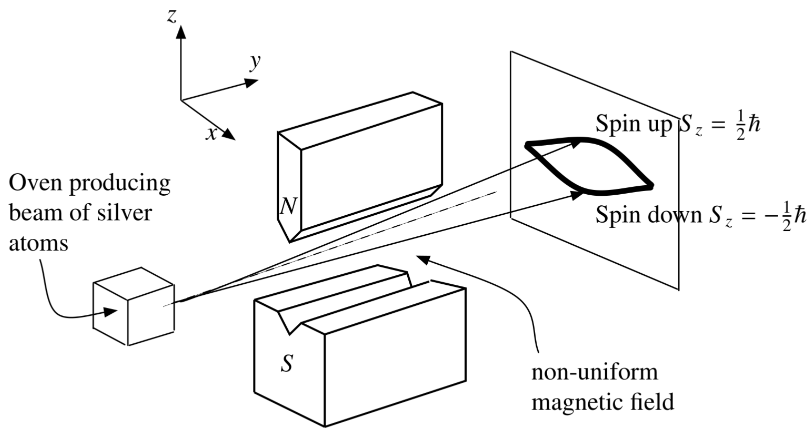


Obrázek 1: Popis Sternova-Gerlachova experimentu. Převzato z [2].

Matematický popis Sternova-Gerlachova experimentu

Jiří Lipovský

verze 1.0

1 Úvod

Následující text popisuje základy matematického popisu Sternova-Gerlachova experimentu. Měl by sloužit především studentům předmětu Seminář matematické fyziky 1 (PSMF1) na Univerzitě Hradec Králové. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Popis experimentu

Sternův-Gerlachův experiment je jedním ze základních pokusů kvantové fyziky. Zvláště sekvenční experimenty, popsané níže, ilustrují, jak neintuitivní mohou být výsledky kvantové mechaniky. Pokus byl poprvé proveden německými fyziky Otto Sternem a Waltherem Gerlachem v roce 1922 ve Frankfurtu. Experiment ukázal, že prostorová orientace momentu hybnosti je kvantovaná. Nyní jej můžeme popsat pomocí spinu, který byl zaveden až o několik let později.

Popis experimentu je následující. Z pícky (oven na obr. 1) vylétává ve směru osy y svazek atomů stříbra (ty mají jeden valenční elektron, proto v následujícím textu budeme uvažovat proud elektronů) a vstupuje do nehomogenního magnetického pole s nehomogenitou ve směru osy z. Elektron má magnetický moment

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{s}\frac{e\hbar}{m}\,,$$

kde $\mathbf{s}$ je spin elektronu (jeho z-ová složka může nabývat hodnot $+1/2$ a $-1/2$), e je jeho náboj, m jeho hmotnost a $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta. Potenciální energie částice v magnetickém poli je

$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}\,,$$

kde $\mathbf{B}$ je magnetická indukce. Sílu, která působí na elektron, určíme jako záporně vzatou derivaci potenciální energie

$$F = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\,,$$

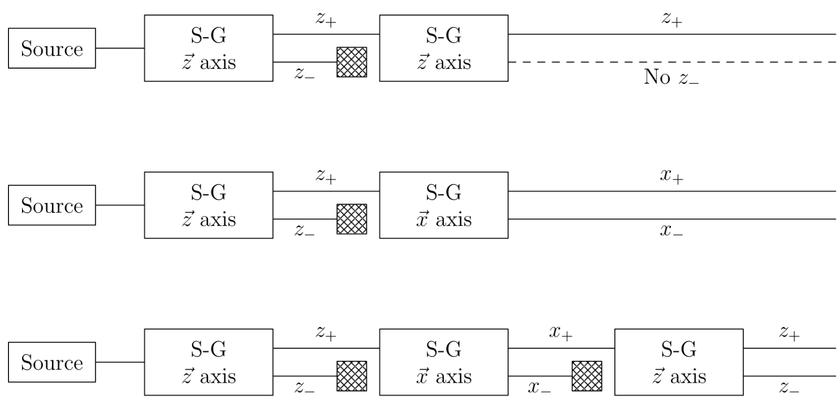
kde indexem z značíme z-ovou složku veličiny. Proto se síla působící na elektron se spinem $+1/2$ a $-1/2$ liší, na jeden z nich působí směrem nahoru, na druhý dolů. Svazek se tedy nehomogenním magnetickým polem rozdělí na dva, v horním svazku mají elektrony spin „nahoru“, v dolním „dolů“. Takto dopadají na stínítko a vytváří dvě různá maxima.

3 Sekvenční Sternův-Gerlachův experiment

Nyní můžeme provést sekvenční experiment, tak že umístíme několik Sternových-Gerlachových aparatur za sebe (viz obr. 2). Na horním obrázku umístíme za sebe dvě aparatury s nehomogenitou magnetického pole ve směru osy z. Po prvním rozdělením svazku elektronů elektrony se spinem dolů zastavíme stínítkem a do druhé aparatury pokračují pouze elektrony se spinem nahoru. Není překvapením, že na stínítku umístěném za druhou aparaturou se objeví pouze elektrony se spinem nahoru.

V experimentu na prostředním obrázku opět elektrony nejdříve projdou aparaturou s nehomogenitou magnetického pole ve směru osy z a ty se spinem dolů jsou zastaveny stínítkem. Dále pokračují do aparatury s nehomogenitou magnetického pole ve směru osy x, kde se svazek opět rozdělí. Také nepřekvapí, že polovina zbývajících elektronů má spin doprava a polovina doleva.

Nejzajímavější je třetí experiment na dolním obrázku. Tam za sebe umístíme aparaturu ve směru osy z, elektrony se spinem dolů odstíníme, pak aparaturu ve směru osy x, elektrony ve směru doleva odstíníme a nakonec přístroj ve směru osy z. Očekávali bychom, že na stínítku se objeví pouze elektrony se spinem nahoru, protože jsme spin dolů odstínili. Realita je ovšem jiná; polovina elektronů bude mít spin nahoru a polovina dolů. To ukazuje, že měření spinu ve směru osy x nám „likviduje“ informaci o spinu ve směru osy z.



Obrázek 2: Sekvenční Sternův-Gerlachův experiment. Převzato z [1].

4 Matematický popis sekvenčního Sternova-Gerlachova experimentu

Použijeme Diracovu bra-ketovou notaci. Bra-vektor $\langle\uparrow z|$, značící stav spin v ose z nahoru, je řádkový vektor se dvěma komplexními složkami. Ket-vektor $|\uparrow z\rangle$ je sloupcový vektor také se dvěma komplexními složkami, který z bra-vektoru získáme tak, že jej transponujeme a komplexně sdružíme. Bracket (anglicky závorka) $\langle\uparrow z|\uparrow z\rangle$ bude skalární součin obou vektorů v $\mathbb{C}^2$, tj. maticové násobení bra-vektoru s ket-vektorem.

Popišme si experiment na horním obrázku. Po průchodu první aparaturou je atom ve stavu $\langle\uparrow z|$. Zajímá nás naměření spinu nahoru druhým přístrojem; to znázorníme výrazem (maticí) $|\uparrow z\rangle\langle\uparrow z|$. Elektron bude ve stavu $\langle\uparrow z|\uparrow z\rangle\langle\uparrow z|$. Bude mít spin nahoru a skalární součin (číslo) $\langle\uparrow z|\uparrow z\rangle$ má následující interpretaci: druhá mocnina jeho absolutní hodnoty je pravděpodobnost naměření spinu nahoru druhou aparaturou. Pokud by nás zajímalo naměření spinu dolů druhou aparaturou, dostali bychom $\langle\uparrow z|\downarrow z\rangle\langle\downarrow z|$. Pravděpodobnost jeho naměření bude $|\langle\uparrow z|\downarrow z\rangle|^2$. Z experimentu víme, že $|\langle\uparrow z|\downarrow z\rangle| = 0$ a $|\langle\uparrow z|\uparrow z\rangle| = 1$. Můžeme tedy například zvolit

$$|\uparrow z\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |\downarrow z\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$
$$\langle\uparrow z| = (1,0), \quad \langle\downarrow z| = (0,1).$$

Obdobně zavedeme pro spin doprava bra-vektor $\langle\uparrow x|$ a doleva $\langle\downarrow x|$. Nyní budeme studovat experiment na prostředním obrázku. Budeme-li mít elektron po průchodu prvním přístrojem ve stavu spin nahoru, bude pravděpodobnost naměření spinu doleva nebo doprava stejná, poloviční. Dostáváme tedy

$$|\,\langle\uparrow z|\downarrow x\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |\,\langle\downarrow z|\downarrow x\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}\,,$$
$$|\,\langle\uparrow z|\uparrow x\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |\,\langle\downarrow z|\uparrow x\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Obdobně jako v prvním případě máme

$$|\,\langle\uparrow x|\downarrow x\rangle\,|^2 = 0\,,\quad |\,\langle\uparrow x|\uparrow x\rangle\,|^2 = 1\,,$$
$$|\,\langle\downarrow x|\downarrow x\rangle\,|^2 = 1\,,\quad |\,\langle\downarrow x|\uparrow x\rangle\,|^2 = 0\,.$$

Pokud zvolíme

$$|\uparrow x\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\,,\quad |\downarrow x\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\,,$$

dostáváme z předchozích rovnic podmínky

$$|b_1|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |b_2|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |a_1|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |a_2|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad \bar{a}_1 b_1 + \bar{a}_2 b_2 = 0\,.$$

Těm odpovídají např. vektory

$$|\uparrow x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\quad |\downarrow x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,,$$
$$\langle\uparrow x| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,,\quad \langle\downarrow x| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\,.$$

Kdybychom posílali elektrony z jiného směru a provedli ostatní možné kombinace experimentu se dvěma přístroji, dostali bychom obdobně pro

$$|\uparrow y\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\,,\quad |\downarrow y\rangle = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

mj. následující vztahy

$$|\,\langle\uparrow z|\uparrow y\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |\,\langle\uparrow x|\uparrow y\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}\,,$$
$$|\,\langle\downarrow x|\uparrow y\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |\,\langle\uparrow y|\uparrow y\rangle\,|^2 = 1\,,$$

Z nich a jim obdobných máme

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2}\,,\quad |c_1 + c_2|^2 = 1\,,\quad |c_1 - c_2|^2 = 1\,,\quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1\,.$$

Tomu například odpovídají vektory

$$|\uparrow y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\,,\quad |\downarrow y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\,,$$
$$\langle\uparrow y| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)\,,\quad \langle\downarrow y| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)\,.$$

Vektory lze vynásobit číslem $e^{i\varphi}$ a změnit jejich fázi, větší volnost už nyní nemáme.

Takto zvolené vektory už předpovídají výsledek experimentu na obrázku dole. Z prvního přístroje vylétávají elektrony se spinem nahoru, druhým projdou jen elektrony se spinem doprava, proto dostáváme amplitudu $\langle\uparrow z|\uparrow x\rangle$, chceme-li dostat množství elektronů se spinem dolů po třetím přístroji, uvažujeme součin $\langle\uparrow x|\downarrow z\rangle$. Celkem tedy máme pravděpodobnost naměření spinu dolů

$$|\langle\uparrow z|\uparrow x\rangle\langle\uparrow x|\downarrow z\rangle|^2 = \left|(0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Toto udává podíl elektronů z těch, které projdou prvním přístrojem (mají tedy spin nahoru) a po průchodu třetím přístrojem mají spin dolů. Zjevně tento výsledek odpovídá experimentu; polovina elektronů se zachytí na stínítku za druhým přístrojem a další čtvrtina bude mít po průchodu třetím přístrojem spin nahoru.

Nyní uvažujme pozměněný experiment, kde za druhým přístrojem není stínítko. Opět se ptáme, jaký podíl z elektronů, které měly za prvním přístrojem spin nahoru, bude mít za třetím přístrojem spin dolů. Nyní musíme uvažovat obě možnosti průchodu druhým přístrojem: spin doprava i doleva. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\begin{aligned}&|\langle\uparrow z|\downarrow x\rangle\langle\downarrow x|\downarrow z\rangle + \langle\uparrow z|\uparrow x\rangle\langle\uparrow x|\downarrow z\rangle|^2 = \\ &= \left|(1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \\ &\qquad = \left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Pokud tedy druhým přístrojem neprovedeme žádné měření, systém se chová tak, jako by zde tento přístroj nebyl.

Spočtěme matici

$$|\uparrow x\rangle\langle\uparrow x| + |\downarrow x\rangle\langle\downarrow x| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Dostáváme jednotkovou matici, proto vidíme, že výraz v předchozím příkladě můžeme nahradit výrazem $\langle\uparrow z|\downarrow z\rangle$ a výsledek plyne rovnou.

Nakonec ještě spočteme maticovou reprezentaci operátoru spinu ve směru osy z, který je definován výrazem

$$\hat{s_z} = \frac{1}{2}|\uparrow z\rangle\langle\uparrow z| - \frac{1}{2}|\downarrow z\rangle\langle\downarrow z|\,.$$

Dostáváme

$$\hat{s_z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1,0) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0,1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\,.$$

Jedná se o jednu z tzv. Pauliho matic vynásobenou jednou polovinou.

5 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 5.1. *Uvažujte, že v experimentu na dolním obrázku bude uprostřed přístroj s nehomogenitou magnetického pole ve směru osy y (zbylé dva jsou ve směru osy z). Za prvním přístrojem zastavíme stínítkem elektrony se spinem dolů ve směru osy z, za druhým přístrojem zastavíme elektrony se spinem dolů ve směru osy y. Určete, jaký podíl elektronů z těch, které po průchodu prvním přístrojem měly spin nahoru, bude mít po průchodu třetím přístrojem spin dolů.*

Příklad 5.2. *Uvažujte příklad 5.1 pouze s tím rozdílem, že za druhým přístrojem není stínítko. Jaká je pravděpodobnost v tomto případě?*

Příklad 5.3. *Vypočtěte matice $|\uparrow y\rangle\langle\uparrow y| + |\downarrow y\rangle\langle\downarrow y|$ a $|\uparrow z\rangle\langle\uparrow z| + |\downarrow z\rangle\langle\downarrow z|$.*

Příklad 5.4. *Vypočtěte zbylé dva operátory spinu $\hat{s}_x = \frac{1}{2}|\uparrow x\rangle\langle\uparrow x| - \frac{1}{2}|\downarrow x\rangle\langle\downarrow x|$ a $\hat{s}_y = \frac{1}{2}|\uparrow y\rangle\langle\uparrow y| - \frac{1}{2}|\downarrow y\rangle\langle\downarrow y|$.*

6 Výsledky příkladů k samostatnému procvičování

5.1 $|\langle\uparrow z|\uparrow y\rangle\langle\uparrow y|\downarrow z\rangle|^2 = 1/4$.
5.2 $|\langle\uparrow z|\downarrow y\rangle\langle\downarrow y|\downarrow z\rangle + \langle\uparrow z|\uparrow y\rangle\langle\uparrow y|\downarrow z\rangle|^2 = 0$.
5.3 V obou případech dostáváme jednotkovou matici.
5.4 Dostáváme násobky Pauliho matic $\hat{s}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

7 Použitá a doporučená literatura

[1] Stern–Gerlach experiment na anglické Wikipedii, dostupné z www: `https://en.wikipedia.org/wiki/Stern%E2%80%93Gerlach_experiment`

[2] J D Cresser, Particle Spin and the Stern-Gerlach Experiment, dostupné z www: `http://physics.mq.edu.au/~jcresser/Phys301/Chapters/Chapter6.pdf`

[3] Todd A. Brun, The Stern-Gerlach experiment and spin, dostupné z www: `http://www-bcf.usc.edu/~tbrun/Course/lecture02.pdf`