Domácí úkol z PSMF1 č. 1

1. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla
   a) $\frac{1-i}{1+i}$,
   b) $(1+i\sqrt{3})^3$,
   c) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.
2. Dokažte $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.
3. Dokažte $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$.
4. Dokažte rovnost $|z+v|^2 + |z-v|^2 = 2(|z|^2 + |v|^2)$.
5. Najděte geometricky množinu bodů, pro které platí
   a) $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$,
   b) $|z - z_1| = |z - z_2|$,
   c) $\mathrm{Re}\, \frac{z-i}{z+i} = 0$.
6. Následující funkce nejsou definované v $z = 0$. Určete, zda je lze v $z = 0$ spojitě dodefinovat.
   a) $\frac{\mathrm{Re}\, z}{z}$,
   b) $\frac{(\mathrm{Re}\, z)^2}{z}$.
7. Dokažte, že funkce $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ komplexní proměnné z je nekonečně diferencovatelná v $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ najděte její n-tou derivaci pro obecné n.

   Návod: Využijte rozkladu na parciální zlomky.
8. Nechť $z = re^{it}$, $f(z) = u(r,t) + iv(r,t)$. Zapište Cauchyovy-Riemannovy podmínky v polárních souřadnicích.

Výsledky většiny příkladů lze nalézt v Kopáčkovi: Příklady z matematiky pro fyziky IV.