

Domácí úkol ze Semináře matematické fyziky (PSMF1)

číslo 1

výsledky jsou bez záruky

Sekce A: Dvojný a trojný integrál: Vypočtete alespoň jeden příklad dle vlastního výběru z této sekce. Kdo počítal v první hodině příklad u tabule, z této sekce počítat nic nemusí. Kdo chce dobrovolně vypočítat více příkladů, může.

1. $\int_M xy \, dx dy$, kde M je dána jako $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y = 4$.
2. $\int_M (x + y) \, dx dy$, kde M je dána jako $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y = 6$.
3. $\int_M (x^3 + y^2) \, dx dy$, kde M je dána jako $x \geq 0, y \geq 0, 3x + y = 6$.
4. $\int_M (x^2 + y) \, dx dy$, kde M je ohraničena křivkami $y = \frac{1}{2}x, y = 2x, xy = 2$ v polovině $x \geq 0$.
5. $\int_M (x + y)^2 \, dx dy$, kde M je ohraničena křivkami $y = x, y = x^2$.
6. $\int_M xy^2 \, dx dy$, kde M je ohraničena křivkami $y = x^2, y^2 = x$.
7. $\int_M \frac{1}{\sqrt{2a-x}} \, dx dy$, kde M je ohraničena kratším obloukem kružnice se středem $S[a, a]$ a poloměrem $r = a$ a osami souřadnic.
8. $\int_M e^{y^4} \, dx dy$, kde M je ohraničena křivkami $y = 1, x = 0, x = y^3$.
9. $\int_M (6x - y) \, dx dy$, kde M je ohraničena křivkami $y = 1, x = y^2, x = -\sqrt{y}$.
10. $\int_M \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \, dx dy dz$, kde M je ohraničena rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Návod: Meze určíte např. pomocí průmětů tělesa do osy x , do roviny xy a pomocí roviny ohraničující těleso.

11. $\int_M x \, dx dy dz$, kde M je ohraničena rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + z = 1$.

Návod: Meze určíte např. pomocí průmětů tělesa do osy x , do roviny xy a pomocí roviny ohraničující těleso.

12. $\int_M (2x + 2y + z + 3)^2 \, dx dy dz$, kde M je ohraničena rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 2y + z = 1$.

Návod: Meze určíte např. pomocí průmětů tělesa do osy x , do roviny xy a pomocí roviny ohraničující těleso.

Výsledky: 1. $\frac{8}{3}$; 2. 5; 3. $\frac{204}{5}$; 4. $\frac{17}{6}$; 5. $\frac{71}{420}$; 6. $\frac{3}{56}$; 7. $a\sqrt{a}(2\sqrt{2} - \frac{8}{3})$; 8. $\frac{1}{4}(e-1)$;
 9. $-\frac{31}{20}$; 10. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$; 11. $\frac{1}{48}$; 12. $\frac{47}{80}$.

Sekce B: Substitute ve dvojném a trojném integrálu: Vypočtete alespoň jeden příklad dle vlastního výběru z příkladů 1 až 3 a alespoň jeden z příkladů 4 až 12 v této sekci. Kdo chce dobrovolně vypočítat více příkladů, může.

1. Zvolte vhodnou transformaci souřadnic a určete plošný obsah části roviny omezené křivkami: $xy = 1$, $xy = 3$, $y = 2x$, $y = 4x$, $x, y > 0$.
2. Zvolte vhodnou transformaci souřadnic a určete plošný obsah části roviny omezené křivkami: $xy = 2$, $xy = 3$, $y = x^2$, $y = 5x^2$, $x, y > 0$.
3. Zvolte vhodnou transformaci souřadnic a určete plošný obsah části roviny omezené křivkami: $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 3x^3$, $y = 4x^3$, $x, y > 0$.
4. Pomocí polárních souřadnic vypočtete $\int_M xy \, dx dy$, kde M je určena vztahy $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.
5. Pomocí polárních souřadnic vypočtete $\int_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$, kde M je určena vztahy $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.
6. Pomocí polárních souřadnic vypočtete $\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$, kde M je určena vztahy $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.
7. Pomocí polárních souřadnic vypočtete $\int_M \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx dy$, kde M je určena vztahy $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
8. Pomocí polárních souřadnic vypočtete $\int_M \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx dy$, kde M je určena vztahem $x^2 + y^2 \leq ax$.
9. Pomocí polárních souřadnic vypočtete $\int_M x^2 y \, dx dy$, kde M je určena vztahy $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.
10. Pomocí sférických souřadnic vypočtete $\int_M (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, kde M je určena vztahy $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.
11. Pomocí sférických souřadnic vypočtete $\int_M z \, dx dy dz$, kde M je osmina koule s poloměrem 1 v 1. oktantu.
12. Pomocí válcových souřadnic vypočtete $\int_M (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, kde M je určena vztahy $x^2 + y^2 \leq 2z$, $z \leq 2$.

Výsledky: 1. $\ln 2$; 2. $\frac{1}{3}\ln 5$; 3. $\frac{3}{4}\ln \frac{4}{3}$; 4. -30 ; 5. $-6\pi^2$; 6. $\frac{7}{6}\pi$; 7. $\frac{\pi}{4}(10\ln 10 - 9)$;
 8. $\frac{a^3}{3}(\pi - \frac{4}{3})$; 9. $-\frac{341}{5}$; 10. $\frac{8\pi}{15}(3^5 - 2^5)$; 11. $\frac{\pi}{16}$; 12. $\frac{16\pi}{3}$.