$$\operatorname{div}\vec{T} = \operatorname{div}(x-y+z, y-z+x, z-x+y) = \frac{\partial(x-y+z)}{\partial x} + \frac{\partial(y-z+x)}{\partial y} + \frac{\partial(z-x+y)}{\partial z} = 3\,.$$

Podle Gaussovy-Ostrogradského věty máme

$$I = 3 \int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Musíme tedy vypočíst objem oblasti V. Provedeme substituci

$$\begin{aligned} u &= x - y + z\,,\\ v &= y - z + x\,,\\ w &= z - x + y\,. \end{aligned}$$

Můžeme si buď vyjádřit staré proměnné pomocí nových a poté vypočítat determinant Jacobiho matice nebo rovnou vypočíst jakobián pro přechod z nových proměnných ke starým a vzít jeho inverzi.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4\,.$$

Tedy

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \left[\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{4}\,.$$

Dále si uvědomíme, že když se omezíme na oblast $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, snížíme objem osmkrát (2^3). Oblast $u + v + w \leq 1$, $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$ je jehlan s podstavou tvaru pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami o délce 1, výška jehlanu má délku také 1. Objem jehlanu tedy je $\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Celkem dostáváme

$$I = 3 \int_{|u|+|v|+|w|\leq 1} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{3}{4} 8 \int_{u+v+w\leq 1, u>0, v>0, w>0} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{3}{4} 8 \frac{1}{6} = 1\,.$$

Další zdroje: [3, 7].

12 Diferenciální operátory vektorové analýzy: skalární a vektorové pole, gradient, divergence

Vizte příslušnou kapitolu v [7] a video [5].

13 Diferenciální operátory vektorové analýzy: rotace, Laplaceův operátor.

Vizte příslušnou kapitolu v [7] a video [6].

14 Stokesova a Gaussova-Ostrogradského věta – procvičení

Příklad 14.1. *Spočtěte křivkový integrál*

$$I = \int_C (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je průnik krychle $(0,a)^3$ a roviny $x+y+z = 3a/2$, kladně orientovaný vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

Řešení: Obraz zkoumané křivky je obvod pravidelného šestiúhelníku s vrcholy ve středech hran krychle, které nevycházejí z bodu $[0,0,0]$ ani $[a,a,a]$. Použijeme Stokesovu větu pro pole $\vec{T} = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ a plochu S, kterou tvoří zmíněný šestiúhelník. Tento šestiúhelník leží v rovině kolmé na vektor $(1,1,1)$, jednotkový normálový vektor je tedy $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (křivka je kladně orientovaná vůči vektoru $(1,1,1)$, proto normálu bereme tak, aby její skalární součin s tímto vektorem byl kladný). Vypočteme

$$\operatorname{rot}\vec{T} = -2(y+z, z+x, x+y)\,,$$

proto ze Stokesovy věty získáváme

$$I = \int_S \operatorname{rot}\vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -2\int_S (y+z, z+x, x+y)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}}\int_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

S využitím toho, že v rovině šestiúhelníku platí $x+y+z = 3a/2$ můžeme za tento výraz dosadit a dostáváme

$$I = -4\frac{3a}{2\sqrt{3}}\int_S \mathrm{d}S\,.$$

Integrál v posledním výrazu je roven obsahu pravidelného šestiúhelníku. Délky jeho hran zjistíme z Pythagorovy věty (přepona pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délky $a/2$) a dostáváme $a/\sqrt{2}$. Šestiúhelník se skládá ze šesti rovnostranných trojúhelníků o hraně této délky, polovina těchto trojúhelníků je pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky $a/\sqrt{2}$ a jednou odvěsnou poloviční délky. Jeho výška tedy je

$$v = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,.$$

Obsah šestiúhelníku tedy je $S = 6\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}a^2$. Pro I tedy dostáváme

$$I = -4\frac{3a}{2\sqrt{3}}\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2 = -\frac{9}{2}a^3\,.$$

Příklad 14.2. *Spočtěte plošný integrál*

$$I = \int_S x^3 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,,$$

kde S je „vnější strana“ sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Řešení: Využijeme Gaussovy-Ostrogradského věty pro pole $\vec{T} = (x^3, y^3, z^3)$, jehož divergence je $\operatorname{div}\vec{T} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Pro $\delta\Omega = S$ a kouli Ω se středem v počátku a poloměrem a dostáváme

$$I = \int_{\delta\Omega} \vec{T} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathrm{T} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \,.$$

Pro výpočet tohoto trojného integrálu využijeme sférické souřadnice

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \,, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \,, \quad z = r\cos\theta \,, \quad \det J = r^2 \sin\theta \,.$$

s

$$0 < r < a \,, \quad 0 < \theta < \pi \,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \,.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} I &= 3\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 3\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a 2\pi[-\cos\theta]_0^\pi = \\ &\qquad = \frac{6\pi}{5} a^5 (1 - (-1)) = \frac{12\pi}{5} a^5 \,. \end{aligned}$$

Příklad 14.3. *V magnetickém poli $\vec{B} = (0, 0, kx^2)$ se nachází kruhová smyčka o poloměru a se středem v počátku, ležící v rovině kolmé na směr pole. Určete tok magnetické indukce (magnetický tok)*

a) rovinnou oblastí, jejímž okrajem je smyčka,

b) polosférou, jejíž rovník tvoří smyčka.

Řešení: Začneme bodem a), u kterého je přímý výpočet jednoduchý. Magnetický tok je definovaný jako $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Protože podle zadání smyčka, tedy i oblast v bodu a) leží v rovině kolmé na směr pole, má normála k ploše stejný směr jako pole a skalární součin normály s vektorem magnetické indukce je v bodě o souřadnicích $[x, y, 0]$ tedy kx^2. Počítáme tedy integrál z kx^2 přes kruh o poloměru a se středem v počátku, ležící v rovině xy. Využijeme polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi \,, \quad y = r\sin\varphi \,, \quad \det J = r \,, \quad 0 < r < a \,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \,.$$

Máme

$$\Phi = \int_S kx^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \int_0^{2\pi} kr^2 \cos^2\varphi \, r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a k2\pi\frac{1}{2} = \frac{\pi a^4 k}{4} \,.$$

Využili jsme toho, že integrál z druhé mocniny kosinu přes periodu je polovina periody.

Pro výpočet bodu b) využijeme Gaussovy-Ostrogradského věty. Divergence pole $\vec{B}$ je

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{\partial kx^2}{\partial z} = 0\,,$$

tedy tok pole přes uzavřenou plochu je nulový. Plochy v bodech a) a b) tvoří uzavřenou plochu. Tok přes plochu v bodu b) sečtený s tokem přes plochu a) vzatém s opačným znaménkem (normála vně uzavřené plochy je pro kruh opačná vzhledem k původní normále) dává nulu, proto je tok přes plochu v bodu b) rovný toku v bodu a).

Další zdroje: [1, 2, 3, 10]

Použitá a doporučená literatura

[1] Burda, P., Doležalová, J. Matematika III. VŠB – TU Ostrava. Dostupné z www: https://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaIII/Matematika3_obsah.pdf

[2] Děmidovič, B. P. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Havlíčkův Brod, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[3] Kopáček, J. Příklady z matematiky pro fyziky III. Matfyzpress, Praha, 2002. ISBN 80-85863-95-2.

[4] Kříž, J., Lipovský, J. Použití integrálního počtu ve fyzice a geometrii, studijní text k předmětu Doplňková matematika 2. Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, 2015. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching.html

[5] Lipovský, J. Diferenciální operátory vektorové analýzy. Skalární a vektorové pole, gradient, divergence. Video na MS Stream k předmětu Matematika 1, 2020. Dostupné z www: https://web.microsoftstream.com/video/f94b5437-9597-47d5-955f-2f2084785d8b

[6] Lipovský, J. Diferenciální operátory vektorové analýzy. Rotace, Laplaceův operátor. Video na MS Stream k předmětu Matematika 1, 2020. Dostupné z www: https://web.microsoftstream.com/video/c4d808b1-c303-40a5-93f8-adb1088d0f13

[7] Lipovský, J. Studijní text k předmětu Matematika 1. Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, 2013–2018. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching.html

[8] Lipovský, J. Studijní text k předmětu Matematika 2. Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, 2013–2018. Dostupné z www: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching.html

[9] OnlineSchool.cz. Křivkový integrál druhého druhu. Výuková videa. OnlineSchool.cz. Dostupné z www: https://onlineschool.cz/matematika/krivkovy-integral-druheho-druhu/

[10] Průša, V. Cvičení z Matematiky pro fyziky. MFF UK. Dostupné z www: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~prusv/teaching/2007-2008/zs/cvic2z6.pdf

[11] VUT. Křivkový integrál. Ústav matematiky, FSI VUT. Dostupné z www: https://mathonline.fme.vutbr.cz/Krivkovy-integral/sc-106-sr-1-a-118/default.aspx