Výroková logika, množiny, kartézský součin, relace, zobrazení

1 Výroková logika

Definice 1. *Výrok* je tvrzení, u něhož má smysl se zabývat otázkou, je-li pravdivé.

Příklad 2. Určete, zda je daná věta výrokem:

a) „Rudolf II. vládl ve 13. století.“

b) „$1 < 10$“

c) „Přestaň!“

d) „Kdo vyhrál olympijské hry v ledním hokeji v roce 2014?“

e) „Ať se máme všichni dobře!“

Řešení: a), b) výroky jsou, c), d) a e) nejsou.

U výroku můžeme posuzovat jeho pravdivost nebo nepravdivost. Pokud není dosud zřejmé, zda je výrok pravdivý či nepravdivý, mluvíme o *hypotéze*. („Rakovina je virového původu.“) Pro operace s výroky používáme logické spojky:

$\neg$	není pravda, že (negace)
$\wedge$	a (konjunkce)
$\vee$	nebo (disjunkce)
$\Rightarrow$	jestliže, pak (implikace)
$\Leftrightarrow$	právě když (ekvivalence)

Nyní uvedeme pravdivostní tabulku základních složených výroků. Budeme uvažovat dva výroky p a q. Pokud je výrok pravdivý, přiřadíme mu jedničku, pokud je nepravdivý, nulu. Vlevo napíšeme všechny možné (čtyři) kombinace pravdivosti dvou výroků; do dalších sloupců pak píšeme pravdivost pro složené výroky.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Pro negace složených výroků platí.

$$\begin{aligned}\neg(p \wedge q) &= \neg p \vee \neg q\,,\\ \neg(p \vee q) &= \neg p \wedge \neg q\,,\\ \neg(p \Rightarrow q) &= p \wedge \neg q\,,\\ \neg(p \Leftrightarrow q) &= (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)\,.\end{aligned}$$

Pravdivosti složených výroků určujeme většinou pomocí následující tabulky.

Příklad 3. Určete pravdivostní hodnoty výroku $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$.

Řešení:

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Dále zavedeme následující *kvantifikátory*.

$\forall$	pro každé
$\exists$	existuje
$\exists!$	existuje právě jedno

Jejich negace je vyjádřena následovně.

$$\begin{aligned}\neg(\forall x : V(x)) &= \exists x : \neg V(x)\,,\\ \neg(\exists x : V(x)) &= \forall x : \neg V(x)\,,\\ \neg(\exists! x : V(x)) &= (\forall x : \neg V(x)) \vee (\exists \text{ alespoň dvě } x : V(x))\,,\end{aligned}$$

kde $V(x)$ je výrok.

Příklad 4. Negujte výrok $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 0$.

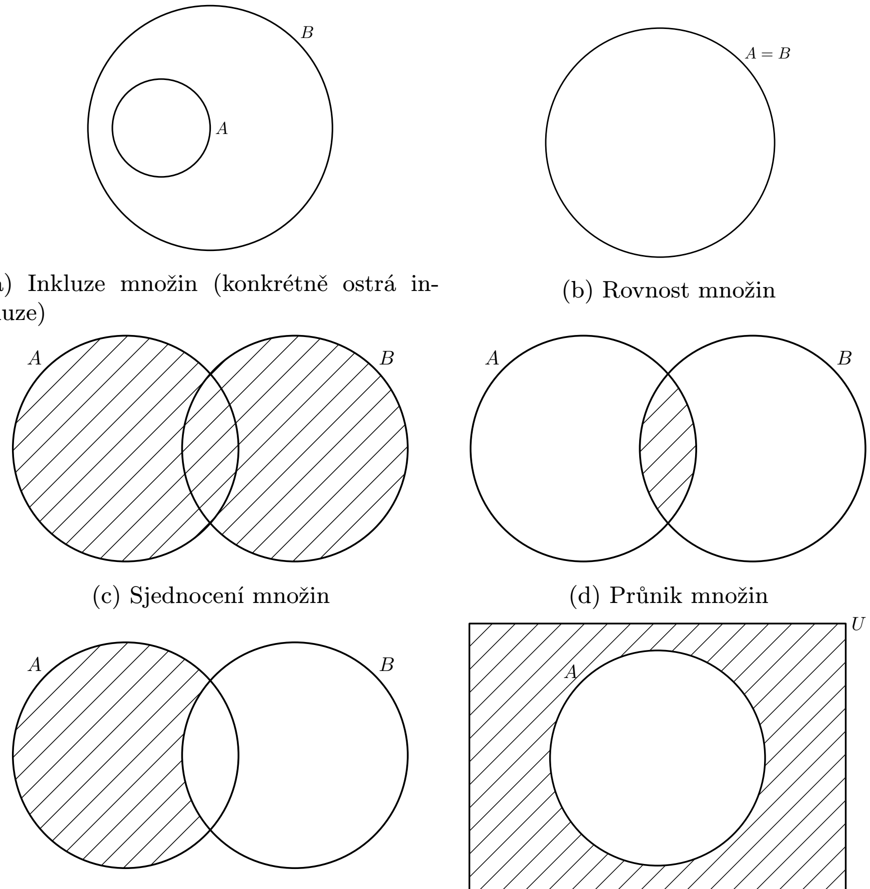
Řešení:

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 + x \leq 0\,.$$

2 Množiny

Definice 5. *Množina* je soubor libovolných navzájem různých objektů, jenž je chápán jako jeden celek. Každému z těchto objektů říkáme *prvek množiny*. Značíme $a \in A$ (a je prvkem množiny A), $a \notin A$ (a není prvkem množiny A). Prázdnou množinu značíme $\emptyset$.

Rozlišujeme následující typy vztahů mezi množinami. (Zde U je množina všech prvků.)



(a) Inkluze množin (konkrétně ostrá inkluze)

(b) Rovnost množin

(c) Sjednocení množin

(d) Průnik množin

(e) Rozdíl množin

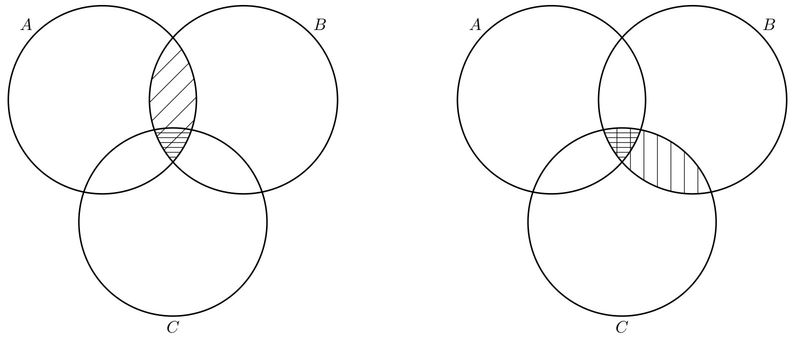
(f) Doplněk množin

Obrázek 1: Vénovy diagramy: definice množinových pojmů

	značení	zápis pomocí výroků
inkluze	$A \subset B$	$\forall x \in U : x \in A \Rightarrow x \in B$
rovnost množin	$A = B$	$\forall x \in U : x \in A \Leftrightarrow x \in B$
ostrá inkluze	$A \subsetneq B$	$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B$
sjednocení množin	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$
průnik množin	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$
rozdíl množin	$A \backslash B$, $A - B$	$A \backslash B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$
doplněk množiny	$A' = U \backslash A$	

Příklad 6. Pomocí Vénových diagramů dokažte $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Řešení: Viz obr. 2.



(a) Šikmé šrafování: $A \cap B$,
vodorovné šrafování: $(A \cap B) \cap C$.

(b) Svislé šrafování: $B \cap C$,
vodorovné šrafování: $A \cap (B \cap C)$.

Obrázek 2: Vénovy diagramy k příkladu 6.

3 Kartézský součin

Definice 7. Nechť jsou dány množiny A a B. Kartézský součin těchto množin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic (x_1, x_2) prvků $x_1 \in A$, $x_2 \in B$. Kartézským součinem množin M_1, M_2, $\dots M_n$ rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2, \dots$, $x_n \in M_n$, a značíme ji $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$. Počet prvků kartézského součinu množin A a B je dán vztahem $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Obdobně $|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|$.

Příklad 8. Najděte kartézský součin množin $A = (a, b, c)$ a $B = (b, c, d)$.

Řešení:

$$A \times B = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d)\}\,.$$

4 Zobrazení

Definice 9. Přiřadíme-li každému prvku $x \in A$ právě jeden prvek $y \in B$, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x, y) \in A \times B$, která se nazývá *zobrazení* množiny A do množiny B. Prvek x je *vzor* prvku y a prvek y je *obraz* prvku x. Množina A je *definiční obor* zobrazení F a značí se $D(F)$. Množina všech obrazů F se nazývá obor hodnot zobrazení F, značí se $H(F)$ a platí $H(F) \subset B$. Speciálně mluvíme o

a) Pokud $A = B$, je F zobrazením A *do sebe*.

b) Pokud $B = H(F)$, mluvíme o zobrazení množiny A *na* množinu B.

c) Jestliže v zobrazení F je každý prvek $y \in H(F)$ obrazem právě jednoho prvku $x \in A = D(F)$, pak je F *prosté zobrazení.* Pak existuje inverzní zobrazení F^{-1} s $D(F^{-1}) = H(F)$, $H(F^{-1}) = D(F)$, $x = F^{-1}y$.

Dále můžeme definovat *skládání zobrazení*. Nechť jsou dána zobrazení $G : A \to B$, $F : B_1 \to C$, $H(G) \subset B_1$. Pak můžeme každému prvku $x \in A$ přiřadit prvek $y \in C$ předpisem $y = F(G(x))$. Složené zobrazení značíme $F \circ G$.

Použitá a doporučená literatura

1. Kopáček Jiří, Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress, 2002, kap. 1

2. Luboš Moravec, Webová aplikace pro výuku matematické logiky na střední škole, diplomová práce, dostupné z www:
   `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/`.