Vícenásobný integrál

verze 1.0

1 Úvod

Následující text se zabývá dvojným a trojným integrálem. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT2 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu `jiri.lipovsky`*zavináč*`uhk.cz`.

2 Teorie

U dvojného integrálu je naším cílem vypočítat integrál z funkce dvou proměnných přes plochu ohraničenou zadanými křivkami. Obdobně u trojného integrálu počítáme integrál přes určitou oblast z funkce tří proměnných. Dvojný integrál značíme $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, někdy se můžeme setkat s komplikovanějším značením pomocí dvou integrálů $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Fubiniho věta nám umožní převést integrál přes tuto podmnožinu $\mathbb{R}^2$ (u trojného integrálu $\mathbb{R}^3$) na sled dvou (tří) jednorozměrných integrací

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

3 Příklady

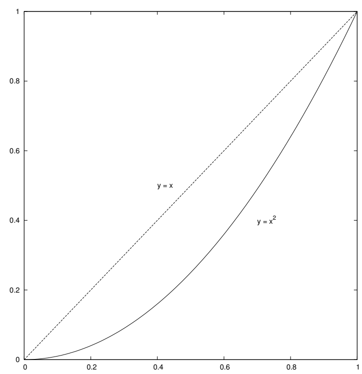
Příklad 3.1. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde množina* M *je ohraničena shora funkcí* $y = x$ *a zdola funkcí* $y = x^2$*.*

Řešení: Nejdříve musíme určit meze jednotlivých proměnných. x jde od 0 do 1 a y jde při pevném x od x^2 do x (viz obr. 1). Máme tedy meze integrálů $0 < x < 1$, $x^2 < y < x$ a můžeme vypočítat

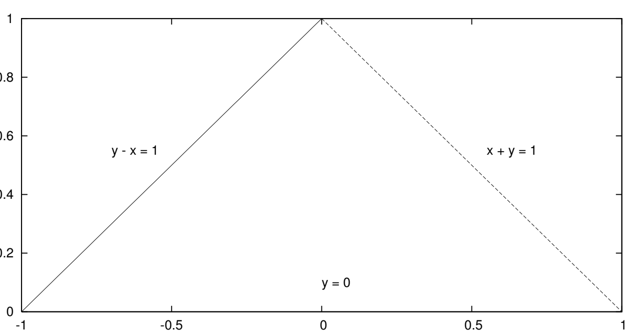
$$\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\int_{x^2}^x y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^x = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{24}\,.$$

Příklad 3.2. *Vypočtěte integrál* $\int_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y = 0$*,* $x + y = 1$ *a* $y - x = 1$*.*

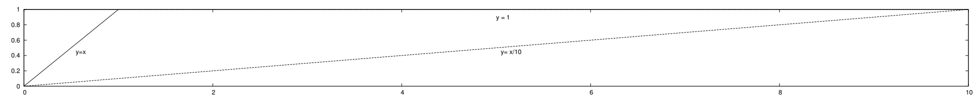
Řešení: Meze jsou například $0 < y < 1$, $y - 1 < x < 1 - y$. Nyní můžeme



Obrázek 1: Obrázek k příkladu 3.1



Obrázek 2: Obrázek k příkladu 3.2



Obrázek 3: Obrázek k příkladu 3.3

vypočítat integrál

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{y-1}^{1-y} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^3}{3} + y^2(1-y) - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1) \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - 2y + 4y^2 - \frac{8}{3}y^3 \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\,.$$

Příklad 3.3. *Vypočtěte integrál* $\int_M \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána vztahy* $0 < y < 1$, $y < x < 10y$.

Řešení: Meze integrálu máme rovnou zadané, můžeme proto přikročit k jeho výpočtu.

$$\int_0^1 \left(\int_y^{10y} \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \left| t = \sqrt{xy-y^2}\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{2t\mathrm{d}t}{y} \right| =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{3y} \frac{2t^2}{y}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{y} \frac{(3y)^3}{3}\,\mathrm{d}y = 18 \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = 18 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 6$$

Příklad 3.4. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y^2 = x$, $x = 0$ *a* $y = 1$.

Řešení: Meze jsou $0 < y < 1$, $0 < x < y^2$.

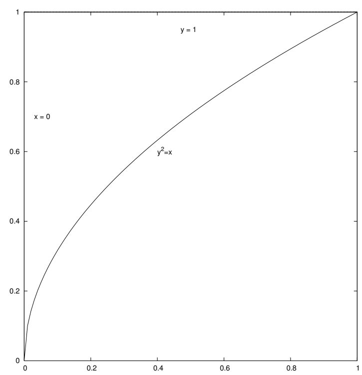
$$\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 y(\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}y = 1 - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\,,$$

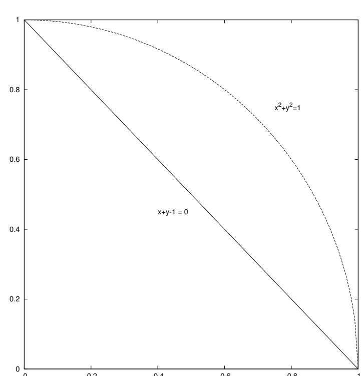
neboť

$$\int_0^1 y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = |u = y\,, \quad v = \mathrm{e}^y| = [y\mathrm{e}^y]_0^1 - [\mathrm{e}^y]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1\,.$$

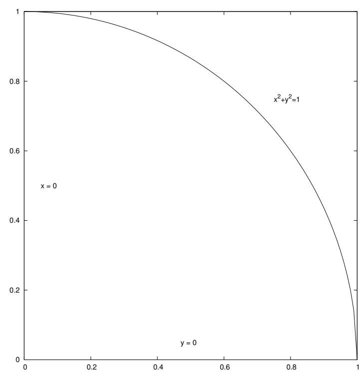
Příklad 3.5. *Vypočtěte integrál* $\int_M 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2 + y^2 = 1$ *a* $x + y - 1 = 0$.



Obrázek 4: Obrázek k příkladu 3.4



Obrázek 5: Obrázek k příkladu 3.5



Obrázek 6: Obrázek k příkladu 3.6

Řešení: Meze jsou $0 < x < 1$, $1 - x < y < \sqrt{1 - x^2}$.

$$\int_M 2y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 2y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y^2 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 [1 - x^2 - (1-x)^2] \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 (x - x^2) \mathrm{d}x = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \,.$$

Příklad 3.6. *Vypočtěte integrál* $\int_M x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je jednotkový čtvrtkruh v prvním kvadrantu.*

Řešení: Meze jsou $0 < x < 1$, $0 < y < \sqrt{1 - x^2}$.

$$\int_M x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x =$$

$$= \left| t = 1 - x^2 \,, \quad \mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x \right| = \int_1^0 \left(-\frac{1}{2} \right) t^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \,.$$

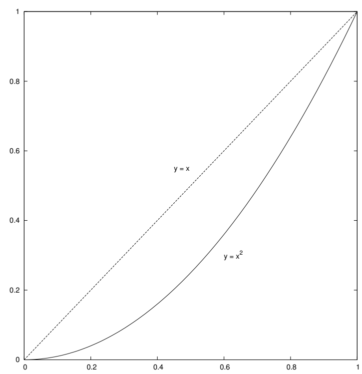
Příklad 3.7. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^x y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y = 4$ *a* $x = 1$.

Řešení: Meze jsou $0 < x < 1$, $0 < y < 4$.

$$\int_M \mathrm{e}^x y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\int_0^1 \mathrm{e}^x y \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^4 y [\mathrm{e}^y]_0^1 \, \mathrm{d}y = (\mathrm{e} - 1) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8(\mathrm{e} - 1) \,.$$

Příklad 3.8. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y = x$ *a* $y = x^2$.

Řešení: Meze jsou $0 < x < 1$, $x^2 < y < x$.



Obrázek 7: Obrázek k příkladu 3.8

$$\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^x \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{40}\,.$$

Příklad 3.9. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $y^2 = 2px$ *a* $x = \frac{p}{2}$, $p > 0$.

Řešení: Meze jsou $0 < x < \frac{p}{2}$, $-\sqrt{2px} < y < \sqrt{2px}$.

$$\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{p}{2}} x\frac{(2px)^{\frac{3}{2}} + (2px)^{\frac{3}{2}}}{3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}p^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}p^{\frac{3}{2}}}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\frac{2}{7} = \frac{p^5}{21}\,.$$

Příklad 3.10. *Vypočtěte integrál* $\int_M x^2y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* $M = [0,1]\times[0,2]$.

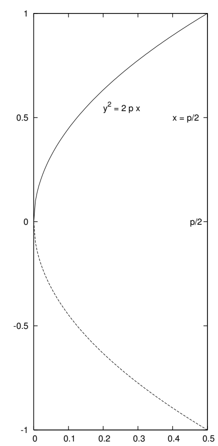
Řešení: Meze máme dány.

$$\int_M x^2y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\left(\int_0^2 \frac{y}{x}\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x\left(-\int_0^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y + [y\mathrm{e}^{xy}]_0^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(2\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{x}[\mathrm{e}^{xy}]_0^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 (2x\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} + 1)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x + \frac{2x-1}{2}[\mathrm{e}^{2x}]_0^1 + [x]_0^1 = [(x-1)\mathrm{e}^{2x} + x]_0^1 = 2\,.$$

Příklad 3.11. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2 + y^2 - 1 \le 0$ *a* $x + y - 1 \ge 0$.



Obrázek 8: Obrázek k příkladu 3.9

Řešení: Můžeme opět využít obrázku 5. Meze jsou $0 \leq x \leq 1$, $1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$.

$$\int_M xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{3} \left[(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} - (1 - x)^3 \right] \mathrm{d}x = \frac{1}{20}$$

Příklad 3.12. *Vypočtěte integrál* $\int_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2 - y + 2 = 0$ *a* $x + y - 4 = 0$.

Řešení: Nejdříve si vypočítáme průsečíky paraboly a přímky.

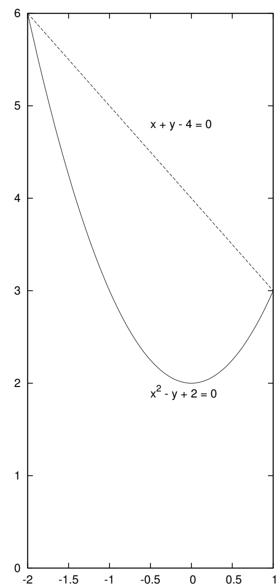
$$x^2 - (4 - x) + 2 = 0\,,$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0\,.$$

Průsečíky jsou tedy -2 a 1. Meze integrálu budou $-2 < x < 1$, $x^2+2 < y < 4-x$.

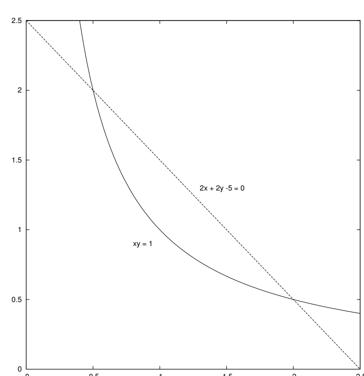
$$\int_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^1 \left(\int_{x+2}^{4-x} y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^1 \frac{(4 - x)^2 - (x^2 + 2)^2}{2} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (-x^4 - 3x^2 - 8x + 12) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[-\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x^2 + 12x \right]_{-2}^1 = \frac{162}{5}\,.$$

Příklad 3.13. *Vypočtěte integrál* $\int_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničena křivkami* $xy = 1$ *a* $2x + 2y - 5 = 0$.

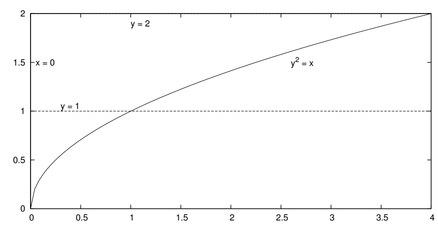
Řešení: Nejdříve určíme průsečíky hyperboly a přímky.



Obrázek 9: Obrázek k příkladu 3.12



Obrázek 10: Obrázek k příkladu 3.13



Obrázek 11: Obrázek k příkladu 3.14

$$2x^2 - 5x + 2 = 0\,,$$
$$(2x-1)(x-2) = 0\,.$$

Meze jsou $\frac{1}{2} < x < 2$, $\frac{1}{x} < y < \frac{5}{2} - x$.

$$\int_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}\left[x\left(\frac{5}{2}-x\right)^2 - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{25}{8}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{165}{128} - \ln 2\,.$$

Příklad 3.14. *Vypočtěte integrál* $\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x = 0$*,* $y = 1$*,* $y = 2$ *a* $y^2 = x$*.*

Řešení: Meze jsou $1 < y < 2$, $0 < x < y^2$.

$$\int_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2\left(\int_0^{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_1^2 y\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 y(\mathrm{e}^y - 1)\mathrm{d}y =$$
$$= [y\mathrm{e}^y]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y - \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \left[y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \frac{3}{2}\,.$$

4 Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Příklady z matematiky pro fyziky III., Matfyzpress, Praha, 2002, kapitola 2
2. `http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf`
3. `http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=350`