Substituce ve vícenásobném integrálu

verze 1.1

1 Úvod

Následující text popisuje výpočet vícenásobných integrálů pomocí věty o substituci. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT2 k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Teorie

Věta 2.1. *Nechť M je množina a nechť ψ je prosté regulární zobrazení otevřené množiny $G \in \mathbb{R}_r$ do $\mathbb{R}_r$ takové, že $M \in \psi(G)$. Pak platí*

$$\int_M f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\psi^{-1}(M)} f(\psi(x))|\det J|\,\mathrm{d}x\,,$$

má-li alespoň jedna strana smysl. Zde $J = \frac{\mathrm{D}\psi(x)}{\mathrm{D}(x)}$ je Jacobiho matice zobrazení $\psi(x)$, tedy matice prvních parciálních derivací tohoto zobrazení.

Při substituci musíme provést tři věci. Za prvé změnit meze integrálu, aby hranice integrované oblasti byly popsány v nových proměnných. Za druhé provést substituci v integrované funkci, přepsat ji do nových proměnných. Třetí (a možná nejdůležitější) změnou je přidání faktoru, který odpovídá determinantu Jacobiho matice. Protože jednotkový čtvereček (např. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$) má po substituci jinou velikost (např. $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$), je třeba do integrálu přidat faktor, který tuto změnu kompenzuje.

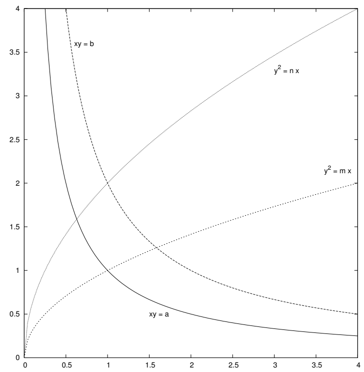
3 Řešené příklady

Příklad 3.1. *Určete obsah roviny omezené hyperbolami $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$ a parabolami $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $0 < m < n$.*

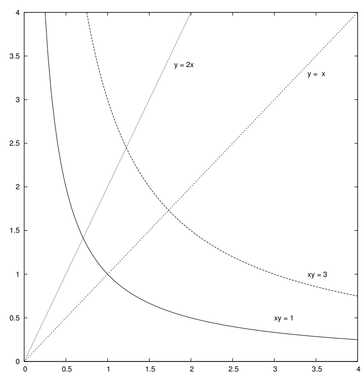
Řešení: Zvolíme si substituci $u = xy$, $v = y^2/x$. Tuto substituci volíme proto, aby nově zavedené proměnné měly jednodušší meze. Vidíme, že v nových proměnných u a v budeme integrovat přes obdélník: $a < u < b$, $m < v < n$. Nyní musíme vyjádřit staré proměnné pomocí nových $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Např. vyjádřením y z první rovnice $y = u/x$, dosazením do druhé $v = u^2/x^3$ a úpravou dostáváme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}} = u^{2/3}v^{-1/3}$. Zpětným dosazením do rovnice pro y máme $y = u^{1/3}v^{1/3}$.

Vztahů pro x a y můžeme využít pro výpočet Jacobiho matice:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{pmatrix}.$$



Obrázek 1: Obrázek k příkladu 3.1



Obrázek 2: Obrázek k příkladu 3.2

$$\det J = \frac{1}{3v}\,.$$

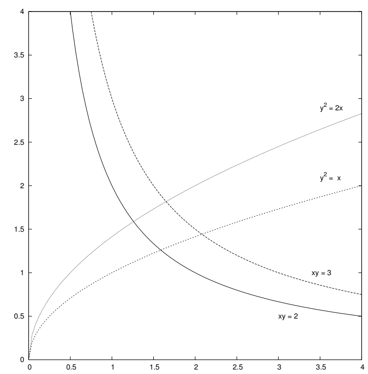
Nyní už můžeme využít věty o substituci a dosadit do vztahu výše. Protože počítáme obsah roviny, je integrovaná funkce jednička.

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\psi^{-1}(M)} \frac{1}{3v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_a^b \left(\int_m^n \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{3}\int_a^b (\ln n - \ln m)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}(b-a)\ln(\frac{n}{m})\,.$$

Příklad 3.2. *Vypočtěte integrál* $\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *přes množinu* M *danou vztahy* $\frac{1}{x} \le y \le \frac{3}{x}$ *a* $x \le y \le 2x$.

Řešení: Přepsáním výrazů ohraničujících množinu M tak, aby na levé resp. pravé straně nerovnic byly konstanty, získáváme $1 \le xy \le 3$, $1 \le \frac{y}{x} \le 2$. Tyto



Obrázek 3: Obrázek k příkladu 3.3

výrazy nás navádí na to, abychom využili substituce

$$u = xy\,, \quad v = \frac{y}{x}\,.$$

Nové proměnné se pohybují v mezích $1 \le u \le 3$, $1 \le v \le 2$. Opět např. vyjádříme y z první rovnice a dosadíme do druhé (případně můžeme taky levé a pravé strany rovnice vynásobit mezi sebou). Dostáváme

$$x = u^{1/2}v^{-1/2}\,, \quad y = u^{1/2}v^{1/2}\,.$$

Jacobiho matice pak je

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} \end{pmatrix}\,.$$

$$\det J = \frac{1}{2v}\,.$$

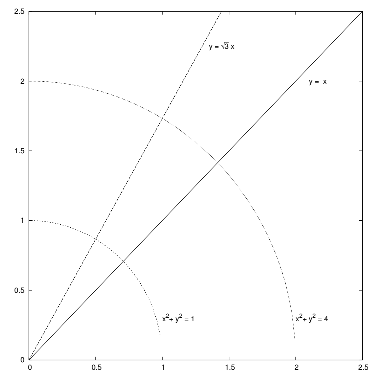
Integrál tedy vypočítáme následovně:

$$\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{u^2}{2v}\,\mathrm{d}v\right)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^3 \frac{1}{2}[\ln v]_1^2 = \frac{13}{3}\ln 2\,.$$

Příklad 3.3. *Pomocí substituce vypočtěte integrál* $\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde množina* M *je dána vztahy* $\frac{2}{x} \le y \le \frac{3}{x}$*,* $x \le y^2 \le 2x$*.*

Řešení: Vztahy ohraničující množinu M si přepíšeme tak, aby na krajních stranách byly konstanty: $2 \le xy \le 3$, $1 \le \frac{y^2}{x} \le 2$. Odsud vidíme, že nejlepší substituce je $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$, kde $2 \le u \le 3$ a $1 \le v \le 2$. Dále nalezneme inverzní vztahy $x = u^{2/3}v^{-1/3}$, $y = u^{1/3}v^{1/3}$. Jacobiho matice je

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{pmatrix}\,.$$



Obrázek 4: Obrázek k příkladu 3.4

$$\det J = \frac{1}{3v}\,.$$

S využitím vztahu $\frac{y^3}{x^3} = \frac{v^2}{u}$ integrál určíme jako:

$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^3 \left(\int_1^2 \frac{v^2}{u}\frac{1}{3v}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 [\ln u]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\,.$$

Příklad 3.4. *Pomocí substituce určete integrál* $\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána vztahy* $1 \le x^2+y^2 \le 4$*,* $x \le y \le \sqrt{3}x$

Řešení: Jak výraz v integrálu, tak části kružnic ohraničující množinu M navádějí na polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Množina M je v nich ohraničena vztahy $1 \le r \le 2$, $r\cos\varphi \le r\sin\varphi \le \sqrt{3}r\cos\varphi$, z čehož plyne $1 \le \operatorname{tg}\varphi \le \sqrt{3}$, a tedy $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Nyní vypočteme jakobián pro polární souřadnice, který se nám bude hodit i v dalších příkladech.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

$$\det J = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\,.$$

Ve výsledném integrálu se objeví jedno r za integrovanou funkci a jedno r z jakobiánu.

$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 [\varphi]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{7}{36}\pi\,.$$

Příklad 3.5. *Pomocí substituce ve vícenásobném integrálu odvoďte vztah pro obsah kruhu o poloměru R.*

Řešení: Zavedeme si polární souřadnice jako v minulém příkladu. Víme, že $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ a $\det J = r$. Potom je obsah kruhu roven integrálu:

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r \,\mathrm{d}r = 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^2 \,.$$

Příklad 3.6. *Určete integrál $\int_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je část kruhu o poloměru 1 a středu 0 v prvním kvadrantu.*

Řešení: Protože integrujeme přes čtvrtkruh, zvolíme opět polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, meze budou $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, jakobián je jako v předchozích příkladech r. V integrálu se objeví r^3: jedno za x, druhé za y a třetí z jakobiánu.

$$\int_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r\cos\varphi \, r\sin\varphi \, r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{4} \cos 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}$$

Využili jsme vztahu $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Příklad 3.7. *Pomocí substituce vypočtěte $\int_M (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je omezená křivkami $x + y = 0$, $x + y = 1$, $2x - y = 0$, $2x - y = 3$.*

Řešení: Zavedeme substituci $u = x + y$ a $v = 2x - y$, máme tedy $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 3$. Inverzní vztahy jsou $x = \frac{u+v}{3}$, $y = \frac{2u-v}{3}$. Jacobiho matice je:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

$$\det J = -\frac{1}{3} \,.$$

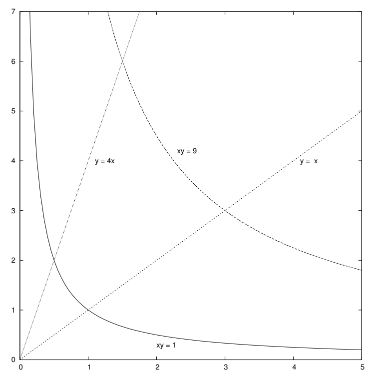
Jakobián je $-1/3$, do integrálu ale dáváme absolutní hodnotu jakobiánu, tj. $1/3$.

$$\int_M (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 \int_0^1 u^2 \frac{1}{3} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 [v]_0^3 = \frac{1}{3} \,.$$

Příklad 3.8. *Určete integrál $\int_M \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina v 1. kvadrantu ohraničená hyperbolami $xy = 1$, $xy = 9$ a přímkami $y = x$ a $y = 4x$.*

Řešení: Ohraničení množiny M a výraz v integrálu navádí na substituci $u^2 = xy$, $v^2 = \frac{y}{x}$ (možná je i jiná volba). Hranice v nových proměnných budou $1 \le u \le 3$, $1 \le v \le 2$. Vydělením a vynásobením definičních vztahů pro u a v dostáváme $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$. Jacobiho matice pak je:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{pmatrix} , \quad \det J = \frac{2u}{v} \,.$$



Obrázek 5: Obrázek k příkladu 3.8

Pro integrál dostáváme

$$\int_M \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_1^3 (u+v)\frac{2u}{v}\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}v =$$
$$= \int_1^2 \left[\frac{2u^3}{3} + 2v\frac{u^2}{2}\right]_1^3 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \left(\frac{52}{3v} + 8\right) \mathrm{d}v = \frac{52}{3}[\ln v]_1^2 + 8(2-1) =$$
$$= \frac{52}{3}\ln 2 + 8(2-1) = \frac{52}{3}\ln 2 + 8\,.$$

Příklad 3.9. *Určete integrál* $\int_M \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je kruh o poloměru 2 se středem v počátku.*

Řešení: Použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\det J = r$.

$$\int_M \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r\sin r^2\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi = 2\pi\frac{1}{2}[-\cos t]_0^4 = \pi(1-\cos 4)\,.$$

V integrálu jsme použili substituci za $t = r^2$.

Příklad 3.10. *Určete obsah elipsy o poloosách* a *a* b*.*

Řešení: Rovnice elipsy je $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ a lze ji parametrizovat $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, kde $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Jacobiho matice je

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det J = abr(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = abr\,.$$

Protože počítáme obsah plochy, je integrovanou funkcí jednička.

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = ab2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = ab\pi\,.$$

Příklad 3.11. *Přechodem k polárním souřadnicím určete plošný obsah části roviny, určené následujícími nerovnostmi, respektive hraničními křivkami:*

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\,, \quad x^2+y^2 \geq a^2\,, \quad a \neq 0\,.$$

Řešení: Použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\det J = r$. V nich hraniční křivky vypadají $r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, tj. $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ a $r^2 \geq a^2$. Rovnosti v prvním vztahu se pro $r = a$ dosahuje pro $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$, tj. $\varphi = \pi/6$. Meze v polárních souřadnicích tedy jsou $a \leq r \leq a\sqrt{2}\cos 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$. Pro integrál dostáváme

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_a^{a\sqrt{2}\cos 2\varphi} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a^2}{2}(2\cos^2 2\varphi - 1)\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{a^2}{8}[\sin u]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

V integrálu jsme provedli substituci $u = 4\varphi$ a použili vztah $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$.

Příklad 3.12. *Kruhový válec o poloměru podstavy R výšce h s osou ve směru osy z je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g z}{p_0}}$. Určete hmotnost plynu ve válci.*

Řešení: Použijeme válcové souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Obdobně jako u polárních souřadnic je jakobián $\det J = r$. Hmotnost plynu vypočteme jako integrál z hustoty přes celý objem válce.

$$m = \int_V \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\psi^{-1}(V)} \rho r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\int_0^h \rho_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\pi\frac{R^2}{2}\rho_0\int_0^h \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}z}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2 p_0}{g}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}\right)\,.$$

Příklad 3.13. *Vypočítejte obsah množiny M, která je ohraničena lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.*

Řešení: Křivka je středově symetrická podle počátku, budeme počítat obsah části M v prvním kvadrantu a vynásobíme jej pak 4. Použijeme polární souřadnice, v nich dostáváme

$$0 \leq r^4 \leq r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2\cos 2\varphi\,,$$

tj. $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}$. Použili jsme vztah $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$. Aby tato nerovnost mohla být splněna, musí být $\cos 2\varphi$ kladný. Dostáváme tedy $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Průnik s prvním kvadrantem dává $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Obsah množiny M tedy je

$$S = \int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\psi^{-1}(M)} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,\mathrm{d}u = 1\,.$$

4 Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky III., Matfyzpress, Praha, 2002, kapitola 2

2. Šibrava Zdeněk, Příklady k Matematice 3 – vícenásobné integrály, dostupné z www: `http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf`

3. `http://www.wiziq.com/tutorial/168706-Substitution-of-the-variables-in-double-integration`

4. `http://www.math24.net/change-of-variables-in-double-integrals.html`