Úvod, proč obecná relativita?

EM / G

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e^2}{r^2}\right) \Big/ \left(\frac{G m_e^2}{r^2}\right) = \frac{G m_e^2}{(4\pi\varepsilon)\, e^2}$$

silná j.	EM	slabá j.	G
1	10^{-3}	10^{-15}	10^{-42}
malé vzdál. eq.	velké $\sim\frac{1}{r^2}$	malé vzdál. eq.	velké $\frac{1}{r^2}$ dalekodosahová
dif.	diferenciální	dif.	univerzální

PROČ VĚCI PADAJÍ DOLŮ?

- Aristoteles: 4 živly (zemi, voda, vzduch, oheň)
- Koperník, Bruno, Kepler, Galilei (→ klas. princip relativity, princip ekvivalence) (stejné zrychlení)
- Newton
- elmag. teorie (Faraday, Maxwell, Lorentz, Herz)
- STR (1905)

CO JE NA OTR NOVÉHO?

- pole „jeviště": jeho vlastnosti nejsou fixovány (kromě zákl. mat. předpokl.)
  - prostoročas nemusí být Minkowského ⇒ nemusí být např. nekonečný
  - Ernst Mach: v myšl. konstr. nemají být absol. pojmy (tj. ne $A \to B$, ale $A \leftrightarrow B$)
- popis gravitační interakce: Newton: dodatečná struktura: vek. pole grav. síly
  - × popisuje se pomocí vlastností podloží ⇒ gravit. inter. je geometrizována

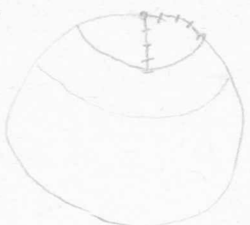
(geometrizovatelnost možná díky univerzalitě: např. pohyb tělesa nezávisí na charakteristikách tělesa)

CO JE NA OTR NEZVYKLÉHO?

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

STR: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$

- invariant: z nějakého tenzoru udělat něco, co nemá žádný index (př. $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$)
- samotné složky nemají invariant. význam! (geometrický, fyzikální)



- možnost ověřit, zda prostor je euklidovský: konstruovat sféry o urč. poloměrech: určovat [illegible] (objem)

CO NOVÉHO PŘINESLA OTR?

1) černé díry
2) prostoročas. singularity
3) gravitační vlny
4) dynamický vesmír

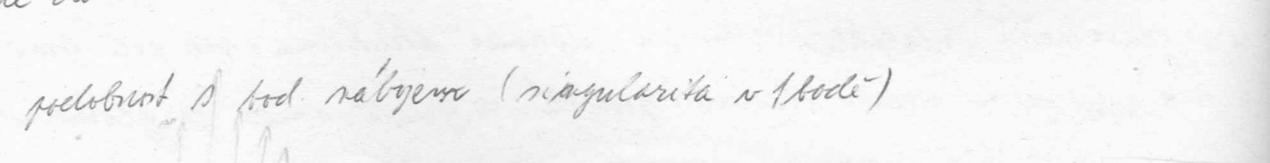
ad 1): John Michell (1783): možná ∃ tělesa s únik. rychl. $> c$

úník. rychl.: $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \overset{?}{>} c \Leftrightarrow r < \frac{2GM}{c^2} = r_g$ gravitační poloměr

→ v OTR vyjde stejně

ale v OTR: vše, co je pod r_g se za něj nedostane, v klas. případě ano, ale ne do ∞

ad 2) podobnost s bod. nábojem (singularita v 1 bodě)



bod. náboj

nelze pouze zkoumat el. pole v tomto bodě, ale ostat. fyzika ano

OTR

zakřivení celého podloží ⇒ nedá se dělat žádná fyzika

- konzistentně vzato: i pouhé elmag. pole nekonečné ⇒ problém → nekonečná energie elmag. pole ⇒ nekonečné zakřivení prostoročasu ad 3): vlnové rovnice ⇒ indukce vln ve všech ostatních veličinách

ad 4): Friedmann: vyřešení Einst. rovnic ⇒ řešení závislé na čase vyhovuje lépe (1922–24) ⇒ dynamické řešení

Hubble (1929): vesmír je dynamický: červený posuv: $v = H l$ (v … rychl., H … Hubb. konst., l … vzdálenost), $H = H(t)$

„KLASICKÉ" EXPERIMENTY

- 1919: Eddington: měření ohybu světel. paprsků kolem Slunce
  - dle OTR: odklon je 2x větší než v klas. případě
- 1929: Hubble
- 1960: Pound, Rebka (22,6 m)
  - měření frekven. posuvu fotonů
  $$\left|\frac{\Delta \nu}{\nu}\right| \sim 10^{-15}$$
  (pomocí Mössbauerova jevu)
- 1965: Penzias, Wilson: reliktní záření (předpovězené 1940: Gamow)
- 1859: Le Verrier: stáčení perihelia Merkuru
  $+43''$/stol. (klas. $5000''$/stol.)
- 1962, 63, 68
  - RTG-zdroje
  - kvasary (aktivní galaktická jádra: interakce čer. díry s prostředím)
  - pulsary (rychle rotující neutr. hvězdy)

APLIKAČNÍ OBLASTI

- velmi silná gravit. pole (nehomogenní)
- kosmologie: na malé části prostoru nepoznáme zakřivení
- „zrnitá" struktura prostoročasu

$$l_{Planck} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \doteq 1{,}6\cdot 10^{-33}\ \mathrm{cm}$$

$$\rho \sim R = \frac{1}{a^2}$$ (ρ … hustota, R … křivost, a … char. škála)

$$t_{Planck} = \frac{l_{Planck}}{c} = 0{,}5\cdot 10^{-43}\ \mathrm{s}$$

$$\rho_{Planck} = \frac{c^5}{G^2\hbar} = 5\cdot 10^{93}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$$ (srovnej: $\rho_{jaderná} = 2\cdot 10^{14}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$)

Výchozí principy OTR

1) PRINCIP EKVIVALENCE

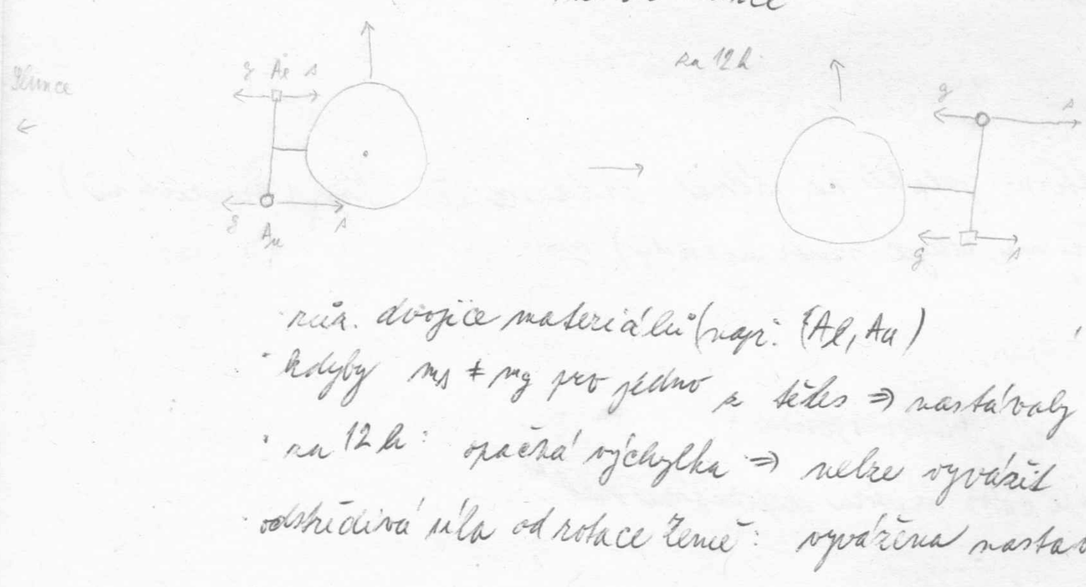
- G. Galilei: v daném grav. poli: ∀ tělesa se stejným zrychlením
- I. Newton:

$$m\vec{a} = -\frac{G M m}{r^2}\vec{r}_0 \rightarrow \text{zrychl. nezáv. na charakterist. tělesa}$$

- m_s - setrvačná hmotnost = míra odporu tělesa proti zrychlování
- m_g - gravitační hmotnost = míra reakce na gravit. pole
- newtonovská fyz.: nevysvětluje ekvivalenci, rovnost zdánlivě náhodná

$m_s = m_g$ (případně $m_s \sim m_g$ → konstanta G)

- snahy o vysvětlení, měření:
  - Newton: doba kmitu mat. kyvadla: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{m_s}{m_g}}$ ... přesnost 10^{-3}
  - Bessel: kyvadlo: 10^{-5}
  - torzní váhy: Eötvös [ë'tvöš]: 10^{-9}, Dicke [diki] 10^{-11}, Braginsky 10^{-12}, dnes 10^{-17}
- pohyb Země (s váhami) kolem Slunce



- např. dvojice materiálů (např.: Al, Au)
- kdyby $m_s \neq m_g$ pro jedno z těles ⇒ nastávaly by kmity s periodou
- za 12 h: opačná výchylka ⇒ nelze vyvážit
- odstředivá síla od rotace Země: vyvážena nastavením vah

- protony, neutrony, elektrony
- interakce mezi nimi

přitažlivá interakce ⇒ hmotnostní defekt $\Delta E = c^2 \Delta m$ (částice u sebe ...)

- platí princip ekvivalence i pro ostatní interakce?
- při rychlosti v: $m = m_0\gamma$ → splňují to m_s i m_g?

- slabý princip ekvival.: platí pro ∀ interakce kromě gravitační
- silný princip ekvival.: + gravit. interakce

$-\frac{G m_1 m_2}{\hbar c}$

2 jader. protony: 10^{-39}

2 těl. 1kg 1m od sebe: 10^{-27} } nemožné měřit

Měsíc + Země: 10^{-11} → lze měřením dráhy Měsíce

LOKÁLNÍ INERCIÁLNÍ SYSTÉM

- uvažujme pád několika volných těles v gravit. poli; (BÚNO v klidu)

- pozorovatel v padajícím výtahu ⇒ „zrušení" gravit. pole : gravit. pole nelze odstranit, ale odtransformovat
- ekvivalence situací: systém inerciální bez gravit. pole ⇒ nelze rozlišit kvalitativně experimenty
- obdobně: visící výtah v grav. poli ⟺ rovnom. zrychlení $-\vec{g}$

⇒ nové znění principu ekvivalence:

„ve volně padajících systémech platí STR" (lokálně!)

- platí pouze lokálně, pro nehomog. gravit. pole lze grav. pole „~~odt~~ odtransf." např. pouze ve středu výtahu

- prin. ekviv. „přesně": v ∀ bodě libovol. prostoročasu lze zavést lokální inerciální systém (LIS) (tj. takový kartézský vztažný systém, že v dostat. malé obl. kolem uvažovaného bodu v něm mají ∀ fyz. zákony stejný tvar jako v STR)
- dostatečně malá oblast - co to je?
- pokud ∃ ~~[illegible]~~ prostor. singularita ⇒ pak v tomto bodě nelze LIS zavést
- v ∀ bodě ∃ nekonečně mnoho iner. systémů, ale v jiném bodě je jiný systém, ve kt. volný pád

2/ PRINCIP OBECNÉ KOVARIANCE (relativity)

$\forall$ - vůči všem vztaž. systémům mají fyzikální zákony stejný tvar

- kovariance = invariance co do formy

„tenzor = tenzor"

- transformace $dx'^{\alpha} = \underbrace{\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}}_{\text{matice přechodu}} dx^{\alpha}$

skalár: $\Phi'(x') = \Phi(x)$

(kontravariantní) vektor: $A'^{\alpha}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}(x)$

kovariantní vektor (kovektor, lin. forma): $B'_{\alpha}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} B_{\mu}(x)$

metrický tenzor: 1/ $g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}$ skalární součin (indefinitní)

2/ $A^{\mu} g_{\mu\nu} = A_{\nu}$: přesouvání indexů

symetrický v indexech $\mu\nu$ $\quad g^{\beta\alpha} B_{\beta} = \cancel{A} B^{\alpha}$

$\Rightarrow g^{\alpha\beta}$ je inver. matice k $g_{\mu\nu}$ (vždy): $g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\rho} = \delta^{\alpha}_{\rho}$

plyne z „rozumných" vlastností duálu

SHRNUTÍ – FORMULACE ZÁKONŮ V OTR

(i) zákon platí v STR

(ii) PE $\Rightarrow$ zákon platí v libov. LISu

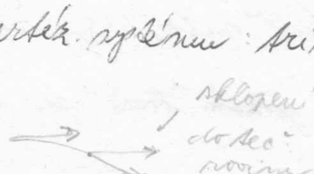
(iii) POK $\Rightarrow$ zapiš zákon v obecně kovar. tvaru

+ nutno omezit počet proměnných (nelze použít rotaci a zrychl. vůči iner. syst.)

- princip minimální vazby (později)

PARALELNÍ PŘENOS

- dán vektor: cílem udělat rovnob. vektor v libov. bodě
- v kartéz. systému: triviální (rovnoběžný posun)



pro bod blízko: přenesu eukleidovsky a sklopím do t. roviny

→ postupuji takto dále

→ diferen. rce

PE: ∃ LIS (souřadnice $\{\xi^\alpha\}$)

složky v LISu se stříškou

podél křivky $\xi^\alpha = \xi^\alpha(p)$ platí:

$$\frac{dV^{\hat\alpha}}{dp} = 0$$ (vektor)

přechod ke glob. souřadnicím: $\xi^\alpha \to x^\mu$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu\right) = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{dp} V^\mu + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dV^\mu}{dp} = 0 \quad \Big/ \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV^\rho}{dp} + \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{=\Gamma^\rho_{\mu\nu}} V^\mu \frac{dx^\nu}{dp} = 0} \qquad (*)$$

$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ složky afinní konexe

→ obyč. dif. rce 1. řádu ⇒ poč. podmínky: vektor v poč. bodě $V^\mu(p=0)$

- nutno zadat křivku: po růz. křivkách - různé výsledky

- při jakékoli silném homog. gravitač. poli: ∃ GIS ⇒ STR 9.3.
- jaká je velikost rozneseného vektoru?

v LISu: $$\eta_{\alpha\beta} V^{\hat\alpha} V^{\hat\beta} = \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}}_{g_{\mu\nu}} V^\mu V^\nu = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$$

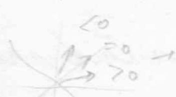
V čtyřvektor

$g_{\mu\nu}$ → glob. metrič. tenzor — symetrický tenzor

< 0 časupod. vektor
= 0 světelný vektor
> 0 prostorupod. vek.

rozdíl od STR: světelný kužel je v každém bodě jiný!! × STR: všude $\eta_{\alpha\beta}$

OTR: metrika závisí na souřadnicích



tento obr. možný pouze v LISu

VZTAH $g_{\mu\nu}$ a $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$

- pro numer. řešení (*) nutno znát $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$
- veškeré vlastnosti prostoročasu: dány $g_{\mu\nu}$ ⇒ Γ lze vyjádřit pomocí g

$$g_{\mu\nu,\rho} = \eta_{\alpha\beta}\underbrace{\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho}}_{=\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\underbrace{\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho}}_{=\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}}$$

$$\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\sigma}\underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\tau}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\rho}}_{\Gamma^\alpha_{\mu\rho}} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho}$$

$$g_{\mu\nu,\rho} = g_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} + g_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} \qquad \oplus$$

cz:

$$g_{\rho\mu,\nu} = g_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} + g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \qquad \oplus$$

$$g_{\nu\rho,\mu} = g_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} \qquad \ominus$$

symetričnost g, Γ v dol. indexech: lze odečíst

$$\Rightarrow g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu} = 2 g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} \underset{\text{indexu}}{\overset{\text{snížení}}{=\!=}} 2\Gamma_{\mu\nu\rho} \dots$$

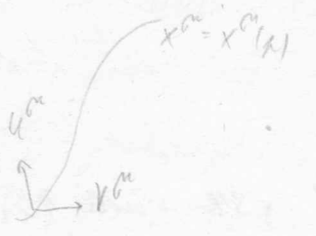
$g_{\sigma\alpha} g^{\sigma\mu} = \delta^\mu_\alpha$

$\downarrow$ Christoffelovy symboly 1. d

$$\Gamma^\alpha{}_{\nu\rho} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu}\right)$$

$\downarrow$ Christoffelovy symboly 2. druhu

- obecně na varietě nemusí $\exists$ metrika $\Rightarrow$ název Ch. symb. nemá smysl



přenášejme 2 obecné vektory u, v po dané křivce: jak se mění skalár souč

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu\right) = g_{\mu\nu,\rho}\frac{dx^\rho}{d\lambda}u^\mu v^\nu + g_{\mu\nu}\underbrace{\frac{du^\mu}{d\lambda}}_{-\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}u^\kappa \frac{dx^\lambda}{d\lambda}} v^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu \underbrace{\frac{dv^\nu}{d\lambda}}_{-\Gamma^\nu_{\kappa\lambda}v^\kappa\frac{dx^\lambda}{d\lambda}} =$$

$$\underset{\text{indexů}}{\overset{\text{přenášení}}{=\!=}} \underbrace{\left(g_{\mu\nu,\rho} - g_{\tau\nu}\Gamma^\tau{}_{\mu\rho} - g_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\right)}_{0}\frac{dx^\rho}{d\lambda}u^\mu v^\nu = 0$$

PARALELNÍ PŘENOS KOVEKTORU

$$0 = \frac{d}{dp}\underbrace{(u_\nu V^\nu)}_{\text{vzniklo zúžením indexu}} = \frac{du_\nu}{dp} V^\nu + u_\nu \underbrace{\frac{dV^\nu}{dp}}_{-\Gamma^\nu_{\alpha\beta} V^\alpha \frac{dx^\beta}{dp}} \overset{\text{vytkneme } V^\alpha \text{ přeznačíme}}{=\!=\!=} \Big(\underbrace{\frac{du_\alpha}{dp} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u_\nu \frac{dx^\beta}{dp}}_{\Rightarrow\ =0}\Big) \underset{\text{libovolný}}{V^\alpha}$$

$$\frac{du_\alpha}{dp} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u_\nu \frac{dx^\beta}{dp} = 0 \qquad \text{kovektor}$$

$$\frac{dV^\alpha}{dp} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} V^\nu \frac{dx^\beta}{dp} = 0 \qquad \text{kontravektor}$$

$\Rightarrow$ odsud p.p. obecného tenzoru: za $\forall$ horní index $+\Gamma^\alpha_{\nu\beta}$

$\forall$ dolní –"– $-\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$

PARALELNÍ PŘENOS A PRINCIP OBECNÉ KOVARIANCE

$$\frac{dV^\mu}{dp} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} V^\alpha \frac{dx^\beta}{dp} = 0 \qquad \text{změna souřadnic}$$

$$\frac{dV'^\mu}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu\right) = \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\frac{dx^\rho}{dp} V^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dV^\nu}{dp}\right) \qquad (1)$$

proto: $\frac{dV'^\mu}{dp}$ není vektor! (vadí první člen) pro nelineár. transf. $x' \to x$

$$\left.\begin{aligned} V'^\alpha &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (2) \\ \frac{dx'^\beta}{dp} &= \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}\frac{dx^\delta}{dp} \quad (3) \end{aligned}\right\} \text{ jsou vektory} \Rightarrow \Gamma \text{ nebude tenzor}$$

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\alpha}\right)}_{=\ \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^\kappa}\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}} =$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}\underbrace{\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda}}_{=\ \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi^2}{\partial x^\kappa} = \delta^\sigma_\kappa$$

odpovídá transformaci tenzoru 3. řádu

celkem:

$$\delta^\lambda_\delta \quad \delta^\varkappa_\gamma$$

levá strana:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dV^\nu}{dp}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}\Gamma^\sigma_{\varkappa\lambda}}_{(4)}\underbrace{\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}V^\gamma}_{(2)}\underbrace{\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}\frac{dx^\delta}{dp}}_{(3)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\frac{dx^\rho}{dp}V^\nu}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}}_{(4)}\underbrace{\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}V^\gamma}_{(2)}\underbrace{\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}\frac{dx^\delta}{dp}}_{(3)}$$

2. člen: $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma\delta}V^\gamma\frac{dx^\delta}{dp}$ ($\sigma = \nu$)

$$\text{levá strana} = \overbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\left(\frac{dV^\nu}{dp} + \Gamma^\nu_{\gamma\delta}V^\gamma\frac{dx^\delta}{dp}\right)}^{\text{transformuje se hezky}} + \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}\right)$$

ze 3. a 4. členu vytkneme $\frac{dx^\delta}{dp}V^\gamma$

$\cdot\ \frac{dx^\delta}{dp}V^\gamma$

dokážeme, že druhá ( ) je rovna nule:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\alpha \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial x^\rho}$$

POZOR: $\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha}\right)$ není $\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}$

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} = 0 \quad \Big/ \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}$$

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} = 0$$

$\rho \to \gamma \quad \nu \to \delta \quad$ symetrie v $\alpha, \beta \Rightarrow$ totéž

v STR $\Gamma^\nu_{\gamma\delta} = 0 \Rightarrow$ rce $\frac{dV^\nu}{dp} = 0$: správná rce pro přenos v kartézském systému

Rovnice geodetiky

- pasivní zákon (např. pohyb. rce) → „náboj" se pohyb. vlivem pole

× - aktivní zákon (např. Maxw. rce, polní rce) → „náboj" vytváří pole

lehké / nevyzařuje!

1. pohyb volných testovacích částic
   - → působí na ni pouze gravit. pole
     - → částice nepřispívá ke grav. poli
       - → bodový objekt (monopól)

tečný vektor k $\xi^\alpha(\tau)$

LIS: $\{\xi^\alpha\}_{\alpha=0}^{3}$: $\dfrac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2}=0$ $\qquad p=\tau;\ V^\alpha \equiv \dfrac{d\xi^\alpha}{d\tau};\ \dfrac{dV^\alpha}{dp}=0$

vlastně ~ rce pro PP $\Leftrightarrow \dfrac{dV^\sigma}{dp}+\Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda}V^\kappa\dfrac{dx^\lambda}{dp}=0$

→ afinní parametr

globální souřadnice $\{x^\sigma\}_{\sigma=0}^{3}$

rce prop. $V^\sigma=\dfrac{dx^\sigma}{d\tau}$, $p=\tau$ $\Rightarrow$

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2}+\Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}=0 \qquad \text{rce geodetiky}$$

- obyč. dif. rce 2. řádu : poč. podm.: $x^\sigma(\tau=\tau_0)$; $\dfrac{dx^\sigma}{d\tau}(\tau=\tau_0)$
- $\Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda}$ asi nějak odpovídají gravit. silám

NORMALIZACE TEČNÉHO VEKTORU, TYPY GEODETIK

$$\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}=g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=-\frac{ds^2}{d\tau^2}=-c^2=-1$$

„geometrizované jednotky"

- geometrizované jednotky: $c=1$, $G=1$
- pro vektor, kt. není časupodobný, není τ vhodným parametrem
- pro jiné typy geodetik: jiné parametry (pro prostorupod.: s délka oblouku / časoprost. interval
- obecně: parametr p : $p\to p'(p)$: pro lin. transformaci nemění rce tvar

$\Rightarrow$ volnost až na lin. transformaci

$$\frac{d}{dp}\left(g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}\right)=0 \ \Leftarrow\ \frac{d}{dp}\left(g_{\sigma\nu}V^\sigma V^\nu\right)=0 \ \text{(viz dříve)} \ \Leftarrow\ \text{rce pro PP + Christof. symb.}$$

└ platí vždy podél geodetiky, opač. implikace neplatí!!

$\Rightarrow$ geodetika nemůže měnit charakter!

geod.: zobecnění rovnom. přímoč. poh. $\Rightarrow$ zobecnění přímky

2. geodetika jako nejrovnější křivka

rce pro PP: $\frac{dV^\mu}{dp} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} V^\varkappa \frac{dx^\lambda}{dp} = 0$

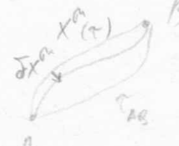
speciálně:
teč. vektor: $V^\mu = \frac{dx^\mu}{dp} \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\frac{dx^\varkappa}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0$

řešení této rce je křivka, jejíž teč. vektor má stále stejný směr

$\Rightarrow$ geodetika má vlast. přímky

3/. geodetika jako extremální spojnice

- SÚHO: $p = \tau$ (ostatní obdobně)
- 2 události A, B: variačně hledáme extremál. spojnici



symetrie $g_{\sigma\nu}$

$$\delta\tau_{AB} = \delta\int_A^B \sqrt{-g_{\sigma\nu}\,dx^\sigma dx^\nu} = \int_A^B -\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{g_{\sigma\nu,\rho}\,\delta x^\rho\, dx^\sigma dx^\nu + 2\, g_{\sigma\nu}(\delta dx^\sigma)\, dx^\nu}{\underbrace{\sqrt{-g_{\sigma\nu}\,dx^\sigma dx^\nu}}_{d\tau}} = \frac{d\tau}{d\tau}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\int_A^B \left(\frac{1}{2}\, g_{\sigma\nu,\rho}\,\delta x^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d(\delta x^\sigma)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) d\tau =$$

v konc. ~~člen~~ bodech $\delta x^\sigma = 0 \Rightarrow$ okraj. člen p. p. vymizí

$$= \int_A^B \left[\frac{d}{d\tau}\left(g_{\sigma\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\delta x^\sigma - \frac{1}{2}\, g_{\sigma\nu,\rho}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\rho\right] d\tau =$$

$$= \int_A^B \left(g_{\rho\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + g_{\rho\nu,\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2}\, g_{\sigma\nu,\rho}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\delta x^\rho\, d\tau$$

$$\left(g_{\rho\nu,\sigma} - \frac{1}{2}\, g_{\sigma\nu,\rho}\right)\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

nahradíme sym. částí

symetrický v $\sigma\nu$

symetrický

$$\left(g_{\rho\nu,\sigma} - \frac{1}{2}\, g_{\sigma\nu,\rho}\right)\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(g_{\rho\nu,\sigma} + g_{\rho\sigma,\nu} - g_{\sigma\nu,\rho}\right)}_{\Gamma_{\rho\nu\sigma}}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$= \int_A^B \Big(g_{\rho\nu} \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \underbrace{\Gamma_{\rho\nu\mu}}_{\substack{\| \\ g_{\rho\nu}\Gamma^\nu{}_{\sigma\mu}}} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\Big)\, \delta x^\rho d\tau = \int_A^B \underbrace{g_{\rho\nu}\Big(\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu{}_{\sigma\mu} \frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\Big)}_{=0}\delta x^\rho d\tau$$

požaduji $\int = 0 \Rightarrow (\,) = 0 \Rightarrow$ rce geodetiky $\Rightarrow$ geodetika je extremální spojnice bodů

NEWTONOVSKÁ LIMITA RCE GEODETIKY

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \qquad \text{+ rce geodetiky}$$

Newton. limita (i) slabé gravit. pole: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ← malé se i derivacemi; ve vhodných souřad. — malá změna; do $\mathcal{O}(h^2)$

~~požadujeme~~ pak: $g^{\alpha\nu} = \eta^{\alpha\nu} - h^{\alpha\nu}$

neboť požadujeme $\delta^\alpha_\mu = g_{\mu\nu}g^{\alpha\nu} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\alpha\nu} - h^{\alpha\nu}) = \delta^\alpha_\mu -$

$$- \underbrace{\eta_{\mu\nu} h^{\alpha\nu}}_{=-h^\alpha_\mu} + \underbrace{h_{\mu\nu}\eta^{\alpha\nu}}_{+h^\alpha_\mu} = \delta^\alpha_\mu$$

můžeme snižovat indexy pomocí $\eta_{\mu\nu}$ (do řádu $\mathcal{O}(h^2)$)

$$h^\alpha{}_\mu = g_{\mu\nu} h^{\alpha\nu} = \eta_{\mu\nu}h^{\alpha\nu} + \mathcal{O}(h^2)$$

tzn. h „žije" v Minkov. postoročasu

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\sigma}}_{\eta - h} \underbrace{\Big(g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}\Big)}_{\sim \mathcal{O}(h)} = \frac{1}{2}$$

(ii) „pomalost": $\left|\frac{dx^i}{d\tau}\right| \ll \left|\frac{dt}{d\tau}\right|$

prost. složky 4rychl.; čas. sl. 4rychl.

tj. $\left|\frac{dx^i}{dt}\right| \cdot \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \ll \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \iff |v^i| \ll 1 (=c)$

($dt = dx^0$; $|v^i| \ll 1$; $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$ pokud nejde o singularitu)

$$\rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \qquad \left.\begin{matrix}\alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0\end{matrix}\right\} \text{ tyto členy jsou malé}$$

členy $\alpha = 0, \beta \neq 0$; $\alpha \neq 0, \beta = 0$ také malé, neboť $\Gamma = \mathcal{O}(h)$

(iii) pro pohodlnost: předpoklad stacionárního pole:

$$g_{\sigma\gamma,0} = 0$$

nemá tenz. rce (závisí na souřad.!!!)

lépe: $\exists$ takové souřad., že $g_{\sigma\gamma,0} = 0$ (obecně nemusí nutně $\exists$)

$$\Gamma^{\sigma}{}_{00} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left(\underset{0}{g_{\alpha 0,0}} + \underset{0}{g_{0\alpha,0}} - g_{00,\alpha} \right) = -\frac{1}{2} g_{00}{}^{,\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} \left(-h_{00,\alpha} \right) = -\frac{1}{2} h_{00}{}^{,\sigma}$$

? nezáv. na α

$\sigma = 0 \Rightarrow \Gamma^{0}{}_{00} = 0$, neboť $g_{\alpha\beta}{}^{,0} = 0$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \text{konst.}$$

$\sigma = m$: $$\frac{d^2 x^m}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h_{00}{}^{,m} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Srovnej: $$\frac{d^2 x^m}{dt^2} = -\Phi^{,m}$$ Newtonova rce

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^m}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{d^2 x^m}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{dx^m}{dt}\underset{0}{\frac{d^2 t}{d\tau^2}} = \frac{1}{2} h_{00}{}^{,m} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad \Big/ : \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 x^m}{dt^2} &= \frac{1}{2} h_{00}{}^{,m} \\ \ddot{\vec{x}} &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} \end{aligned}}$$

$$-2\nabla\Phi = \nabla h_{00} \Rightarrow h_{00} = -2\Phi + \text{konst.}$$

normalizace : konst $= 0$ $\rightarrow$ h_{00} v $\infty = 0$ (v ∞ Minkov. geometrie)

Φ v $\infty = 0$ (vhodně pozdržaná normalizace)

$$g_{00} = -1 - 2\Phi$$

$$-1 - \frac{2\Phi}{c^2} \ll 1$$

Př.: povrch protonu: $\frac{|\Phi|}{c^2} \approx 10^{-39}$

povrch Země: $\frac{|\Phi|}{c^2} \approx 10^{-9}$

povrch Slunce $\frac{|\Phi|}{c^2} \approx 10^{-6}$

bílý trpaslík $\approx 10^{-4}$

pot. neutr. hvězdy $\gtrsim 10^{-1} / 10^{-2}$

" " černé díry $\gtrsim 10^{0} \div 10^{-1}$

$$\frac{|\Phi|}{c^2} = \frac{GM}{c^2 r} \qquad \overset{\text{Schw. pol.}}{r_g} = \frac{2GM}{c^2} \Leftrightarrow |\Phi| = 0{,}5$$

23.3.

dilatace času a frekvenční posun v gravitačním poli

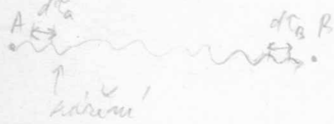
$$ds^2 = -\overset{=1}{c^2}\, d\tau^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}\, dt$$ podle $x^0 = t$

v STR: $$d\tau = \sqrt{1-\underbrace{\delta_{ij}v^i v^j}_{v^2}}\, dt = \frac{1}{\gamma}dt$$

vůči sobě se nepohybující hodiny lze vždy synchronizovat ($d\tau = dt$)

v OTR: lze synchronizovat, jen pokud g_{00} nezávisí na poloze (obecně ne!)

$\Rightarrow$ časová souřadnice nemá takový fyzik. smysl jako v STR



poměr vlastních frekvencí (tj. toho, co přímo naměří):

pokud vzniká na 1R

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \underbrace{\frac{\sqrt{\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)_A}}{\sqrt{\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)_B}}}_{\text{lze určit specifikací pohybu a metriky}} \frac{dt_A}{dt_B}$$

τ_A: má pouze lokální fyzik. význam $\Rightarrow$ doba letu fotonu z A do B nemá v τ_A smysl

dt_A: úsek souřadnicového času

$$dt_B \equiv \underset{\text{2. max}}{t_B^{(2)}} - \underset{\text{1. max}}{t_B^{(1)}} = t_A^{(2)} + \Delta t_{AB}^{(2)} - t_A^{(1)} - \Delta t_{AB}^{(1)} = dt_A + \Delta t_{AB}^{(2)} - \Delta t_{AB}^{(1)}$$

úsek souř. času, kdy 2. max postupuje od A do B

kdy $\Delta t_{AB}^{(1)} = \Delta t_{AB}^{(2)}$?

- dráha musí být geom. ekvivalentní $\Rightarrow$ např. stacionární geometrie a pozorovatelé pohybující se v souladu se symetrií prostoročasu

$ds^2 = 0$: $$g_{00}\,dt^2 + 2g_{0j}\,dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i dx^j = 0$$

$$\Delta t_{AB} = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{-g_{0j}\,dx^j \pm \sqrt{(g_{0j}\cdot dx^j)^2 - g_{00}\,g_{ij}\cdot dx^i dx^j}}{g_{00}} =$$

Δt_{AB} nezáv. na t $\Leftrightarrow$ $g_{\mu\nu,0} = 0$ (& dráhy geom. ekvival.)

předpoklad: pozorovatelé stojí $\frac{dx^i}{dt} = 0$ (v souřadnicích, pro než $g_{\mu\nu,0} = 0$)

$$\Rightarrow \frac{\nu_B}{\nu_A} = \sqrt{\frac{(-g_{00})_A}{(-g_{00})_B}}$$

z minule: newtonovská limita ($\Phi \ll 1$): $g_{00} = -1 - 2\Phi$ (rce geodetiky)

$$\Rightarrow \frac{\nu_B}{\nu_A} \approx \frac{\sqrt{1+2\Phi_A}}{\sqrt{1+2\Phi_B}} \approx \frac{1+\Phi_A}{1+\Phi_B} \approx 1 + \Phi_A - \Phi_B$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_A} = \frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_A} = \Phi_A - \Phi_B$$

Př.: centrální pole: $\Phi = -\frac{GM}{c^2 r}$

$$\left|\frac{\Delta\nu}{\nu_A}\right| \approx \frac{GM_\odot}{c^2 R_\odot} \approx 2{,}12\cdot 10^{-6}$$

Př.: homogenní pole: $\Phi = \frac{g\Delta l}{c^2}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_A} = -\frac{g\Delta l}{c^2}\ ; \quad \Delta l = l_B - l_A$$

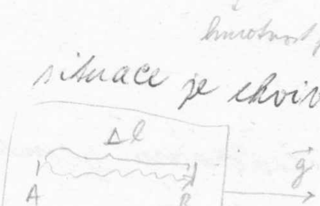
1) Intuitivní „odvození":

1. $E_B = E_A + \Delta E$ — potenc. en. v grav. poli

$$h\nu_B = h\nu_A - \frac{h\nu_A}{c^2}\, g\Delta l$$

hmotnost fotonu

2) z PE: situace je ekvivalentní plochému prostoročasu, pouze zrychlení



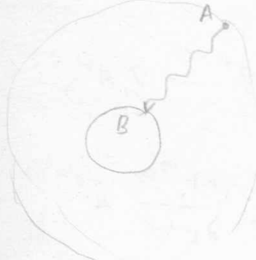
$$c\Delta t_{AB} = \Delta l + \frac{1}{2} g \Delta t_{AB}^2 \Rightarrow \Delta t_{AB} \approx \frac{\Delta l}{c} \ :\ 0$$

malé (newt. limita) malé

Doppler: $\nu_B = \nu_A\left(1 - \frac{v}{c}\right)$, kde $v = g\,\Delta t_{AB}$

$$\nu_B = \nu_A\left(1 - \frac{g\,\Delta l}{c^2}\right)$$

Případ s obíhajícím satelitem



$g_{\mu\nu,0} = 0$

dráhy ekvivalentní $\Rightarrow$ fotony přiletí za stejný čas

A se pohybuje, B ne:

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{-g_{00}\frac{dx^0}{dt} - 2g_{0j}v^j - g_{ij}v^i v^j}}{\sqrt{(-g_{00})_B}} \xrightarrow[\text{limita}]{\text{newton.}} \frac{\sqrt{\Big(\underbrace{1+2\Phi}_{O(h)} \underbrace{- 2h_{0j}v^j}_{O(h^{3/2})} \underbrace{- v^2}_{O(h)} \underbrace{- h_{ij}v^i v^j}_{O(h^2)}\Big)_A}}{\sqrt{(1+2\Phi)_B}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ g_{00} &= -1-2\Phi \end{aligned}}$$

* předpoklad volné dráhy (keplerovská): $\frac{m v_A^2}{r_A} = \frac{GMm}{r_A^2} \Rightarrow v_A^2 = -\Phi_A$ $\left(\frac{GM}{r_A}\right)$

$h_{\mu\nu}$ řádově stejné jako Φ

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} \approx \sqrt{\frac{1+3\Phi_A}{1+2\Phi_B}} \approx 1 + \frac{3}{2}\Phi_A - \Phi_B \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_A} = \frac{3}{2}\Phi_A - \Phi_B$$

(jeden člen z v^2)

konkrétně: Země + satelit ve výšce Δl

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_A} = \frac{M}{R} - \frac{3}{2}\frac{M}{R+\Delta l} \approx -3{,}47\cdot 10^{-10}\,\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}$$

pro $\Delta l = \frac{1}{2}R \Rightarrow \Delta\nu = 0$

$\Delta l \to \infty \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_A} \approx 7\cdot 10^{-10}$ $\Rightarrow$ malá v $\Rightarrow$ statický výsledek $\Rightarrow$ zmodrá!

$\Delta l \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_A} \approx -3{,}47\cdot 10^{-10}$ $\Rightarrow$ velká v $\Rightarrow$ vliv př. Dopp. ef., malý grav. efekt $\Rightarrow$ zčervená!

– obecně relat. efekt: vliv pole + příčný doppl. efekt

Pozn.: navigace:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_A} = \frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_A} = \frac{\frac{1}{d\tau_B} - \frac{1}{d\tau_A}}{\frac{1}{d\tau_A}} = \frac{d\tau_A - d\tau_B}{d\tau_B} \Rightarrow |d\tau_A - d\tau_B| = 3{,}47\cdot 10^{-10}\left|\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}\right| d\tau_B$$

$d\tau_B$ = 1 den

$$|d\tau_A - d\tau_B| = 3\cdot 10^{-5}\,s \left|\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}\right| \quad \text{za 1 den}$$

$$\Delta l = 20\,200\,km \Rightarrow c|d\tau_A - d\tau_B| \approx 9\,km \left|\frac{R-2\Delta l}{R+\Delta l}\right| \approx 11{,}52\,km$$

při měření od 1 satelitu by došlo k chybě 11,52 km

Kovariantní derivace

$$A^\nu{}_{,\beta} = \partial_\beta A^\nu \to \nabla_\beta A^\nu$$

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu\right) = \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}}_{\text{transformace odpovídající tenzoru 2. řádu}} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A^\nu$$

- při lin. transf. chová se jako tenzor
- obecně ne!

$$A^\mu{}_{;\alpha} \equiv A^\mu{}_{,\alpha} + \overbrace{\Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} A^\sigma}^{\text{vyruší špatně se transformující člen}}$$

$$B_{\mu;\alpha} \equiv B_{\mu,\alpha} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} B_\sigma$$

$$T^{\mu\dots}{}_{\alpha\dots;\rho} = T^{\mu\dots}{}_{\alpha\dots,\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma} T^{\sigma\dots}{}_{\alpha\dots} + \dots - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\rho} T^{\mu\dots}{}_{\sigma\dots} - \dots$$

transformace $A^\mu{}_{;\alpha}$:

viz nahoře, viz dříve

$$A'^\mu{}_{;\alpha} = A'^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma'^\mu{}_{\alpha\sigma} A'^\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}A^\nu + \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\tau}\Gamma^\nu{}_{\beta\varkappa} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau}\right)\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\sigma} A^\sigma =$$

$\delta^\varkappa_\sigma$; ve 2 členu

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\underbrace{\left(\underset{\text{1. člen}}{\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\beta}} + \underset{\text{2. člen v záv.}}{\Gamma^\nu{}_{\beta\sigma}A^\sigma}\right)}_{A^\nu{}_{;\beta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\alpha\partial x'^\tau}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\sigma}\right)}_{=0}$$

viz pp a pok. (poč.)

$\Rightarrow$ kovariantní derivace se správně transformuje

VLASTNOSTI KOVAR. DERIVACE

1) $g_{\mu\nu;\rho} = g_{\mu\nu,\rho} - \cancel{\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} g_{\sigma\nu}}\ g_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} = 0$

dříve $g_{\mu\nu,\rho} = \text{"}\Gamma g + \Gamma g\text{"} \Rightarrow$

stejné členy jako

- metrický tenzor je kovariantně konstantní

2) komutuje se zvyšováním a snižováním indexů

narozdíl od parciál. derivace:

$$A_{\mu,\alpha} = (g_{\mu\nu} A^{\nu})_{,\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} A^{\nu} + g_{\mu\nu} A^{\nu}_{\ ,\alpha} \neq g_{\mu\nu} A^{\nu}_{\ ,\alpha}$$

3) $\Phi_{;\alpha} = \Phi_{,\alpha}$ (pro skalár)

ABSOLUTNÍ DERIVACE

- zobecnění úplné derivace dle parametru

$$\frac{DT^{\dots}_{\dots}}{dp} = T^{\dots}_{\dots;\rho} \frac{dx^{\rho}}{dp} =$$

ale neutrvá znát T i v okolí křivky

$$= \frac{dT^{\dots}_{\dots}}{dp} + (\dots - \dots) \frac{dx^{\rho}}{dp}$$

PP a rce geodetiky lze potom přepsat:

PP: $\frac{DV^{\mu}}{dp} = 0$

RG: $\frac{Du^{\mu}}{dp} = 0 \iff a^{\mu} = 0$

obecná pohyb. rce: $\frac{Dp^{\mu}}{d\tau} = F^{\mu}$; $p^{\mu} = m u^{\mu}$ ~~$= \frac{q}{m}$~~

klidová hmotnost

$$a^{\mu} = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} u_{\nu}$$

A^{ρ}

Křivost prostoročasu

komutátor kovar. derivací:

$$V_{\nu;\varkappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\varkappa} \overset{ozn.}{\equiv} W_{\nu\varkappa;\lambda} - W_{\nu\lambda;\varkappa} = W_{\nu\varkappa,\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}W_{\rho\varkappa} - \Gamma^{\rho}_{\varkappa\lambda}W_{\nu\rho} -$$

tenzor $W_{\nu\varkappa}$

požerou se

$$- W_{\nu\lambda;\varkappa} + \Gamma^{\rho}_{\nu\varkappa}W_{\rho\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\varkappa}W_{\nu\rho} = \left(V_{\nu,\varkappa} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\varkappa}V_{\sigma}\right)_{,\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\left(V_{\rho,\varkappa} - \Gamma \ldots\right.$$

$$-\left(V_{\nu,\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}V_{\sigma}\right)_{,\varkappa} + \Gamma^{\rho}_{\nu\varkappa}\left(V_{\rho,\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda}V_{\sigma}\right) = \text{všechny derivace } V \text{ se} \ldots$$

zaměnitelnost

$$= \underbrace{\left(\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda,\varkappa} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\varkappa,\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\varkappa}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\varkappa}\right)}_{\equiv R^{\sigma}_{\ \nu\varkappa\lambda}} V_{\sigma}$$

pořadí dle členů

Riemannův tenzor křivosti

- levá strana: tenzorová díky vlastnostem kovar. derivace, V_σ je vektor

$\Rightarrow R^{\sigma}_{\ \nu\varkappa\lambda}$ je tenzor! (ačkoliv jeho jednotl. členy tenzory nejsou)

SYMETRIE RIEMANNOVA TENZORU

indukované konexí

1) $R^{\sigma}_{\ \nu\varkappa\lambda} = - R^{\sigma}_{\ \nu\lambda\varkappa} \iff R^{\sigma}_{\ \nu[\varkappa\lambda]}$ — zřejmé

2) $R^{\sigma}_{\ [\nu\varkappa\lambda]_{cykl}} \left(\equiv R^{\sigma}_{\ \nu\varkappa\lambda} + R^{\sigma}_{\ \lambda\nu\varkappa} + R^{\sigma}_{\ \varkappa\lambda\nu}\right) = 0$ — trochu pracnější ale přímočaré

indukované metrikou

3) $R_{\mu\nu\varkappa\lambda} \quad \left(= g_{\mu\sigma} R^{\sigma}_{\ \nu\varkappa\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda,\nu\varkappa} + g_{\nu\varkappa,\mu\lambda} - g_{\mu\varkappa,\nu\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu\varkappa}\right)$

$\quad + g_{\rho\sigma}\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\varkappa} - \Gamma^{\rho}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\right)$

4) $R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = R_{\varkappa\lambda\mu\nu} \iff R_{\mu\nu\,\varkappa\lambda}$

5) $\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = 0$

Levi-Civitův tenzor (tj. permutační t.)

- vlastnosti 1,2: platí i pro Riemannův t. na varietě bez metriky (pouze s afinní konexí), k vlastnostem 3,4,5 potřebujeme metriku
- pouze 1,2,3 nezávislé

30. 3.

odvození 4: napíšu 4x vlastnost 2):

$$\begin{rcases} \cancel{R_{\mu\nu\varkappa\lambda}} + \cancel{R_{\mu\lambda\nu\varkappa}} + R_{\mu\varkappa\lambda\nu} = 0 \\ R_{\lambda\mu\nu\varkappa} + \cancel{R_{\lambda\varkappa\mu\nu}} + \boxed{R_{\lambda\nu\varkappa\mu}} = 0 \\ R_{\varkappa\lambda\mu\nu} + \cancel{R_{\varkappa\nu\lambda\mu}} + R_{\varkappa\mu\nu\lambda} = 0 \\ \cancel{R_{\nu\varkappa\lambda\mu}} + \cancel{R_{\nu\mu\varkappa\nu}} + \boxed{R_{\nu\lambda\mu\varkappa}} = 0 \end{rcases} \oplus$$

$\oplus$ + vlastnosti 1, 3:

$$2\, R_{\mu\varkappa\lambda\nu} + 2\, R_{\lambda\nu\varkappa\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{\mu\varkappa\lambda\nu} = R_{\lambda\nu\mu\varkappa} \quad \otimes$$

odvození 5: důsledek 2:

R antisym v $\varkappa, \lambda$ $\overset{proč?}{\Rightarrow}$ po přidání ν: R je úplně antis v $\nu\varkappa\lambda$

$$\underset{\text{antis mj. také v těchto indexech}}{\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}} \underset{\text{antis v těchto indexech}}{R_{\mu\nu\varkappa\lambda}} = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} R_{\mu\underline{\nu\varkappa\lambda}} = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} \underset{0}{R_{\mu[\nu\varkappa\lambda]}}{}_{cykl.} = 0$$

VA! $\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} R_{\mu[\nu\varkappa\lambda]} = 0$

RICCIHO TENZOR:

$$R^{\mu}{}_{\nu\varkappa\lambda} \text{ zúžíme} \quad \Rightarrow \quad R_{\nu\lambda} := R^{\mu}{}_{\nu\mu\lambda} = R_{\underline{\nu\lambda}}$$

symetrie Ric. tenzoru plyne z: $R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = R_{\varkappa\lambda\mu\nu} \rightarrow R_{\lambda\mu}$

Riemannův tenzor $\rightarrow$ Ricciho tenzor $\rightarrow$ skalární křivost (Ricciho skalár)

skalární křivost: $R^{i}{}_{i} = R$

~~GEOMETRICKÝ VÝZNAM~~

POČET NEZÁV. SLOŽEK Riemannova tenzoru: a) $R_{\underset{\vee}{\mu\nu}\underset{\vee}{\varkappa\lambda}}$; b) $R_{\mu[\nu\varkappa\lambda]} = 0$

ve 4

a) $[\mu, \nu] = [0,1], [0,2], [0,3], [1,2], [1,3], [2,3]$

36 nezáv. pořadí (6 x 6)

b)

za μ: 4 nez. možnosti

netriviální: $\nu \neq \varkappa \neq \lambda$, pouze 1 pořadí:

$[0,1,2], [0,1,3], [0,2,3], [1,2,3] \Rightarrow 4 \cdot 4 = 16$ nezáv. vztahů b)

$\Rightarrow$ počet nez. složek R. t.: $36 - 16 = 20$

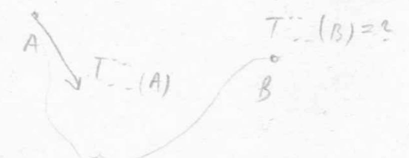
GEOMETRICKÝ VÝZNAM RIEMANNOVA TENZORU

- parale. přenos v rovině: je integrabilní (přenos po uzav. křivce ⇒ stejný směr) × neplatí např. na kouli (v zakřiv. prostorech: není integrabilní)

- Riem. tenz. popisuje křivost: chceme pomocí něj vyjádřit „defekt" vektoru (změna při přenosu po uzavř. křivce)

PODMÍNKY INTEGRABILITY

$$dT^{\cdots}{}_{\cdot\cdot} = f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma}\, dx^\sigma$$ (nový index oproti T) : přírůstkový tvar: udává gradient tenz. vel. T



zajímá nás, kdy je určení $T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot}(B)$ jednoznačné ($\forall$ dráhy stejné)

⇔ přenos z A do A po uzav. křivce dává opět $T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot}(A)$

$$T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot}(B) = T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot}(A) + \int_A^B dT^{\cdots}{}_{\cdot\cdot} = T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot}(A) + \int_A^B f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma}\, dx^\sigma$$

integrabilita ⇔ $\int_A^B f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma}\, dx^\sigma$ nezáv. na cestě ⇔ $\oint_{\forall\gamma} f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma}\, dx^\sigma = 0$

dle Stokese:

$$\oint_{\gamma=\partial S} f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma}\, dx^\sigma = \int_S f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma,\rho}\, dS^{\sigma\rho}$$

vektor. součin dx^σ, dx^ρ

$d_{(1)}x^\sigma d_{(2)}x^\rho - d_{(1)}x^\rho d_{(2)}x^\sigma$

přeznačením indexů ve 2 členu $= \int_{\forall S} f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma,\rho} - f \ldots$

$$d_{(1)}x^\sigma d_{(2)}x^\sigma = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma,\rho} - f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\rho,\sigma} = 0$$

lin. difer. forma $f^{\cdots}{}_{\cdot\cdot\sigma}\, dx^\sigma$ je integrab., holonomní, úplný diferenciál

Pfaffovy formy (např. v termod.: $đQ$ $\quad \frac{đQ}{T} = dS$

TM: $d\vec{A} = \vec{f}\cdot d\vec{r} = f_j\, dx^j$; integrabilita: $f_{j,k} = f_{k,j} \Rightarrow \nabla\times f = 0$ = konzervativnost

podmínky integrability pro paralelní přenos:

$$\frac{dV^\sigma}{dp} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} V^\alpha \frac{dx^\beta}{dp} = 0$$

$$\Rightarrow \quad dV^\sigma = -\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} V^\alpha dx^\beta \quad \Leftrightarrow \quad f^{\cdots}{}_{\cdots\beta} \equiv f^\sigma{}_\beta = -\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}V^\alpha$$

aplikace podmínek pro integrabilitu

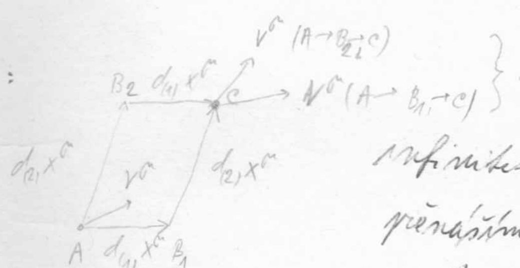
$$(\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}V^\alpha)_{,\gamma} = (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma}V^\alpha)_{,\beta}$$

$$\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta,\gamma} V^{\alpha} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\underbrace{V^\alpha{}_{,\gamma}}_{=\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} = -\Gamma^\alpha{}_{2\gamma}V^2} = \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma,\beta}V^\alpha + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma}\underbrace{V^\alpha{}_{,\beta}}_{=-\Gamma^\alpha{}_{2\beta}V^2}$$

$$\underbrace{\left(\Gamma^\sigma{}_{2\beta,\gamma} - \Gamma^\sigma{}_{2\gamma,\beta} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha{}_{2\beta} - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha{}_{2\gamma}\right)}_{R^\sigma{}_{2\gamma\beta}}V^2 = 0$$

$\Rightarrow$ rce pro paral. přenos je integrabilní $\Leftrightarrow R^\sigma{}_{2\gamma\beta} = 0$

Př.:



infinitezimální rovnoběžník
přenášíme vektor V^σ z A do C
zajímá nás defekt vektoru V^σ

pro $A \to B_1 \to C$:

$$V^\sigma{}_{(A\to B_1)} = ? \; ; \quad dV^\sigma = -\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}V^\alpha dx^\beta$$

$$V^\sigma{}_{(A\to B_1)} = V^\sigma{}_{(A)} - (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}V^\alpha d_{(1)}x^\beta)_{(A)}$$

$$V^\sigma{}_{(A\to B_1\to C)} = V^\rho{}_{(B_1)} - (\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}V^\rho d_{(2)}x^\sigma)_{(B_1)} \quad \text{do řádu } \mathcal{O}(d^2)\,?$$

$$V^\sigma{}_{(B_1)} = V^\sigma{}_{(A\to B_1)}$$

$$\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}(B_1) = \Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}(A) + (\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma,i}\, d_{(1)}x^i)_{(A)}$$

$$V^\rho(B_1) = V^\rho{}_{(A\to B_1)} - (\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}V^\alpha d_{(1)}x^\beta)_A$$

$$d_{(2)}x^\sigma(B_1) = d_{(2)}x^\sigma{}_{(A)} + \mathcal{O}(d^2)$$

zde nemůžeme dosadit bod A!

$$V^\sigma{}_{(A\to B_1\to C)} = V^\sigma{}_{(A)} - (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}V^\alpha d_{(1)}x^\beta)_{(A)} - \Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}(A)V^\rho{}_{(A)}\, d_{(2)}x^\sigma{}_{(B_1)} +$$

nebylo by do $\mathcal{O}(d^3)$

$$+ (\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}(A)\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}V^\alpha d_{(1)}x^\beta)_A\, d_{(2)}x^\sigma{}_{(A)} - (\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma,2}\, d_{(1)}x^2)_A\, V^\rho{}_{(A)}\, d_{(2)}x^\sigma{}_{(A)}$$

zde klidně můžu vzít bod A neboť chybka $\mathcal{O}(d^3)$

vynecháváme psaní A:

$$V^{\sigma}{}_{(A\to B_1\to C)} = V^{\sigma} - \left(\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} V^{\alpha}\right)\left(d_{(1)}x^{\beta}{}_{(A)} + d_{(2)}x^{\beta}{}_{(B_1)}\right) - \left(\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\sigma,\beta} - \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\sigma}\Gamma\right.$$

$$\cdot\ V^{\alpha} d_{(1)}x^{\beta} d_{(2)}x^{\sigma}$$

obdobně $1\to 2$, $B_1\to B_2$

$$V^{\sigma}{}_{(A\to B_2\to C)} = V^{\sigma} - \left(\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} V^{\alpha}\right)\left(d_{(2)}x^{\beta}{}_{(A)} + d_{(1)}x^{\beta}{}_{(B_2)}\right) - \left(\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\sigma,\beta} - \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\sigma}\right.$$

$$\cdot\ V^{\alpha} d_{(2)}x^{\beta} d_{(1)}x^{\sigma}$$

$$V^{\sigma}{}_{(A\to B_2\to C)} - V^{\sigma}{}_{(A\to B_1\to C)} = \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} V^{\alpha}\overbrace{\left(d_{(1)}x^{\beta}{}_{(A)} + d_{(2)}x^{\beta}{}_{(B_1)} - d_{(2)}x^{\beta}{}_{(A)} - d_{(1)}x^{\beta}\right.}^{=0 \text{ z uzavřenosti obra}}$$

$$+ \underbrace{\left(\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\sigma,\beta} - \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\right\} - \underbrace{\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta,\sigma} + \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\sigma}}_{\text{přeznačení } \beta\leftrightarrow\sigma}\Big)}_{R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\sigma}} V^{\alpha} d_{(1)}x^{\beta} d_{(2)}x^{\sigma}$$

$$= R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\sigma} V^{\alpha} d_{(1)}x^{\beta} d_{(2)}x^{\sigma}$$

prach: $T^{\mu\nu} = \overset{\frac{dm_0}{dV_0} \to \text{klid. hmot.},\ \text{klid. obj.}}{\rho_{00}}\, u^\mu u^\nu = \begin{pmatrix} \rho_{00}\gamma^2 c^2 & \rho_{00}\gamma^2 c\vec{v} \\ \rho_{00}\gamma^2 c\vec{v} & \rho_{00}\gamma^2 \vec{v}\vec{v} \end{pmatrix}$ $\qquad u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$

$\rho_{00}\gamma^2 = \rho = \frac{dm}{dV}$ → hustota

1. gamma: k m
2. gamma: kontrakce ⇒ zvýš. hustoty

$\rho_{00}\gamma^2 c^2$ = hustota energie

$\rho_{00}\gamma^2 c\vec{v} = \frac{1}{c}$ hustota toku energie

$\rho_{00}\gamma^2 \vec{v}\vec{v}$ = hustota toku hybnosti

EM pole: $T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\left(F^{\mu\sigma}F^{\nu}{}_{\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right)$

μ … permeabilita (vakua)

Připomeň: $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}\vec{E} & & \\ -\frac{1}{c}\vec{E} & 0 & B^3 & -B^2 \\ & -B^3 & 0 & B^1 \\ & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}$, $F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}/c \\ \vec{E}/c & \ldots \end{pmatrix}$

$$F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 2F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij} = -2\frac{E^2}{c^2} + \underbrace{\epsilon^{ijk}B_k\,\epsilon_{ijl}}_{2\delta^k_l}B^l = -2\frac{E^2}{c^2} + 2B^2$$

$$\mu T^{00} = F^{0j}F^{0}{}_{j} + \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{c^2}E^2 - \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2}B^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right)$$

v STR: j můžu dát nahoru o se změnou znam.

s využitím $c^2\mu\varepsilon = 1$ lze psát: $\qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}\ ;\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$T^{00} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = w \quad \text{(hustota energie)}$$

$$\mu T^{0i} = F^{0j}F^{i}{}_{j} + \overset{\eta^{0i}=0}{0} = \frac{1}{c}E^j\,\epsilon^{i}{}_{jk}B^k = \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})^i = \frac{1}{c}\mu S^i \Rightarrow T^{0i} = \frac{1}{c}S^i$$

Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

→ hustota toku energie $\cdot \frac{1}{c}$

$$\mu T^{ij} = \underset{-\frac{\vec{E}}{c}}{F^{i0}}\,\underset{\frac{\vec{E}}{c}}{F^{j}{}_{0}} + F^{ik}F^{j}{}_{k} - \frac{1}{4}\delta_{ij}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} =$$

$$= -\frac{1}{c^2}E^iE^j + \underbrace{\epsilon^{ikm}B_m\,\epsilon^{j}{}_{kn}}_{\delta^{ij}\delta^m_n - \delta^i_n\delta^{mj}}B^n - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2 + \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{E^2}{c^2} =$$

$$T^{ij} = \delta_{ij}\,w - \left(E^iD^j + H^iB^j\right)$$

$T^{\mu\nu}_{prach\ ,\nu} = \Phi^\mu_L$

$T^{\mu\nu}_{EM\ ,\nu} = -\Phi^\mu_L$ → hustota Lorentz. síly

- pro elmag. pole: význam druhé rce: $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\Phi^\mu_L$

$\mu = 0$: $T^{00}{}_{,0} + T^{0j}{}_{,j} = -\Phi^0_L$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c}\,\mathrm{div}\vec S = -\frac{1}{c}\vec E\cdot\rho\vec v \qquad \Phi^\mu_L = F^{\mu\nu} j_\nu$$

$\mu = i$: $T^{i0}{}_{,0} + T^{ij}{}_{,j} = -\Phi^i_L$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec S}{\partial t} + \mathrm{div}\overleftrightarrow{T} = -(\rho\vec E + \vec j\times\vec B) \qquad \Phi^i = \frac{df^i_L}{dV} \qquad f_L = q($$

prostor. část $T^{\mu\nu}$

$T^{\mu\nu}$ pro ideální tekutinu:

$T^{\mu\nu} = (\rho + P)\, u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$, kde $\rho = \rho_{00}$: hustota (klidová)

$P = 0 \Leftrightarrow$ prach P - tlak v syst., vůči kt. se syté…

používáme geometrizované jednotky (správněji $\rho + \frac{P}{c^2}$)

lok. kartéz. báze

složky $T^{\mu\nu}$ pro pozorovatele:

"T^{00}" $\leftrightarrow T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ v soustavě, kde $u^i = 0\ \forall i = 1,2,3$

$\cancel{T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$

"T^{00}" $\leftrightarrow T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = (\rho+P)(-1)^2 + P(-1) = \rho$

"T^{0i}" $\leftrightarrow T^{\mu\nu} u_\mu = (\rho+P)(-1)\,u^\nu + P u^\nu = -\rho u^\nu$ → hustota toku energie

"T^{ij}" $\leftrightarrow T^{\mu\nu} e_{\hat i\mu} e_{\hat j\nu} = 0 + P\delta_{ij}$

$u^\mu \perp e_{\hat i\mu}$ ortonormalita

Einsteinův gravitační zákon

$\Delta \Phi = 4\pi\rho$: Newton

↳ lineární kombinace druhých parc. derivací

víme: $\Phi \leftrightarrow g_{\mu\nu}$ ⇒ na 4lhs: lineárně $g_{\mu\nu}$ do druhého řádu derivací

$\rho \to T_{\mu\nu}$ → symet. tenzor 2. řádu

(Nejsou závislý na $g_{\mu\nu}$, 1. a 2. der.
ve všech soustavách jsou opět 1. a 2. derivace

význačnost Riemannova tenzoru : ∀ tenzor složený invariantně co do formy pouze z met. tenz. a jeho 1. a 2. parciál. derivací lze vyjádřit jako fci metr. tenz. a Riem. tenzoru

$$\text{tenzor}\,(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\gamma}, g_{\mu\nu,..}) = \text{tenzor}\,(g_{\mu\nu}, R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta})$$

$\sim \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $\sim R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$

· náznak ① přejdeme do LISU → vymizí Γ ⇒ dostáváme tenzor $(g_{\mu\nu}, R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta})$

- chceme: sym. tenzor 2. ř. z $g_{\mu\nu}, R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$, v němž $g_{\mu\nu,..}$ jsou lineárně
(invariantní co do formy)

odpověď:

$$c_1 R_{\mu\nu} + c_2 R g_{\mu\nu} + c_3 g_{\mu\nu} \quad , \text{kde } R_{\mu\nu} \equiv R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} \quad , R \equiv R^{\sigma}{}_{\sigma} , c_i - \text{konst.}$$

- důsledek: toto je nejobecnější tenzor splňující podmínky a je sestrojený z $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,}, g_{\mu\nu,..}$
(důsledek význačnosti Riem. tenzoru)

· náznak ②:

$$R^{\sigma}{}_{\nu\kappa\lambda} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda,\kappa} + \Gamma^{\sigma}_{\sigma\kappa}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau}\left(g_{\tau\nu,\lambda} + g_{\lambda\tau,\nu} - g_{\nu\lambda,\tau}\right)$$

→ v $R^{\sigma}{}_{\nu\kappa\lambda}$ jsou druhé der. lineární, nikoliv první

⇒ můžeme mít pouze R v 1. mocnině

$$\Rightarrow \quad c_1 R_{\mu\nu} + c_2 R g_{\mu\nu} + c_3 g_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}$$

Bianchiho identity: (už minule)

$$R^{\sigma\nu}{}_{[\varkappa\lambda;\rho]\,\mathrm{cykl}} = 0$$

nedeláme úplně jednoduchou věc, ale zato ji udeláme dvakrát

$$R^{\sigma\nu}{}_{[\varkappa\lambda;\rho]\,\mathrm{cykl}} = R^{\sigma\nu}{}_{\varkappa\lambda;\rho} + R^{\sigma\nu}{}_{\rho\varkappa;\lambda} + R^{\sigma\nu}{}_{\lambda\rho;\varkappa} = 0 \qquad \sigma\to\varkappa \text{ vyčítáme}$$

$/\cdot g^{\varkappa}_{\sigma}$

$$R^{\nu}{}_{\lambda;\rho} - R^{\nu}{}_{\rho;\lambda} + R^{\varkappa\nu}{}_{\lambda\rho;\varkappa} = 0$$

pozn.: vyčítání = násobení $g^{\sigma\nu}$; to je kovariantně konstantní ⇒ může pod kovariantní derivaci

dále: $\nu\to\lambda$ vyčítáme:

$$\left.\begin{aligned} R_{;\rho} - R^{\lambda}{}_{\rho;\lambda} - R^{\lambda\varkappa}{}_{\lambda\rho;\varkappa} &= 0 \\ \shortparallel \quad & \\ -R^{\varkappa}{}_{\rho;\varkappa} & \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_{;\rho} - 2R^{\lambda}{}_{\rho;\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow R^{\lambda}{}_{\rho;\lambda} = \frac{1}{2} R_{;\rho}$$

$$= R_{\lambda\rho;}{}^{\lambda} = R_{\rho\lambda;}{}^{\lambda} = R_{\rho}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}$$

$(g^{\sigma\nu}{}_{;*} = 0)$

rovnice $T^{\sigma\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow c_1 R^{\sigma\nu}{}_{;\nu} + c_2 R_{;\nu} g^{\sigma\nu} = 0$

σ dolů:

$$c_1 R_{\sigma}{}^{\nu}{}_{;\nu} + c_2 R_{;\nu} \underbrace{g_{\sigma}^{\nu}}_{=\delta_{\sigma}^{\nu}} = 0$$

$$c_1 R_{\sigma}{}^{\nu}{}_{;\nu} + c_2 R_{;\sigma} = 0$$

$$\left(\frac{c_1}{2} + c_2\right) R_{;\sigma} = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_1}{2}$$

- vydělme c_1

$$R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\nu} + \underbrace{\Lambda}_{\text{kosmologická konstanta}} g_{\sigma\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}, \quad \text{kde } \Lambda \equiv \frac{c_3}{c_1},\ \varkappa \equiv \frac{K}{c_1}$$

- zapomeňme na chvilku na Λ, určeme $\varkappa$ z newtonovské limity

- v newt. limitě: rce geodetiky: ($|u^0| \gg |u^i|$; $g_{\sigma\nu} = \eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}$; $g_{\sigma\nu,0} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x^m}{dt^2} + \Gamma^m{}_{00} &= 0 \\ \text{newt. rce:}\quad \frac{d^2 x^m}{dt^2} &= -\Phi_{,m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall\, \Gamma^{\cdot}{}_{\cdot\cdot} = 0, \text{ kromě } \Gamma^m{}_{00} = \Phi_{,m}$$

$$R_{00} = R^{\alpha}{}_{0\alpha 0} = \Gamma^{\alpha}{}_{00,\alpha} - \overset{0}{\Gamma^{\alpha}{}_{0\alpha,0}} + \overbrace{\Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma}^{\mathcal{O}(\Phi^2)} = \Gamma^{m}{}_{00,m} = \Phi^{,m}{}_{,m} = \Delta\Phi$$

udělejme stopu ~~...~~ Einst. rovnic (tj. násobme $g^{\mu\nu}$):

$$R - \frac{1}{2} R \underbrace{\delta^{\nu}_{\nu}}_{=4} = \varkappa T \Rightarrow R = -\varkappa T$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \varkappa T_{\mu\nu} = \varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right)$$

opět nyní spočtěme:

$$R_{00} = \varkappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00}\right)$$

do $\mathcal{O}(\Phi)$

volme prach: $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \to T = -\rho$, $g_{00} = -1 - 2\Phi + \mathcal{O}(\Phi^2)$

$\downarrow$ musí platit i v této konkr. situaci

$$T_{00} = \rho (u_0)^2 = \rho \left(1 + \mathcal{O}(\Phi)\right)^2$$

$u_0{}^2 = u_0 u_0 = g_{0\alpha} u^{\alpha} u_0 = g_{00} u^0 u_0 =$ $-1 - u^i u_i$

$\Delta\Phi = 4\pi\rho \Rightarrow \rho$ je řádu $\mathcal{O}(\Phi)$

$$R_{00} \approx \varkappa \left(\rho - \frac{1}{2}(-\rho)(-1)\right) = \frac{\varkappa\rho}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\varkappa\rho = \Delta\Phi = 4\pi\rho \Rightarrow \underline{\underline{\varkappa = 8\pi}}$$

ve standar. jednotkách $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$

20.4.

$G_{\mu\nu}$: Einsteinův tenzor

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad / \cdot g^{\mu\nu}$$

$$R - 2R + 4\Lambda = 8\pi T \Rightarrow R = 4\Lambda - 8\pi T$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \underbrace{R g_{\mu\nu}}_{2\Lambda g_{\mu\nu} - 4\pi T g_{\mu\nu}} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right) + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- druhý tvar výhodný pro vakuum ($T_{\mu\nu} = 0$) $\Rightarrow R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$
- Λ absolutní parametr: ovlivňuje geometrii, ale sám není ničím ovlivněn
- po Einst. smrti: Λ může repre. energii nul. kmitů
- inflač. modely: Higgsovo pole napětí způsobené kladnou Λ (na poč. vesmíru)
- ke stat. vesmír: snaha gravit. působením umenšit se $\times$ Λ: repulze

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\, u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$$

$$8\pi (\rho + P)\, u_\mu u_\nu + (8\pi P \cancel{g_{\mu\nu}} - \Lambda)\, g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

klad. P, klad. ρ: budí přitažlivost

$\Lambda > 0$: budí odpuzování

- napětí = zápornný tlak; částic. fyz.: Higgsovo pole ve stavu napětí → kladná Λ
- experiment: kosm. konst. je kladná, 70% hustoty energie v Λ (temná energie)
- newton. limita s Λ: nevyjde přesně $\Phi = 4\pi\rho$

$$g_{00} = -1 - 2\Phi \Rightarrow \Delta\Phi + 2\Lambda\Phi = 4\pi\rho - \Lambda$$

$\Rightarrow$ odsud omezení na Λ shora (nepozoruje se odchylka od $\Phi = 4\pi\rho$)

$$\Rightarrow \Lambda < 10^{-48}\ \mathrm{cm}^{-2}$$

- malá hodnota $\Rightarrow$ hraje roli pouze ve velkých rozměrech

EINSTEINOVY RCE

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

- nelin. parciál. rce 2. řádu pro $g_{\mu\nu}$ (kvazilineární = ~~a~~ jsou lineární v nejvyšš. derivacích
- 10 neznámých (sym. tenzor 4x4); 10 rovnic
- princip obecné kovariance: musíme mít volnost ve volbě souřadnic → volby 4 fcí
- platí ~~4~~ rce: $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ (vyplývá z E.r.)
  4 rce: nejsou pro $g_{\mu\nu}$, (jsou zákony zachování)
- 10 rovnic: 6 pro $g_{\mu\nu}$ + 4 další
- newt. teorie $\Delta\Phi = 4\pi\rho$ → pro pole se zadanými zdroji; nelze vyjádřit pohyb zdrojů (nevyplývá $E = -\nabla\Phi$)
- obdobně Maxw. rce $\not\Rightarrow F^\mu_L = q F^{\mu\nu} u_\nu$
  pohyb zdrojů není omezen Max. rovnicemi (kromě kon. rychlosti + rce kontinuity)

× Einst. rce: obsahují rce pro zdroje $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ (⟶ odsud lze přímo najít pohyb. rce pro zdroj)

- nelinearita ⇒ zpětné působení
- pole má energii ⇒ zakřivuje prostoročas ⇒ je zdrojem pole

⇒ chování zdrojů v OTR rce omezeno než v ost. teoriích

EULEROVY RCE PRO DOKONALOU TEKUTINU

$$T^{\mu\nu}=(\rho+P)\,u^\mu u^\nu+P\,g^{\mu\nu}\qquad\Big|_{;\nu}$$

na skalár jako parciální

$$0=T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=(\rho+P)_{,\nu}\,u^\mu u^\nu+(\rho+P)\underbrace{u^\mu{}_{;\nu}u^\nu}_{a^\mu}+(\rho+P)\,u^\mu u^\nu{}_{;\nu}+P_{,\nu}\,g^{\mu\nu}$$

1) průmět do směru $\parallel u^\mu$

$$0=u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=-(\rho+P)_{,\nu}u^\nu-(\rho+P)\,u^\nu{}_{;\nu}+P_{,\nu}u^\nu$$

neboť: $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=-1\quad\Big|\frac{D}{d\tau}$

$$2g_{\mu\nu}\underbrace{\frac{Du^\mu}{d\tau}}_{a^\mu}u^\nu=0\quad\Rightarrow\quad a^\mu u^\nu g_{\mu\nu}=0$$

$$\rho_{,\nu}u^\nu=\frac{\partial\rho}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}=\frac{d\rho}{d\tau}$$

$$0=-\frac{d\rho}{d\tau}-(\rho+P)\,u^\nu{}_{;\nu}\Rightarrow\frac{d\rho}{d\tau}+(\rho+P)\,u^\nu{}_{;\nu}=0\qquad\text{rce kontinuity}$$

klasicky: $\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,v=0$

nově zde tlak přispívá k ρ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}+\mathrm{div}(\rho\vec v)-\frac{\partial\rho}{\partial x^i}v^i=0\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec v)=0$$

2) průmět $\perp u^\mu$:

$$h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu$$

projekční tenzor na podpr. $\perp u^\mu$

$P^2=P$:

$$h^\mu{}_\alpha h^\alpha{}_\nu=(\delta^\mu{}_\alpha+u^\mu u_\alpha)(\delta^\alpha{}_\nu+u^\alpha u_\nu)=\delta^\mu{}_\nu+2u^\mu u_\nu-u^\mu u_\nu=h^\mu{}_\nu$$

$$h_{\sigma\nu} u^\sigma = (g_{\sigma\nu} + u_\sigma u_\nu) u^\sigma = u_\nu - u_\nu = 0$$

$\Rightarrow$ jde skut. o projektor na třírostor $\perp$ k čtyřrychlosti

po projekci vypadnou 1. a 3. člen:

$$(\rho+P)\, a^\sigma (g_{\sigma\nu} + u_\sigma u_\nu) + P_{,\sigma} g^{\sigma\alpha} \underbrace{(g_{\alpha\nu} + u_\alpha u_\nu)}_{\delta^\alpha_\nu + u^\alpha u_\nu = h^\alpha_\nu} = 0$$

$$(\rho+P)\, a_\nu = -h^\sigma_\nu P_{,\sigma} = -P_{,\sigma}(\delta^\sigma_\nu + u^\sigma u_\nu)$$ Eul. pohyb. rce pro tekutinu

klasicky: $\rho \vec{a} = -\nabla\Phi - \nabla P$

v OTR: je člen $-\nabla\Phi$ (grav. síla) absorbován v a_ν!

POPMÍNKY HYDROSTATICKÉ ROVNOVÁHY

- nehledáme pohyb tekutiny z těchto rovnic, nýbrž zadáme pohyb a hledáme kdy je splněn
- nechť $\exists$ systém, v němž $u^\sigma = (u^0, 0, 0, 0)$ (statická tekutina)
- předp., že v tomto souř. syst. je pole této tekutiny také statické:

$g_{\sigma\nu,0} = 0$ (stacionarita)

$g_{0i} = 0$, $g^{0i} = 0$ (žádné proudy hmoty) } prostoročas statický

potom: $-1 = g_{\sigma\nu} u^\sigma u^\nu = g_{00} u^{0\,2} \Rightarrow u^0 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}$

$$u_0 = g_{0\sigma} u^\sigma \underset{g_{0i}=0}{=} g_{00} u^0 \Rightarrow u_0 = -\sqrt{-g_{00}}$$

$$u_i = g_{i\sigma} u^\sigma = g_{i0} u^0 + g_{ij} u^j = 0$$ (ne ale samozřejmé)

$g_{i0} = g_{0i} = 0$

~~$g_{0i}\, g^{0i}$~~

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu \Rightarrow \underbrace{g_{0\alpha} g^{0\alpha}}_{1} = g_{0\alpha} g^{\alpha 0} = g_{00} g^{00} + g_{0i} g^{0i} = 1$$

$$\Rightarrow g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$$

levá strana: L: $a_\nu = u_{\nu;\alpha} u^\alpha = u_{\nu,\alpha} u^\alpha - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} u_\sigma u^\alpha = u_{0,0} u^0 - \Gamma^0_{\nu 0} u_0 \ldots$

$u_{0,0} = 0$

$$= \Gamma^{0}{}_{\nu 0} = \frac{1}{2} g^{0\lambda}\big(\underbrace{g_{\lambda\nu,0}}_{=0} + g_{0\lambda,\nu} - \underbrace{g_{\nu 0,\lambda}}_{=0}\big) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,\nu} = \frac{1}{2}\frac{g_{00,\nu}}{g_{00}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\ln\sqrt{-g_{00}}\right)$$

pravá strana:

$$P: -P_{,\nu} - P_{,\sigma} u^{\sigma} u_{\nu} = -P_{,\nu} + P_{,0}\,\delta^{0}_{\nu}$$

$L = P$

$\mu = 0 \Rightarrow \qquad 0 = 0$

$$\mu = i \Rightarrow \quad (\rho + P)\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\ln\sqrt{-g_{00}}\right) = -P_{,i}$$

podmínky hydrost. rovnováhy

hezčí zápis: $g_{00} = -e^{2\Phi}$ ← newton grav. potenciál

$\Phi \ll 1 \Rightarrow g_{00} = -1 - 2\Phi + \mathcal{O}(\Phi^2)$ → funguje newt. limita

→ parametrizujeme g_{00} pomocí Φ i pro silné pole pomocí $-e^{2\Phi}$, pak v newton. limitě funguje

$\Rightarrow \quad (\rho + P)\,\Phi_{,i} = -P_{,i}$ rovnováha mezi grav. a vztl. silou

klasicky: $\rho\nabla\Phi = -\nabla p$

J. Michell 1783 : světlo nemusí uletět do ∞ : $\Rightarrow$ $r_g = \frac{2GM}{c^2}$

pevné M nový bod, M se rozšiřuje

- „přisypáváme" postupně hmotu do $r=0$, světel. kužel se mění $\rightarrow$ více svislý
- nakonec horizont až v tomto bodě $\Rightarrow$

foton na horizontu se nepohybuje zůstává na horiz. : není ve sporu se STR: (všude ~~je~~ rychlost světla): vůči kterémukoli pozorovateli poh. se bez ~~na~~ rychlostí $\Leftarrow$ pozo se poh. rychl. světla

- už před horizontem velká nehomogenita pole

nehomog.^{2} = $R \cdot R \sim \frac{M^2}{r^6} \sim M^{-4}$

- na horizontu : dokonce vůči jakémukoli fyzikálnímu (časupod.) pozorovateli se pohyb. fotony rychl. c

Pohyb volných test. částic ve Schwarzs. prostoročasu

integrály pohybu:

$E = -p_t$

$L = p_\varphi$ · kov. složka

$$-m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = g^{tt} E^2 + g^{rr} (p_r)^2 + g^{\varphi\varphi} L^2$$

$p_\vartheta = 0$ bůhžeo, neboť pohyb je rovinný, volme $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\nu$$

diagonalita metriky $\Rightarrow$ $g^{t\alpha} g_{\cdot t} = g^{tt} g_{tt} = 1 \Rightarrow g^{tt} = \frac{1}{g_{tt}}$, obdobně $g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}}$

$g^{rr} p_r p_r = g_{rr} p^r p^r$ (plyne z diagonality metriky)

$$p_r = g_{r\alpha} p^\alpha = g_{rr} p^r$$

nenulové pouze pro $r = \alpha$

$g_{rr} = -\frac{1}{g_{tt}}$, neboť $ds^2 = -\underbrace{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}_{g_{tt}} dt^2 + \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}_{g_{rr}} dr^2$

Tedy máme po dosazení

$$-m^2 = \frac{1}{g_{tt}}\left[E^2 - (p^r)^2\right] + \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} L^2$$

; $g_{tt} \neq 0$ kromě horizontu

$$(p^r)^2 = E^2 + g_{tt}\left(m^2 + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}}\right)$$

$$E = -g_{tt}\, p^t \Rightarrow p^t = -\frac{E}{g_{tt}}$$

$$L = g_{\varphi\varphi}\, p^\varphi \Rightarrow p^\varphi = +\frac{L}{g_{\varphi\varphi}}$$

rovnice ~~pohy~~ popisující pohyb

(pro ϑ je triviální $p^\vartheta = 0$

1) hmotné částice: $m \neq 0$ vydělme rce m^2:

ozn.: $\tilde{E} = \frac{E}{m}$, $\tilde{L} = \frac{L}{m}$

$$(u^r)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2$$

, kde $\tilde{V}^2 = -g_{tt}\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{g_{\varphi\varphi}}\right) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)$

je efektivní potenciál

klasická fyzika

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\left[(v^r)^2 + (v^\varphi)^2\right] + \Phi$$

, $\Phi = -\frac{M}{r}$

$$\tilde{L} = r^2 v^\varphi$$

$$(v^r)^2 = 2(\tilde{E} - \tilde{V}_{eff})$$

, kde $\tilde{V}_{eff} = -\frac{M}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}$

$$v^\varphi = \frac{\tilde{L}}{r^2}$$

limita ke klas. teorii: slabé pole ⇒ velké r ($r \gg M$) ; v^φ malé ⇒ $\tilde{L} \ll$

$$\tilde{V} \approx \left(1 - \frac{M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right) \approx 1 - \frac{M}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}$$

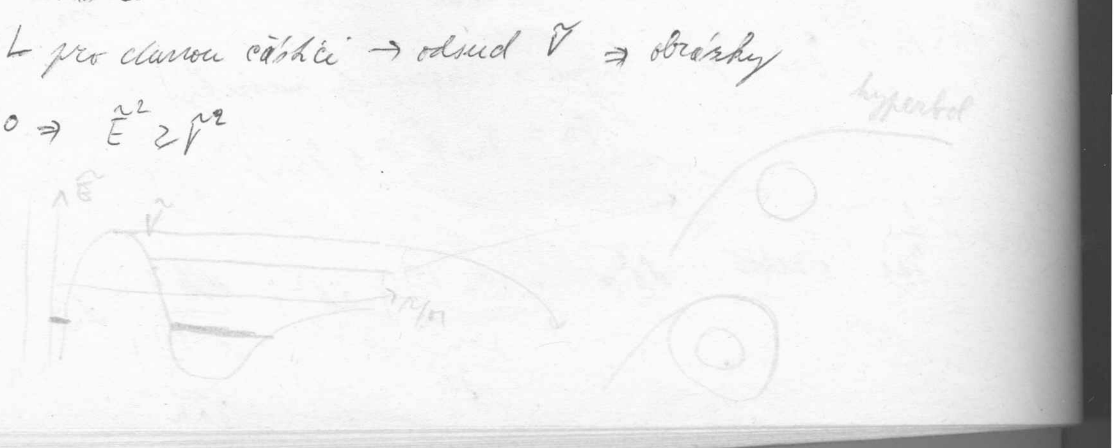
$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

klidová energie $1 = \frac{mc^2}{m}$

- kam se může částice dostat?

: zvol L pro danou částici → odud $\tilde{V}$ ⇒ obrázky

$$(u^r)^2 \geq 0 \Rightarrow \tilde{E}^2 \geq \tilde{V}^2$$



statický pozorovatel: $r, \vartheta, \varphi =$ konst (není lokálně inerc.: zrychlený) → vytvoří lokální kartéz. systém

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad \text{vl. čas částice} \quad ; \quad v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad ; \quad \hat{u}^\alpha = \frac{dx^{\hat\alpha}}{d\hat\tau}$$

lokálně: $$\hat{v}^k = \frac{dx^k}{d\hat\tau} \longrightarrow \hat{v}^{\hat k} = \frac{\sqrt{g_{kk}}\, dx^k}{d\hat\tau} = \sqrt{g_{kk}}\, \frac{dx^k}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{d\hat\tau}$$

↳ vl. čas pozorovatele

- neboť má pozorovatel jed. vekt. ve směru souřadnic → měří vlastní vzdálenosti
- podíl souřadnic přírůstku a vlast. vzdál. je $\sqrt{g_{kk}}$

$$\hat{v}^{\hat k} = \sqrt{g_{kk}}\, \frac{u^k}{u^t}\, \hat{u}^t = \sqrt{-\frac{g_{kk}}{g_{tt}}}\, \frac{u^k}{u^t}$$

$$-1 = g_{\alpha\beta}\, \hat{u}^\alpha \hat{u}^\beta = g_{tt} (\hat{u}^t)^2 \rightarrow \text{odsud } \hat{u}^t = \sqrt{-g_{tt}}$$

pozor. stojí

$$\hat{v}^{\hat\varphi} = \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}}\, \frac{u^\varphi}{u^t} = \sqrt{-\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}\, \frac{\tilde{L}}{\tilde{E}}$$

$$u^t = -\frac{\tilde{E}}{g_{tt}} \quad ; \quad u^\varphi = \frac{\tilde{L}}{g_{\varphi\varphi}}$$

KRUHOVÉ DRÁHY:

$$u^r = 0 \Leftrightarrow \tilde{E} = \tilde{V} \quad ; \quad \tilde{V}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial (\tilde{V}^2)}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2M}{r^2}\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{2\tilde{L}^2}{r^3} = 0 \quad / r^4$$

extrém potenciálu

$$2M(r^2 + \tilde{L}^2) - (r - 2M)\, 2\tilde{L}^2 = 0$$

$$\tilde{L}^2 = \frac{M r^2}{r - 3M}$$

$$\tilde{E}^2 = \tilde{V}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{M}{r - 3M}\right) = \frac{(r - 2M)^2}{r(r - 3M)}$$

$$(\hat{v}^{\hat\varphi})^2 = \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}\, \frac{M r^3}{(r - 2M)^2} = \frac{M}{r - 2M}$$

$r \gg M$: newton. situace

$r = 3M$: foton : limitní případ kruh. polem.

$r < 6M$: orbita je nestabilní

$r > 4M$: ener. vázané

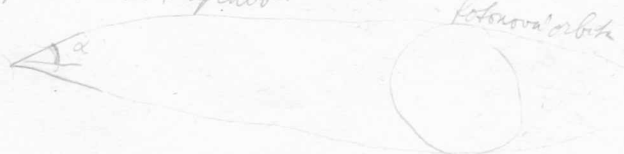
Nulové geodetiky ($m = 0$)

$$g^{\alpha\gamma} p_\alpha p_\gamma = -m^2 \Rightarrow (p^r)^2 = E^2 + g_{tt}\left(m^2 + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}}\right)$$

$$(p^r)^2 = E^2 \left(1 + \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} \frac{L^2}{E^2}\right) = E^2\left(1 - \frac{\ell^2}{\lambda^2}\right), \quad \text{kde } \lambda \equiv \sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{-g_{tt}}}$$

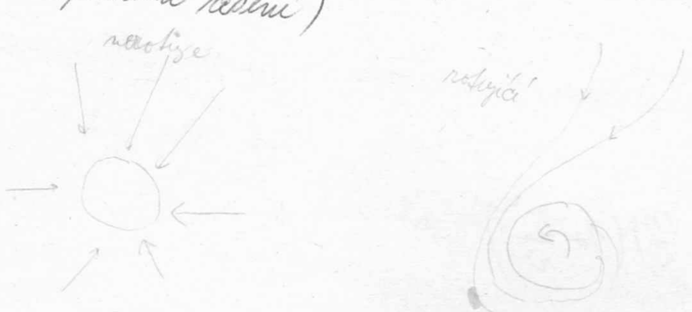
- narozdíl od $m \neq 0$ konstanta pohybu ℓ leží pod křivkou
- potenciál nezávisí na charakteristikách částice (fotonu)

pro obr. na str. 6 vpravo:



Kerrovo řešení Einsteinových rovnic (1963)

- přesné řešení E. r. kolem nenabitého rotujícího objektu
- Schwarzschild: pro ∀ sfér. sym. objekt × Kerr: pouze tenké diskové ob...
(velmi speciální řešení)



- narozdíl od klas. teorie: dráhy padajících částic se zakřiví
- Mach: rotace ne vůči absolut. prost. systému, ale vůči neurčeném systému (např. u Fouc. kyv. je důležitý částečně i pohyb Země, nejen...
- Einstein: částice v gravit. smyčce „strhneme" se smyčkou → částice
to narozdíl od klasické teorie „neví"
- strhávání: Lense-Thirringův efekt (1918) = „dragging" (vlečení, str...
= gravito-elektromag. pojem GEM (podobné mag. indukci)

- Kerrovo řeš.: nejjednod. ze všech rotujících řeš.
- bez odvození:

$$ds^2 = -dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4+a^2z^2}\left[dT + \frac{r(x\,dx+y\,dy) - a(x\,dy - y\,dx)}{r^2+a^2} + \frac{a\,dz}{r}\right]^2$$

v Kerrově-Schildově souř.

.5.

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{A}dt^2 + \frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta\,(d\varphi - \omega\,dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma\,d\theta^2$$

Boyerovy-Lindquistovy souř.

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$A = (r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta = \Sigma(r^2+a^2) + 2Mra^2\sin^2\theta = \Delta\Sigma + 2Mr(r^2+a^2)$$

$$\omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2Mar}{A}$$

-(v B.-L.): metrika stacionární: $g_{\mu\nu,0} = 0$
- axiálně symetrická $g_{\mu\nu,3} = g_{\mu\nu,\varphi} = 0$
- reflexně symetrická vůči: $\theta = \frac{\pi}{2}$
- ale narozdíl od Schw.: není statický $g_{0i} \neq 0$ pro $i = \varphi = 3$ $\left(g_{t\varphi} = -\frac{2Mar}{\Sigma}\sin^2\theta\right)$

limity:

$a = 0$ ⇒ Schwarzschild ve Schw. souřadnicích (vyjadřujeme-li z B.L.)

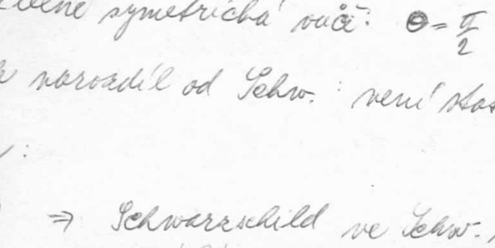
$M = 0$ ⇒ (Minkowského) plochý prostoročas (v K.S.)

pro B.L. vychází v $-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)$ → nejde o sférické, ale elipsoidální souřadnice

$r \to \infty$ ⇒ → Schwarzsch. → Minkow.

a^2 - rovnom. rotace invariantní vůči: $t, \varphi \to -t, -\varphi$
$t, a \to -t, -a$
$\varphi, a \to -\varphi, -a$

geom. význam:



→ $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta$

$a = \frac{J}{M}$ — moment hybnosti

volba $a \geq 0$: rotace ve směru φ

- vztahy mezi souřadnicemi:

$$\frac{x^2+y^2}{r^2+a^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\sin^2\theta}-\frac{z^2}{\cos^2\theta}=1$$

- singularity

$A > 0 \quad \forall r \Rightarrow$ ok

$\Sigma = 0 \Leftrightarrow r=0 \wedge \theta=\frac{\pi}{2}$ (bod singulární pouze z 1 strany) → byl kalb

$\Delta = 0 \Leftrightarrow r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-a^2}$ → horizont → bez zdůvod... analogie se Sch...

$\Rightarrow$ 2 horizonty

a>M

není horizont

$\Delta=0$ nemá řešení

černá díra

extrémní čer. díra

nahá singularita

- problém s nahou singularitou: nelze řešit Cauchyho úlohu (zadané po

→ nelze předpovědět odezvu singularity

- u čer. díry problém nenastane, informace nemůže ven

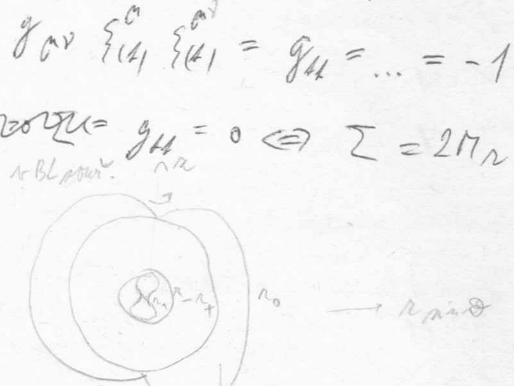
- 1969: Penrose: kosmická cenzura (hypotéza): $\forall$ sing. vzniklé z grav... nejsou nahé

- horizonty ≠ stat. mez, plocha s ~~redshiftem~~ redshiftu (stejné)

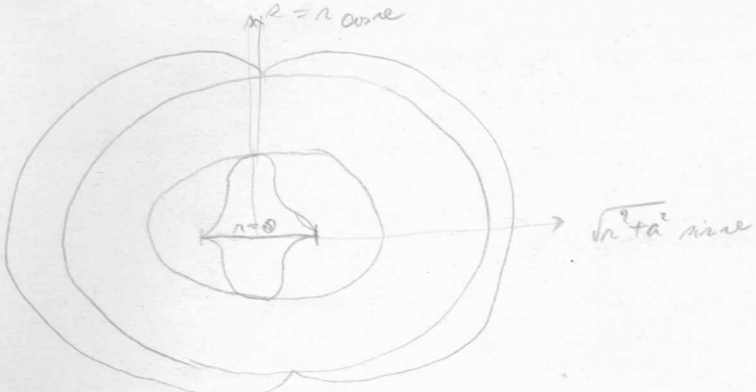
$$\xi^\mu_{(t)} \overset{BL}{=} (1,0,0,0)$$

$$g_{\mu\nu}\,\xi^\mu_{(t)}\,\xi^\nu_{(t)} = g_{tt} = \dots = -1+\frac{2Mr}{\Sigma}$$

$$g_{tt} = 0 \Leftrightarrow \Sigma = 2Mr = r^2+a^2\cos^2\theta \Leftrightarrow r_{0,1} = M \pm \sqrt{M^2-a^2\cos^2\theta}$$



kdy se pozorovatel udrží v r-směru, ale nutně musí rot...
nemůže stát na místě



$r=0 \wedge \theta = \pi$ (BL)

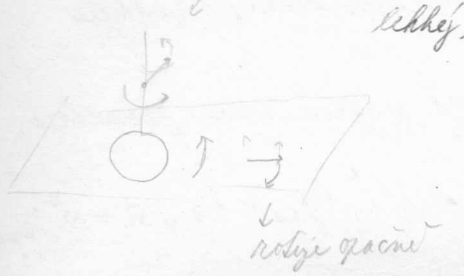
$R=0 \wedge x^2+y^2=a^2$ (KS)

- singularita $\overset{r=0}{\bigcirc}$ pouze na obvodu disku, uvnitř ne
- ale uvnitř povrch. hustota hmoty (plyne z nenul. der. metriky, ke pokud nadrahé stranou $r>0$)
- jiná interpretace: přechod do $r<0$ (jiný list metriky $\Rightarrow r<0 \Rightarrow J<0$

redshift: $\sqrt{\frac{-g_{00}(x)}{-g_{00}(x')}} = \infty \Leftrightarrow g_{00}(x') = g_{tt} = 0 \Leftrightarrow$ stat. mez

DRAGGING

- lehký bermon - setrvačník



Označíme iner. souř. T, X, Y, Z: v něm $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

souřadnice rotující vůči nim rychl. $-\omega$ označme t, ρ, φ, z

$X = \rho \cos(\varphi - \omega t)$

$Y = \rho \sin(\varphi - \omega t)$

$Z = z$

$$\Rightarrow ds^2 = \ldots = -dt^2 + \rho^2 \underbrace{(d\varphi - \omega dt)^2}_{\text{podobný člen jako u Kerra}} + d\rho^2 + dz^2$$

ω - úhl. rychl. vůči ∞: "$\underset{\downarrow}{d\varphi} - \omega \underset{\text{vlast. čas pozorovatele v }\infty}{dt}$"

STACION. KRUH. POHYBY ve stacionárním ax. sym. prostoročase

„stát vůči ∞": mít stejné r, θ, φ

„stát vůči geometrii": rotovat právě s frekv. ω

- rovn. pohyb po kružnici s osou sym. (i mimo ekvat. rovinu) vůči nekonečnu (obecně pozorovatel urychlený ⇒ ne geodetika) s úhl. rychl.

$$u^\alpha \overset{DEF}{=} u^t\,(1,0,0,\Omega) = \qquad , \text{neboť } u^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau} = \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\Omega}\,\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{u^t}$$

$$= \xi^\alpha_{(t)} + \Omega\,\xi^\alpha_{(\varphi)}$$ → je opět Killingův vektor (pro $\Omega =$ konst) tj: podél každé dané trajektorie

normalizace $| -u- |$

- tj: ∀ pozorovatel takto se pohybující vidí časově neproměnnou geometrii

$$-1 = g_{\alpha\gamma} u^\alpha u^\gamma = (u^t)^2 g_{tt} + 2\, g_{t\varphi} u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi} (u^\varphi)^2 = (u^t)^2 (g_{tt} + 2 g_{t\varphi}\Omega + \Omega^2 g_{\varphi\varphi})$$

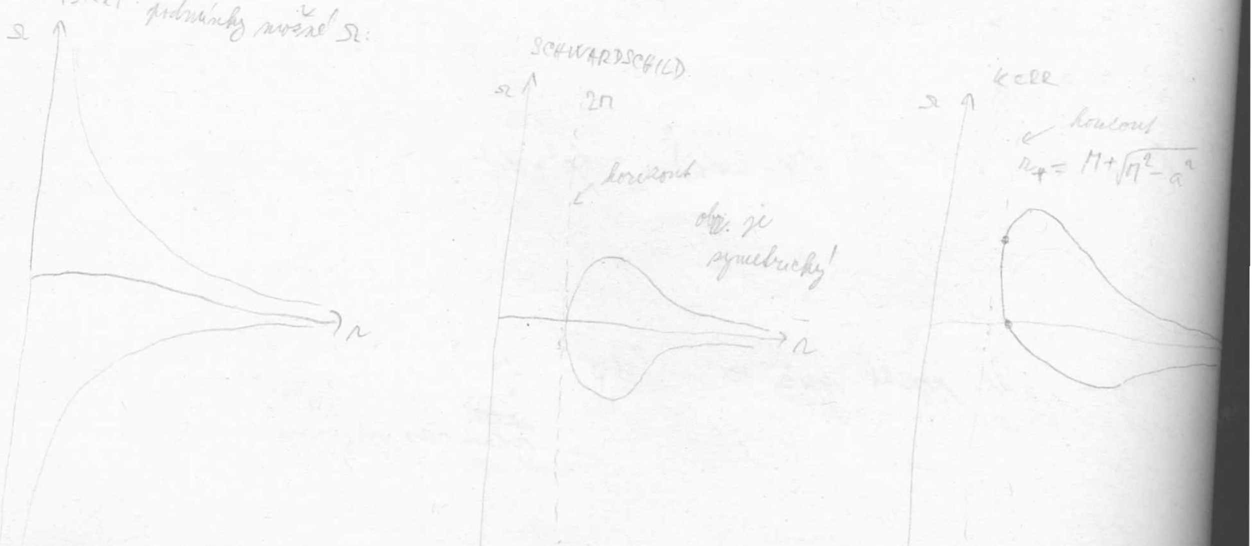
$$\Rightarrow u^t = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2 g_{t\varphi}\Omega - g_{\varphi\varphi}\Omega^2}}$$

- kdy je tato 4rychl. světelná?

· chceme $u^t = \infty$ ⇒ pro daný bod určíme $g_{tt}, g_{t\varphi}, g_{\varphi\varphi}$ → kvad. rce pro Ω

$$\Omega_{\substack{min\\max}} = \underset{\substack{\parallel \\ -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}}}{\omega} \mp \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}$$

KLASICKY: podmínky možné Ω:



18.5.

Schw.: na horizontu pouze pro $\Omega = 0$

X Kerr: v blízkosti horizontu nelze zůstat s $\Omega = 0$ ⇒ č. d. nás donutí dříve korotovat, než do ní spadneme

– určení statické meze:

$$0 = \Omega_{min} = \omega - \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \Leftrightarrow g_{tt} = 0$$

$$g_{\mu\nu}\,\xi^\mu_{(t)}\,\xi^\nu_{(t)} \overset{BL}{=} g_{tt}$$

$(1,0,0,0)$

$$g_{tt} = -1 + \frac{2Mr}{\Sigma} \Rightarrow r = r_{0,1} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$$

– jediná povolená rychlost na horizontu:

$\frac{\varphi}{t} = \text{konst.}$

$$\Omega^{kerr}_{\substack{min\\max}} = \omega \mp \frac{\Sigma\sqrt{\Delta}}{\mathcal{A}\sin\theta}$$

$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr = 0$

· horizont: $\Delta = 0 \Rightarrow \Omega^{kerr}_{\substack{min\\max}}(\text{horizont}) = \omega_+ = \frac{2Mar}{\mathcal{A}}$; $\mathcal{A}_+ \overset{\text{horizont}}{=} (r_+^2 + a^2)^2 = (2Mr_+)^2$

$r = r_+$; $\mathcal{A} = (r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \omega_+ = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{a}{2M(M + \sqrt{M^2 - a^2})}$$

· zajímavé: ω_+ nezávisí na θ ⇒ úhl. rychl. rotace horizontu vůči ∞ je konstanta

$) = -1$

– případ $\Omega = \omega$: pozorovatel nerotující vůči geometrii: ZAMO — zero angular momentum observer

$$\tilde{L} = u_\varphi = g_{\varphi\varphi}u^\varphi + g_{\varphi t}u^t = g_{\varphi\varphi}u^t\Big(\Omega + \underbrace{\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}}_{-\omega}\Big) = g_{\varphi\varphi}u^t(\Omega - \omega)$$

nenul. jen u_t, u_φ

obecné (nejen Kerr), nejen ZAMO

ZAMO: $\Omega = \omega \Rightarrow \tilde{L} = 0$

$$u_\mu = g_{\mu\alpha}u^\alpha = (-\tilde{E}, 0, 0, \tilde{L}) \overset{ZAMO}{=} (-\tilde{E}, 0, 0, 0)$$

$u^\alpha (1,0,0,\Omega)$

$g_{r\alpha} = 0$ pro $\alpha \neq r$

$g_{\theta\alpha} = 0$ pro $\alpha \neq \theta$

· 4 vektor $\in \{t = \text{konst}\}$ označ. s^μ

$$s^\mu = (0, s^i)$$

$$\Rightarrow u_\mu s^\mu = 0$$

srovnej se STR: protože kolmý k $\{t = \text{konst}\}$ jsou stojící ⇒ ZAMO je zobecnění stojících pozorovatelů

- pošlu 2 fotony proti sobě ~~ob~~ po kruh. dráze ⇒ ZAMO je opět uvid...
~~ba~~ ~~do~~ stejně dopadnout

- vůči ZAMO pozor. se částice padající s ~~s~~ $L=0$ pohybují radiálně

Relativistická kosmologie

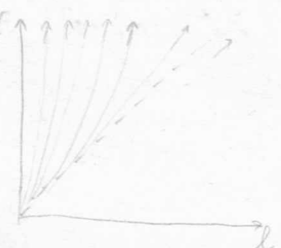
- lze těžko experimentovat: pouze 1 vesmír, nemožnost statistiky
- základní pozorování: 1) ve velkých škálách ∀ vesmír homogenní a isotrop...

(∅: 200 Mpc)

2) Hubbleova expanze

$$v = H\,l \qquad H = 72\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$$

v → rychlost, l → vzdálenost, H → Hubbleova konst.



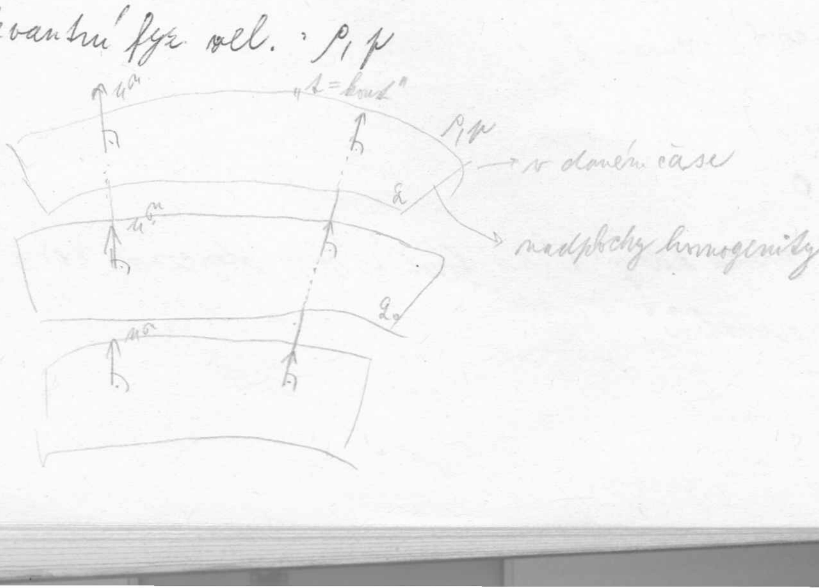
„nadsvětel. pohyb": pro velká l může být: není iner. soustavě

$$\frac{l}{v} = \frac{1}{H} \equiv T \quad \text{Hubbleův čas}$$

- ale: rozpínání se musí brzdit: nejdříve bylo větší ⇒ ~~de~~ dostali jsme odhad stáří vesmíru

ad 1) = kosmologický princip

- homogenita ~~*~~ a izotropie: závislá na pozorovateli
- lépe: ∃ třída pozorovatelů, pro které je...
  - homogenita ∀ událostí ve vesmíru prochází prostorupod. nadplocha, na níž jsou události od sebe nerozlišitelné
- relevantní fyz. vel.: ρ, p



- izotropie v ∀ bodě ⇒ homogenita
- souřadnice („synchronní")

$$t(\varrho) = t(\varrho_0) + \int_{\varrho}^{\varrho_0} d\tau$$

→ vlastní čas „galaxií" (člen.: pixelů, bodů)

⇒ $dt = d\tau$ → jako čas. souř. bereme vlast. čas bodů $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (1,0,0,0)$

zvolme 4 vektor $\vec{B}$ ∈ nadplochy hom.:

$$B^\alpha = (0, B^i)$$

$$0 = g_{\alpha\nu} u^\alpha B^\nu = g_{ti} B^i \Rightarrow g_{ti} = 0$$

$$ds^2 = \underbrace{g_{tt}}_{=-1} dt^2 + \underbrace{g_{ij}\, dx^i dx^j}_{\equiv d\sigma^2}$$

→ kosmický čas

- nadplochy hom. : třírozměr. variety konst. křivosti → odsud $d\sigma^2$

kladná křivost a)

nulová b)

záporná křivost c)

• v dané skupině se variety liší pouze škálou (různě velké sféry)

- vnoření do 4D Euklid. prostoru s metrikou $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$:

$$(x^4)^2 \pm \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 = a^2 \quad \text{pro } a \in \mathbb{C}$$

→ odsud metrika:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - k\frac{r^2}{a^2}} + r^2 \underbrace{\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}_{d\Omega^2}$$

parametr křivosti
$k = +1$ a)
$k = 0$ b)
$k = -1$ c)

- transformace: $r = a\Sigma$, $\Sigma = \begin{cases} \sin\chi & \text{a)} \quad \langle 0, 2\pi) \\ \chi & \text{b)} \quad \langle 0, \infty) \\ \sinh\chi & \text{c)} \quad \langle 0, \infty) \end{cases}$

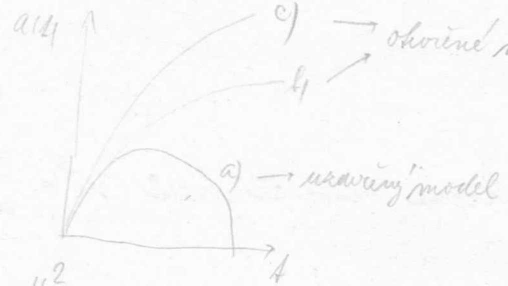
$$\Rightarrow d\sigma^2 = a^2\left(d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2\right)$$

$$\Rightarrow ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2\right)$$

$a(t)$ → faktor expanze
a může záviset na čase

FRW metrika (v hypersférických souř.)
Friedmann, Robertson, Walker

→ dynamika vesmíru: určena faktorem expanze objem: $V = \int_0^{\chi_{max}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} g_{\chi\chi}\, g_{\theta\theta}\, g_{\varphi\varphi}\; d\varphi\, d\theta\, d\chi$ $\quad < +\infty$ a) $\quad = +\infty$ b), c)



$$\underbrace{\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2}_{= H^2(t)} + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8}{3}\pi G \rho$$

$$\frac{2\, a_{,tt}}{a} + \underbrace{\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2}_{= H^2(t) \leftarrow \text{Hubbleova konst.}} + \frac{Kc^2}{a^2} = \Lambda c^2 - \frac{8\pi}{c^2} G P$$

} po dosaz. do Ein. rovnic

FUNNY. VACLAVAK. NE

/ SF. RAR

/ HUANG. DJVU