Lineární diferenciální rovnice řádu n

Definice 1 *Nechť $n \in \mathbb{N}$, pak diferenciální rovnici*

$$a_n(x)\,y^n + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x)\,, \tag{1}$$

kde

$$a_i(x)\,,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

a $f(x)$ jsou funkce definované na jistém intervalu I, $a_n(x) \neq 0$ na I, nazýváme ***lineární diferenciální rovnicí řádu*** *n. Je-li $f(x) \equiv 0$, pak se rovnice* **??** *nazývá* ***homogenní****, v opačném případě se nazývá* ***nehomogenní****.*

Věta 2 ***(O existenci a jednoznačnosti).*** *Nechť funkce $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, a $f(x)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť $x_0 \in I$ a $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno řešení $y(x)$ rovnice* **??** *def. na celém intervalu I, které splňuje Cauchyovy počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.*

Dále rozebereme homogenní lineární diferenciální rovnici řádu n:

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0, \tag{2}$$

kde budeme předpokládat spojitost funkcí $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ na intervalu I.

Věta 3. Rovnice (2) má vždy triviální řešení $y \equiv 0$.

Věta 4. Nechť $y_1(x)$, $y_2(x)$ jsou řešení rovnice (2) a $c \in \mathbb{R}$. Pak též funkce $y_1(x) + y_2(x)$, $cy_1(x)$ jsou řešeními rovnice (2). Tedy všechna řešení rovnice (2) tvoří vektorový prostor. Dimenze tohoto prostoru je rovna n.

Definice 5. Tvoří-li funkce $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ bázi vektorového prostoru všech řešení rovnice (2) na intervalu I, pak nazýváme tuto množinu funkcí **fundamentálním systémem rovnice (2).**

Věta 6. (o obecném řešení homogenní lineární diferencovatelné rovnice řádu n).

Nechť $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ tvoří fundamentální systém rovnice (2), pak lze každé řešení $y(x)$ rovnice (2) na intervalu I vyjádřit ve tvaru:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)\,, \tag{3}$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou jistá reálná čísla.

Definice 3 *Mějme dány funkce $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, které jsou řešeními rovnice (2). Pak lze definovat $\forall x \in I$:*

Definice 4

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x)\,,\ y_2(x)\,, \ldots, y_n(x) \\ y_1'(x),\ y_2'(x), \ldots, y_n'(x) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ ------------- \\ y_1^{(n-1)}(x)\,,\ y_2^{(n-1)}(x)\,, \ldots, y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Determinant (4) nazýváme ***Wronského determinantem*** *nebo krátce* ***wronskiánem.***

Věta 5 ***(O nezávislosti)****. Množina celkem n řešení* $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,y_n(x)$ *rovnice (2) (na* I*) je lineárně nezávislá (a tvoří tedy fundamentální systém rovnice (2)), právě když je* $w(x)\neq 0$ *na* I*.*

Věta 6 *(O sestavení rovnice (2)) z fundamentálního systému). Nechť funkce* $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ *mají derivaci řádu n na intervali I a nechť je jejich wronskián různý od nuly na intervalu I. Pak dovnice*

$$\det\begin{pmatrix} y_1(x),\ y_2(x),\ldots y_n(x),\ y(x) \\ y'_1(x)\ \ y'_2(x),\ldots,y'_n(x),y'(x) \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x),\ldots,y_n^{(n)}(x),\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}=0 \tag{5}$$

je homogenní lineární diferenciální rovnice řádu n a její fundamentální systém tvoří funkce $y_1(x),\ y_2(x),\ldots y_n(x)$*.*

Snížení řádu homogenní rovnice:

Předpokládejme, že známe jedno řešení $y_1(x)$ rovnice (2) a nechť $y_1(x)\neq 0$ na nějakém intervalu $J\subset I$. Potom hledejme řešení rovnice (2) ve tvaru:

$$y(x)=y_1(x)\cdot z(x),$$

kde $z(x)$ je neznámá funkce, která má na I derivace až do řádu n. Dosaďme nyní $y(x)$ do rovnice (2). Dostáváme:

$$\begin{aligned} b_n(x)\,z^{(n)}+b_{n-1}(x)\,z^{(n-1)}+\ldots+b_1(x)\,z' &\quad + \\ +\Big(a_n(x)\,y_1^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y_1^{(n-1)}+\ldots+a_0^{(x)}y_1\Big)\,z &\quad = \quad 0, \end{aligned}$$

kde $b_i(x)$, $i=1,\ldots,n$ jsou funkce vyjádřené pomocí funkcí $y_1(x),\ a_1(x),\ldots,a_n(x)$. Neboť výraz v závorce je roven nule, dostáváme pro neznámou funkci z rovnici:

$$b_n(x)\,z^{(n)}+\ldots+b_1(x)\,z'=0.$$

Nyní provedeme substituci: $z'(x)=u(x)$ a dostaneme rovnici ve tvaru:

$$b_n(x)\,u^{n-1}+\ldots+b_1(x)\,u=0$$

což je homogenní lineární dif. rovnice řádu $(n-1)$. Máme-li např. řešit rovnici 2. řádu:

$$a_2(x)\,y'+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=0 \tag{6}$$

a známe-li jedno nenulové řešení $y_1(x)$ této rovnice, pak lze nalézt další řešení $y_2(x)$ této rovnice tak, že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ budou tvořit fundamentální systém rovnice (6) pomocí tzv. Ostrogradského-Lionvilleova vzorce:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{7}$$

kde

$$p(x) = (a_1(x)/a_2(x)) \text{ a } C \in \mathbb{R}.$$

Skutečně, je-li $y_1(x)$ známé řešení rovnice (6), které není nulové na jistém intervalu $J \subset I$. Hledejme další řešení $y_2(x)$ rovnice (6) ve tvaru:

$$y_2 = y_1 z,$$

kde z je neznámá funkce. Pak

$$\begin{aligned} y_2' &= y_1'z + y_1 z', \; y_2'' = y_1''z + y_1'z' + y_1'z' + y_1 z'' = \\ &= y_1'' + 2y_1'z' + y_1 z''. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (6) dostaneme:

$$a_2(x)(y_1''z + 2y_1'z' + y_1 z'') + a_1(x)(y_1'z + y_1 z') + a_0(x) y_1 z = 0.$$

Po úpravě máme:

$$a_2(x) y_1 z'' + (2a_2(x) y_1' + a_1(x) y_1) z' + (a_2(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1) z = 0.$$

Jelikož je funkce $y_1(x)$ řešením rovnice (6), přejde předchozí rovnice do tvaru:

$$a_2(x) y_1 z'' + (2a_2(x) y_1' + a_1(x) y_1) z' = 0.$$

Protože předpokládáme, že neplatí $a_2(x) \equiv 0$ na I a neplatí $y_1(x) \equiv$ na $J \subset I$, pak na J bude mít předchozí rovnice po vydělení výrazem $a_2(x) y_1$ tvar:

$$z'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \right) z' = 0.$$

Pokud položíme $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$, lze předchozí rovnici rozřešit vzhledem k z' jako lineární rovnici 1. řádu:

$$z' = c_2 e^{-\int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right) dx} = \frac{c_2}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$

$$z' = \frac{c_2}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}, \; x \in J. \tag{8}$$

Z (8) dostáváme po integraci:

$$z = c_2 \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} \right) dx + c_1. \tag{9}$$

Dále
$$z' = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2}.$$
Dosaďme nyní z' do (8):

$$\begin{aligned} \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} &= \frac{c_2}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} \implies \\ \implies & \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_2' y_1 - y_2 y_1' = c_2 e^{-\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

Takto jsme odvodili vzorec (7).

Položíme-li v předpisu (9) $c_1 = 0$ a $c_2 = 1$, dostáváme

$$y_2(x) = y_1(x) \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}\right) dx. \tag{10}$$

Je zřejmé, že funkce $y_2(x)$ řeší na I rovnici (6). Ověřme ještě, že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ tvoří fundamentální systém, rovnice (6). Za tím účelem spočtěme wronskián:

$$\begin{aligned} w(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x) \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}\right) dx \\ y_1'(x) & y_1' \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}\right) dx + y_1(x) \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} \end{vmatrix} \\ &= y_1(x) \frac{1}{y_1(x)} e^{-\int p(x)dx} + y_1(x) y_1'(x) \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}\right) dx - \\ &- y_1(x) y_1'(x) \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}\right) dx = e^{-\int p(x)dx} > 0. \end{aligned}$$

Tedy podle věty (5) pak funkce $y_1(x)$ a $y_1(x)$ tvoří fundamentální systém rovnice (6).

Remark 7 *Neexistuje žádná obecná metoda nalezení řešení rovnice (2), ani pro rovnici 2. řádu. V některých případech lze řešení nalízt, pokud existuje řešení ve tvaru polynomu $y(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ nebo ve tvaru exponenciální funkce $y = e^{ax}$.*

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice řádu n

V dalším budeme hledat řešení tzv. nehomogenní lineární rovnice řádu n.

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) = 0$$

$(pNLn)$ se bude nazývat **příslušná homogenní rovnice k rovnici** (NLn).

Označíme-li $L(y) := a_n(x) y^{(n)} + \ldots + a_0(x) y$, levou stranu rovnice (NLn) takto je tímto předpisem definováno zobrazení z vektorového prostoru funkcí majících derivace až do řádu n na I s hodnotami ve vektorovém prostoru funkcí definovaných na intervalu I.

Snadno se ověří, že L je lineárním zobrazením, tj., že platí:

$$\left.\begin{array}{c}\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall y_1,y_2:\\ L\left(\alpha y_1+\beta y_2\right)=\alpha L\left(y_1\right)+\beta L y_2.\end{array}\right\} \tag{11}$$

Zobrazení L bývá někdy nazýváno **lineárním diferenciálním operátorem řádu n.**

Pak rovnice (NLn) a $(pNLn)$ psát stručněji:

$$L\left(y\right)=f \tag{12}$$

$$L\left(y\right)=0. \tag{13}$$

Věta 8 ***(Vlastnosti rovnice (12))****.*
1) Nechť $u\left(x\right)$ je řešení rovnice (12) a $v\left(x\right)$ je řešení rovnice (13). Pak je funkce $u\left(x\right)+v\left(x\right)$ řešením rovnice (12).
2) Nechť $u\left(x\right)$ a $v\left(x\right)$ jsou dvě řešení rovnice (12). Pak je funkce $u\left(x\right)-v\left(x\right)$ řešením rovnice (13).
3) Nechť $u\left(x\right)$ je řešením rovnice $L\left(y\right)=f_1$ a $v\left(x\right)$ je řešením rovnice $L\left(y\right)=f_2$, pak je funkce $u\left(x\right)-v\left(x\right)$ řešením rovnice $L\left(y\right)=f_1+f_2$.

Důkaz. Důkaz je snadným důsledkem linearityy zobrazení L (viz. vztah (11)).□
■

Corollary 9 *Nechť funkce $y_1,\ldots,y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (13) a y_p je nějaké řešení rovnice (12), pak obecné řešení rovnice (12) je tvaru:*

$$y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n+y_p, \tag{14}$$

kde $c_1,\ldots,c_n$ jsou libovolná reálná čísla.

Důkaz. Budiž $y\left(x\right)$ libovolně zvolené řešení rovnice (12). Pak v důsledku věty (9) (2) je funkce $y\left(x\right)-y_p\left(x\right)$ řešením rovnice (13). Podle věty (6) pak existují čísla $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ tak, že

$$y\left(x\right)-y_p\left(x\right)=c_1y_1\left(x\right)+\ldots+c_ny_n\left(x\right).$$

Odtud již dostáváme vyjádření řešení $y\left(x\right)$ ve tvaru:

$$y\left(x\right)=c_1y_1\left(x\right)+\ldots+c_ny_n\left(x\right)+y_p\left(x\right).$$

□ ■

V následující větě je popsána metoda pro nalezení tzv. partikulárního řešení rovnice (12) pokud již známe obecné řešení homogenní rovnice (13) neboli její fundamentální systém. Tuto metodu nazýváme **Lagrangeovou metodou variace konstatnt**. Její princip jsme již poznali, když jsme řešili lineární rovnice 1. řádu.

Věta 10 *Nechť* $y_1, \dots y_n$ *tvoří fundamentální systém rovnice (13). Dále nechť derivace funkcí* $c_1(x), \dots, c_n(x)$ *jsou řešením soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} c_1'(x)\, y_1(x) + \ldots + c_n'(x)\, y_n(x) &= 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + \ldots + c_n'(x)\, y_n'(x) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad & \\ c_1'(x)\, y_1^{n-1}(x) + \ldots + c_n'(x)\, y_n^{n-1}(x) &= \frac{f(x)}{a_n(x)}, \end{aligned} \tag{15}$$

na intervalu I. *Pak funkce:*

$$y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n(x) \tag{16}$$

je řešením rovnice (12) na intervalu I.

Důkaz. Předpokládejme, že existují funkce $c_1(x), \dots, c_n(x)$ takové, že splňují soustavu rovnic (15). Nyní postupně vypočítáme derivaci $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ funkce $y(x)$ dané vztahem (16):

$$\begin{aligned} y'(x) &= \underbrace{\left(c_1'(x)\, y_1(x) + \ldots, + c_n'(x)\, y_n(x)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \left(c_1(x)\, y_1'(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n'(x)\right) \\ &= c_1(x) \cdot y_1'(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n'(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \underbrace{\left(c_1'(x)\, y_1'(x) + \ldots + c_n'(x)\, y_n'(x)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \Big(c_1(x)\, y_1''(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n''(x)\Big) \\ &= c_1(x)\, y_1''(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n''(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{n-1}(x) &= \underbrace{\Big(c_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x)\Big)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \Big(c_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n^{(n-1)}(x)\Big) = \\ &= c_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n^{(n-1)}(x); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \underbrace{\left(c_1'(x)\, y_1^{n-1}(x) + \ldots + c_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ f(x)/a_n(x)}} + \left(c_1(x)\, y_1^{(n)}(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n^{(n)}(x)\right) = \\
&= \frac{f(x)}{a_n(x)} + c_1(x)\, y_1^{(n)}(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n^{(n)}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Nyní dosadíme za $y(x)$, $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ do rovnice (12):

$$
\begin{aligned}
& a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = \\
= \;& a_n(x) \left(\frac{f(x)}{a_n(x)} + c_1(x)\, y_1^{(n)}(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n^{(n)}(x)\right) + \\
& + a_{n-1}(x) \left(c_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n^{(n-1)}(x)\right) + \ldots \\
& + \ldots + \\
& + a_1(x) \left(c_1(x)\, y_1'(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n'(x)\right) + \\
& + a_0(x) \left(c_1(x)\, y_1(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n(x)\right) \\
= \;& f(x) + c_1(x) \underbrace{\left(a_n(x)\, y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y_1'(x) + a_0(x)\, y_1(x)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \\
& + \ldots + \\
& \ldots + c_n(x) \left(a_n(x)\, y_n^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y_n^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)\, y_n(x)\right) \\
= \;& f(x)\,.
\end{aligned}
$$

□ ■

Věta 11 *Ke každému fundamentálnímu systému rovnice (13) a každé funkci $f(x)$ spojité na intervalu I existuje aspoň jedno řešení $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ soustavy (15) definované na intervalu I.*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že $\forall x \in I$ je determinant soustavy (15) wronskiánem funkcí $y_1, \ldots, y_n$ a ten je $\forall x \in I$ různý od nuly díky lineární nezávislosti fundamentálního systému $y_1, \ldots, y_n$ rovnice (13).□ ■

Lineární diferenciální rovnice řádu n s konstantními koeficienty

Definice 12 *Nechť $n \in \mathbb{N}$, pak diferenciální rovnici*

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)\,, \tag{17}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, $a_n \neq 0$, a $f(x)$ funkce definovaná na intervalu I, nazýváme ***lineární diferenciální rovnicí řádu n s konstantními koeficienty.***

Remark 13 *Budeme i nadále předpokládat, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I a neboť konstantní funkce jsou též spojitými funkcemi na I, platí i v tomto případě věta 2 o existenci a jednoznačností.*

Definice 14 *Nechť $n \in \mathbb{N}$, pak diferenciální rovnici*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{18}$$

*kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, $a_n \neq 0$, nazýváme **homogenní lineární diferenciální rovnicí řádu** n **s konstantními koeficienty.***
Označíme-li opět $L(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$, pak lze psát rovnice (17) a (18) ve stručnějším tvaru:

$$L(y) = f, \tag{19}$$

$$L(y) = 0. \tag{20}$$

Remark 15 *Pochopitelně, že pro tyto rovnice platí všechny dosud citované věty. Navíc lze v tomto speciálním případě relativně snadno nalézt fundamentální systém rovnice (18).*

Věta 16 *Nechť u, v jsou funkce, které mají derivace až do řádu n na intervalu I a nechť c, λ jsou konstanty. Pak platí:*
1) $L(cu) = cL(u)$
2) $L(u+v) = L(u) + L(v)$
3) $L\big(e^{\lambda x}\big) = e^{\lambda x}\left(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right)$.

Důkaz. První dvě vlastnosti již byly probrány dříve. Vlastnost 3) se snadno dokáže, neboť $\left(e^{\lambda x}\right)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$.□ ■

Corollary 17 *a) Je-li $u + iv$ komplexní funkce, která řeší homogenní rovnici (18), pak též reálná část u a imaginární část v jsou řešeními rovnice (18). b) Funkce $y = e^{\lambda x}$ řeší rovnici (18) právě když číslo λ je kořenem tzv. **charakteristické rovnice** diferenciální rovnice (18):*

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{21}$$

Remark 18 *Je možné, že komplexní funkce $y(x) = u(x) + iv(x)\,,\ x \leftarrow I$ řeší rovnici (18). Je zřejmé, že věta 16 platí i pro komplexní řešení rovnice (18) a pro $c, \lambda \in \mathbb{R}$.*

Nicméně naším cílem bude (a to je vždy možné) vyjádřit obecné řešení rovnic (17) resp. (18) pomocí pouze reálných funkcí.

Corollary 19 *Důsledku 17. a) Z předpokladů a díky větě 16 1), 2) máme:*

$$0 = L(u + iv) = L(u) + iL(v) \implies L(u) = 0 \wedge L(v) = 0.$$

b) Vlastnost je očividným důsledkem tvrzení 3) věty 16.□

Remark 20 *V dalším bude použita tzv.* ***Eulerova rovnost:***

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Vztah (22) symbolizuje tzv. exponenciální tvar komplexního čísla $z = \cos x + i \sin x$. *Ze vztahu (22) pak snadno plynou následující vztahy (tzv. Eulerovy vzorce):*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \ x \in \mathbb{R} \tag{23}$$

Nalezení fundamentálního systému homogenní rovnice

Věta 21 ***(Fundamentální věta algebry).***
Každý polynom stupně n s komplexními koeficienty má celkem n kořenů včetně násobnosti.

Nyní rozebereme různé případy, které mohou nastat při řešení charakteristické rovnice (21).

1) Rovnice (21) má n různých kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pak funkce $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n^{\lambda_n x}$ tvoří (reálný) fundamentální systém homogenní rovnice (18). Ověřme nyní lineární nezavislost techto funkcí.

$$\begin{aligned} w(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \ldots . y_n \\ y_1' & y_2' \ldots . y_n' \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \ldots . y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \ldots . e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \ldots . \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} \ldots . \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \ldots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots . 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \ldots . \lambda_n \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} \ldots . \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= \underbrace{e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) x}}_{>0} \cdot \underbrace{\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} \neq 0. \end{aligned}$$

Poslední determinant se nazývá Vanderneondův determinant. Naznačíme způsob výpočtu tzv. Vandermondova determinantu. Pro každé $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$ položme:

$$V_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots . 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \ldots . \lambda_n \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} \ldots . \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

V prvním kroku odečteme o n-tého řádku $(n-1)$-ní řádek vynásobený λ_1, od $(n-1)$-ho řádku odečteme řádek $(n-2)$-hý vynásobený λ_1, atd. až od 2. řádku odečteme 1. řádek vynásobený λ_1. Tím dostaneme determinant do tvaru:

$$
\begin{aligned}
V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) &= \qquad\qquad (24)\\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2\lambda_1 & \dots & \lambda_n-\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \dots & \lambda_n(\lambda_n-\lambda_1) \\ .. & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & \lambda_2^{(n-2)}(\lambda_2-\lambda_1) & \dots & \lambda_n^{(n-2)}(\lambda_n-\lambda_1) \end{vmatrix} \overset{*}{=} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \dots & \lambda_n-\lambda_1 \\ \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \dots & \lambda_n(\lambda_n-\lambda_1) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \lambda_2^{n-2}(\lambda_2-\lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n.-2}(\lambda_n-\lambda_1) \end{vmatrix} \overset{**}{=} \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \qquad (25)\\
&= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1)\, V_{n-1}(\lambda_2,\dots,\lambda_n)\,. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Při úpravě (*) jsme uvedený determinant rozvedli podle 1. sloupce a při úpravě (**) jsme postupně z 1. sloupce vytkli činitel $(\lambda_2-\lambda_1)$, z 2. sloupce činitel $(\lambda_3-\lambda_1)$ atd. až z posledního sloupce jsme vytkli činitel $(\lambda_n-\lambda_1)$. Takto dostáváme rekurentní vzorec:

$$
V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1)\cdot V_{n-1}(\lambda_2,\dots,\lambda_n)\,. \qquad (27)
$$

Jelikož je $V_2(\lambda_{n-1},\lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_n - \lambda_{n-1}$, dostaneme sestupnou indukcí s využitím vzorce (27):

$$
\begin{aligned}
V_n(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n) &= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1)\,. \\
&\qquad (\lambda_3-\lambda_2)\dots(\lambda_n-\lambda_2)\,. \\
&\qquad \dots\dots\dots \\
&\qquad (\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})\cdot(\lambda_n-\lambda_{n-2})\,. \\
&\qquad\qquad (\lambda_n-\lambda_{n-1}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{i=k\neq 1}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)\right) = \prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)\,.
\end{aligned}
$$

□

2) Má-li rovnice (21) aspoň jeden kořen vícenásobný, např. je-li λ m-násobným kořenem, $m>1$, pak jsou funkce $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda x}, \dots, y_m = x^{m-1}e^{\lambda x}$ řešeními homogenní rovnice (18).

Obecněji, má-li charakteristická rovnice (21) celkem $k \leq n$ navzájem různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, jejichž násobnosti jsou po řadě $m_1, m_2, \ldots, m_k$, kde $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, pak n následujících funkcí tvoří fundamentální systém rovnice (18):

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\ & e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k - 1} e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \tag{28}$$

Remark 22 *Jelikož mohou být některé kořeny λ_i nereálné a nám jde o to, nalézt fundamentální systém rovnice (18) obsahující pouze reálná řešení, nahradíme nereálná řešení z fundamentálního systému (28). Například, má-li charakteristická rovnice (21) nereálný kořen $\lambda = \alpha + i\beta$, má i komplexní sdružený kořen $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Těmto dvěma kořenům odpovídají tato řešení:*