Určitý (Riemannův) integrál

Definice 1. Řekneme, že číslo G je *supremem* (=nejmenší horní hranicí) množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

1. $x \leq G \ \forall x \in M$,
2. $\forall \tilde{G} < G \ \exists x_{\tilde{G}} \in M$, že $x_{\tilde{G}} > \tilde{G}$.

Obdobně je definováno *infimum* (=největší dolní hranice) množiny M.
Supremem (infimem) funkce f na množině M nazveme supremum (infimum) množiny $f(M)$.

Definice 2. Mějme funkci f na intervalu $[a, b]$. Tento interval rozdělíme body $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Definujeme

$$m_i = \inf{}_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad M_i = \sup{}_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Potom číslo $s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ nazýváme *dolním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícímu danému dělení D. Číslo $S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ nazýváme *horním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícímu danému dělení D. Jestliže je supremum dolních součtů funkce f na intervalu $[a, b]$ rovno infimu horních součtů, pak jejich společnou hodnotu nazýváme *určitým (Riemannovým) integrálem* funkce f na intervalu $[a, b]$ a značíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice 3. Pro $a, b \in \mathbb{R}, b < a$ definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0\,.$$

Definice 4. Integrálem komplexní funkce f na intervalu $[a, b]$ rozumíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud integrály napravo existují.

Definice 5. Platí

1. $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
   pokud integrály napravo existují a α a β jsou konstanty.
2. $$\int_a^b C\,\mathrm{d}x = C(b - a)\,,$$
   kde C je konstanta

3.
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
pokud integrál přes největší z intervalů existuje.

Věta 6. Existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak pro každé c mezi a a b je funkce

$$F_c(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

spojitá na $[a,b]$. Je-li f spojitá v bodě $x_0 \in [a,b]$, pak je $F_c'(x_0) = f(x_0)$. Je-li f spojitá na $[a,b]$, pak je F_c primitivní k f na $[a,b]$.

Věta 7. *(Newtonova-Leibnizova formule)* Je-li f spojitá na $[a,b]$ a F je k ní na $[a,b]$ primitivní, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b\,.$$

Tento vzorec platí i pro $b \le a$, je-li f spojitá a F k ní primitivní na $[b,a]$.

Věta 8. *(o integraci per partes)* Mají-li u a v spojité derivace na $[a,b]$, pak je

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Obdobně jako v předchozí větě tato věta platí i pro $b \le a$.

Věta 9. *(o substituci)* Nechť funkce φ má spojitou derivaci na $[a,b]$ a zobrazuje tento interval na interval J. Nechť funkce f je spojitá na J. Potom platí

$$\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Je-li φ navíc ryze monotónní, pak body $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ jsou koncové body intervalu J, k φ existuje na J inverzní funkce φ^{-1} a pro každé $\alpha, \beta \in J$ je

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1 Příklady

Příklad 10. *Vypočtěte* $\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použijeme per partes a člen, který není pod integrálem, vyjádříme v zadaných mezích.

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = |u' = \sin x\,, \quad v = x\,, \quad u = -\cos x\,, \quad v' = 1| =$$
$$= [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi\,.$$

Příklad 11. *Vypočtěte* $\int_0^1 x(4+x^2)^3 \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Využijeme substituce $t = 4 + x^2$. Při substituci nesmíme zapomenout dosadit tři věci: funkci, diferenciál a nové meze.

$$\int_0^1 x(4+x^2)^3 \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = 4 + x^2\,, \quad \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x\,, \quad \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x\,, \\ t(0) = 4\,, \quad t(1) = 5 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_4^5 t^3 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_4^5 = \frac{369}{8}$$

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky I., Matfyzpress, 2002, kap. 8

2. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 6.6