

Domácí úkol z PSMF1 č. 2

1. Najděte při zobrazení $w = z^2$, $w = u + iv$, $z = x + iy$

- obraz přímek $y = C$, $C \in \mathbb{R}$;
- obraz přímky $x = y$;
- obraz kružnic $|z| = R > 0$.

2. Najděte nutné a postačující podmínky na konstanty $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkce

$$f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$$

byla holomorfní.

3. Najděte holomorfní funkci $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (na příslušné oblasti), je-li

$$v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}.$$

4. Najděte součty následujících konečných řad ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).

- $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$,
- $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n - 1)x$.

5. Dokažte formule

- $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$,
- $\sin(iz) = i \sinh z$.

6. Najděte reálnou a imaginární část následujících hodnot funkcí

- $\cos(2 + i)$,
- $\operatorname{Ln}(i)$, kde $\operatorname{Ln} z$ je hlavní hodnota logaritmu.

7. Najděte všechna řešení rovnice

$$\sin z - \cos z = i.$$

Výsledky většiny příkladů lze nalézt v Kopáčkovi: Příklady z matematiky pro fyziky IV.