Obyčejné diferenciální rovnice

Budeme studovat rovnice ve tvaru:

$$y' = F(x, y).$$

1 Označení derivace

$\frac{dy}{dx}$......G. Leibniz
y'.........I. Newton
Dy.......moderní označení

Derivujeme **závislou** proměnnou y podle **nezávislé** proměnné x. Je-li $x = x(t)$ funkcí času, používáme též $\dot{x}$.

Pro druhé derivace máme označení:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = D^2y,$$

je-li $x = x(t)$, pak píšeme též $\ddot{x}$. Pro n-tou derivaci máme označení:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = D^ny.$$

2 Diferenciální rovnice

(i) Definice diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je rovnice vyjadřující vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi. Například, je-li $x = x(t)$, pak funkce x může vyhovovat rovnici:

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 7x = 0 \tag{1}$$

nebo třeba rovnici

$$\sqrt{x \cdot x^{(5)}} + \cos(t)\, e^{tx} + (x''x'x)^6 = \sin(5t). \tag{2}$$

Je-li neznámá funkce v rovnici funkcí jediné proměnné, pak mluvíme o tzv. **obyčejné diferenciální rovnici**, ve zkratce ODR. Řádem diferenciální rovnice se rozumí řád nejvyšší derivace vyskytující se v dané rovnici. Rovnice (1) je tedy rovnicí 2. řádu a rovnice (2) je rovnicí 5. řádu.

Přesněji budeme definovat diferenciální rovnici následovně.

Definice 1 ***Diferenciální rovnicí*** *rozumíme rovnici tvaru*

$$F\left(x, y, y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \tag{3}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

(ii) <u>Řešení diferenciální rovnice</u>

Definice 2 ***Řešením diferenciální rovnice (3)*** *rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (3) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí*

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Je-li funkce y řešením rovnice (3) na intervalu I a funkce $\tilde{y}$ je řešením rovnice (3) na intervalu $\tilde{I}$ a pokud je $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení $\tilde{y}$ je ***prodloužením řešení*** *y na interval $\tilde{I}$. Řešení rovnice (3), které nemá prodloužení, nazýváme* ***maximálním řešením*** *rovnice (3).*

- řešit diferenciální rovnici znamená hledat funkci, která vyhovuje dané rovnici.
- Najít řešení diferenciální rovnice je obecně obtížné nebo nemožné.
- Je-li ovšem dána konkrétní funkce, pak je snadné ověřit jedná-li se o řešení dané rovnice.

Příklad 1. (Zkouška dosazením)
Ověřme, že funkce $y(t) = e^{3t}$ je řešením diferenciální rovnice

$$\dot{y} = 3y. \tag{4}$$

Řešení. Dosaďme tedy funkci $y = e^{3t}$ do rovnice (4) a ověřme, že se levá strana rovná pravé straně. Na levé straně máme:

$$\dot{y} = 3e^{3t}.$$

Na pravé straně pak je

$$3y = 3e^{3t}.$$

Tedy levá strana se rovná pravé straně.

Příklad 2. (Vyloučení řešení dosazením)
Ukažme, že funkce $y(t) = t^3$ není řešením diferenciální rovnice

$$\dot{y} = \frac{y}{t}. \tag{5}$$

Řešení. Dosazením vyjádření $y = t^3$ do rovnice (5) dostaneme na levé straně: $\dot{y} = 3t^2$. Na pravé straně pak dostaneme: $y/t = t^3/t = t^2$. Vidíme tedy, že levá strana je po dosazení různá od pravé strany.

To znamená, že funkce $y(t) = t^3$ není řešením rovnice (5).

(iii) Parametrizace množiny řešení diferenciální rovnice

Je obvyklé, že daná diferenciální rovnice má více než jedno řešení. Množinu těchto řešení lze zapsat s pomocí **parametru**.

Příklad 3. Najděme obecné řešení klasické diferenciální rovnice

$$\ddot{x} = t. \tag{6}$$

Řešení. Budeme-li dvakrát integrovat a zapíšeme-li příslušné integrační konstanty c_1, c_2, dostaneme:

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2.$$

Toto vyjádření je **parametrizací** množiny řešení rovnice (6). Konstanty c_1, c_2 jsou zde **parametry**. Pro každou volbu parametrů c_1, c_2 dostaneme různá řešení rovnice (6).

(iv) Počáteční Cauchyova úloha

Někdy jsou kromě samotné diferenciální rovnice zadány také tzv. **počáteční podmínky**. Počáteční podmínky společně s diferenciální rovnicí tvoří tzv. **počáteční Cauchyovu úlohu**.

Příklad 4. Řešme počáteční úlohu pro rovnici $\ddot{x} = t$ s počátečními podmínkami: $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 2$.

Řešení. V předchožím příkladu jsme našli **obecné řešení** této rovnive:

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2.$$

Nyní užijeme počáteční podmínky k určení hodnot parametrů c_1 a c_2.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{t^2}{2} + c_1 \Longrightarrow \dot{x}(1) = \frac{1}{2} + c_1 = 2. \\ x(t) &= \frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 \Longrightarrow x(1) = \frac{1}{6} + c_1 + c_2 = 1. \end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme neznámé c_1, c_2: $c_1 = 3/2$, $c_2 = -2/3$. Řešením naší počáteční úlohy je funkce

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}.$$

3. Nejdůležitější diferenciální rovnice

Velmi důležitou diferenciální rovnicí je rovnice

$$\dot{y} = ay. \tag{7}$$

Rovnice se dá zapsat různými způsoby:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay; \quad \frac{dy}{dt} = ay(t); \quad y' = ay \\ \dot{y} - ay &= 0. \end{aligned}$$

Obecným řešením je funkce

$$y(t) = Ce^{at},$$

kde C je konstanta.

Proveďme zkoušku dosazením. Levá strana je rovna:

$$\dot{y} = aCe^{at}$$

a pravá strana je rovna

$$ay = aCe^{at}.$$

Protože se levá strana rovnice rovná pravé straně, je funkce $y(t) = Ce^{at}$ skutečně řešením rovnice (7).

4. Jiné důležité příklady rovnic

Příklad 1. (Matematická analýza)

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Obecné řešení je dáno vztahem

$$y\left(x\right) = x^2 + C = \int 2x dx.$$

Příklad 2. (Rovnice tepelné difuze)

Těleso o teplotě T je umístěno do prostředí o teplotě T_E. Z Newtonova zákona pak derivace teploty splňuje rovnici

$$T' = -k\left(T - T_E\right),$$

kde $k > 0$ je konstanta. Poznamenejme, že znaménko minus má za následek, že teplota tělesa se blíží k teplotě okolního prostředí T_E.

Příklad 3. (Newtonův pohybový zákon)

Blízko zemského povrchu se řídí pád tělesa rovnicí

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

kde y je výška tělesa nad zemským povrchem a g je gravitační zrychlení, $g \approx 9,81\ m/s^2$.

Příklad 4. (Newtonův gravitační zákon)

Newtonův gravitační zákon říká, že zrychlení tělesa ve vzdálenosti r od zemského středu vlivem gravitace je dáno vztahem:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -GM_E/r^2,$$

kde M_E je hmotnost země a G je gravitační konstanta.

Příklad 5. (Jednoduchý harmonický oscilátor: Hookův zákon)

Předpokládejme, že těleso o hmotnosti m je upevněno k pružině a nechť x je rovno vychýlení pružiny z rovnovážné polohy. Pak z Hookova zákona a z Newtonova pohybového zákona pak plyne

$$m\ddot{x} = -kx \iff m\ddot{x} + kx = 0,$$

kde konstanta k je tuhost pružiny. Znaménko minus způsobí, že síla působí zpět k rovnovážné poloze.

Příklad 6. (Tlumený harmonický oscilátor)
Přidáme-li k předchozí rovnici ještě tzv. tlumící sílu úměrnou rychlosti $\dot{x}$ systému těleso-pružina v Příkladu 5, dostaneme

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \iff m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

kde $-b\dot{x}$ je **tlumící síla** a b je **konstanta tlumení**.

5. Separace proměnných

(i) Rovnice se separovatelnými proměnnými
Rovnice má separovatelné proměnné, pokud lze algebraickými úpravami rovnice separovat proměnné na různých stranách rovnice. Obecný tvar této rovnice je

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{8}$$

Příklad 1. Řešme rovnici $y' = x(y-1)$.
Řešení. Nejdříve přepíšeme rovnici do tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = x(y-1).$$

Nyní separujeme proměnné x a y:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y-1} &= xdx \\ &\downarrow \text{ integrace} \\ \int \frac{dy}{y-1} &= \int xdx \\ \ln|y-1| + c_2 &= \frac{x^2}{2} + c_1, \end{aligned}$$

kde c_1,c_2 jsou konstanty.

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + c_3 \text{...stačí jedna konstanta.}$$

Dále řešíme rovnici vzhledem k neznámé y:

$$|y-1| = e^{x^2/2+c_3} = e^{c_3}e^{x^2/2}.$$

Absolutní hodnotu lze odstranit, ale pak může být pravá strana jak kladná, tak záporná. Proto

$$y-1 = \pm e^{c_3}e^{x^2/2} \iff y = 1 \pm e^{c_3}.$$

Nakonec přeznačíme konstantu $\pm e^{c_3}$ jako C a řešení zapíšeme:

$$y\left(x\right) = 1 + Ce^{x^2/2}.$$

Příklad 2. (ztracené triviální řešení)
Najděme **všechna** řešení rovnice

$$y' = x\left(1-y\right)^2.$$

Řešení. Nejdříve si všimněme, že konstantní funkce $y\left(x\right) = 1$ řeší danou rovnici. Jak uvidíme, metoda separace proměnných toto řešení nenajde. Nyní řešme rovnici pomocí separace proměnných.

1. Separace proměnných:

$$\frac{dy}{\left(1-y\right)^2} = xdx$$

2. Integrování:

$$\int \frac{dy}{\left(1-y\right)^2} = \int xdx$$

3. Vyjádření proměnné y:

$$y = 1 - \frac{1}{\frac{x^2}{2}+C}.$$

Jak je vidět, tak konstantní funkce $y\left(x\right) = 1$ není zahrnuto mezi množinou parametrizovaných řešení.

Příklad 3. Najděte všechna ztracená triviální řešení rovnice

$$y' = \left(x+1\right)e^x\left(y^2-8y+7\right).$$

Řešení. Kořeny mnohočlenu $y^2 - 8y + 7$ jsou $y = 1$ a $y = 7$. Tudíž "ztracenými" triviálními řešeními jsou dvě konstantní funkce:

$$y(x) = 1, \; y(x) = 7.$$

Příklad 4. (řešení nejdůležitější rovnice)
Řešme rovnici

$$\dot{y} = ky.$$

Rovnici budeme řešit metodou separace proměnných:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= kdt \\ \ln|y| &= kt + c_1 \\ |y| &= e^{kt+c_1} = e^{c_1}e^{kt} \\ y &= \pm e^{c_1}e^{kt} \\ y &= Ce^{kt}. \end{aligned}$$

Všechna řešení jsou dána vztahem:

$$y(t) = Ce^{kt},$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Povšimněme si, že v předchozím vztahu bude zahrnuto i ztracené triviální řešení, pokud položíme $C = 0$. (Porovnejte s příkladem 2 !)

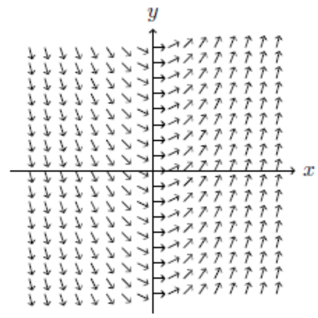
6. Geometrické metody

Pojmy: směrové pole, izoklíny, integrální křivky.

Grafická metoda nalezení řešení rovnice $y' = f(x, y)$ vychází z konstrukce tzv. **směrového pole**. Směrové pole znázorníme tak, že bodem (x, y) v rovině vedeme úsečku jejíž směrnice je rovna hodnotě $f(x, y)$.

Příklad 1. Znázorněme směrové pole rovnice

$$\frac{dy}{dx} = 2x = f(x, y).$$



Všimněme si, že směrnice tzv. **lineárních elementů** jsou nezávislé na vertikální transformaci.

V této souvislosti je výhodné mít k dispozici křivky nazvané **izoklíny**. Jsou to křivky dané rovnicí (s parametrem m):

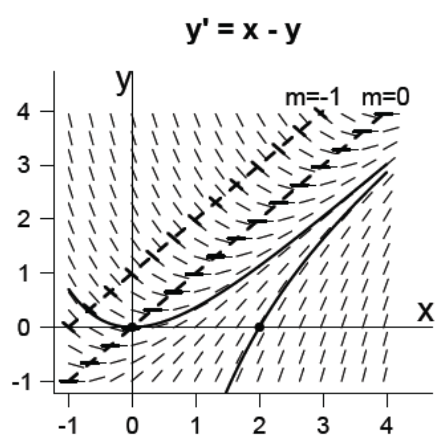
$$f(x, y) = m = \text{konstanta}.$$

V bodech ležících na izoklíně mají všechny lineární elementy stejnou směrnici rovnou konstantě m.

Příklad 2. Uvažujme rovnici $y' = x - y$. Potom jsou izoklíny dány rovnicí:

$$x - y = m.$$

Například izoklína spojuje body jejichž lineární elementy mají nulovou směrnici.



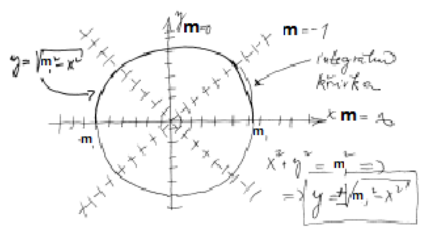
Máme-li nyní nakresleo směrové pole a izoklíny, potom kreslíme křivky zvané **integrální**, které jsou **tečné** v každém bodě k příslušnému lineárnímu elementu. Podstatou je fakt, že

integrální křivky jsou grafy funkcí, které jsou řešeními rovnice $y' = f(x, y)$.

Dvě integrální křivky rovnice $y' = x - y$ byly (plnou čarou) zakresleny v předchozím obrázku.

Příklad 3. Uvažujme rovnici $y' = -x/y$. Rovnice izoklíny má pak tvar

$$-\frac{x}{y} = m \implies y = -\frac{1}{m}x.$$



7. Lineární rovnice 1. řádu

(i)

Definice 3 *Je-li funkce $x = x(t)$ neznámá funkce, potom rovnice ve tvaru:*

$$A(t)\frac{dx}{dt} + B(t)\,x(t) = C(t) \tag{9}$$

*se nazývá **lineární diferenciální rovnicí 1. řádu**. Je-li $A(t) \neq 0$, pak budeme psát rovnici (9) ve standartní formě:*

$$\frac{dx}{dt} + p(t)\,x(t) = q(t). \tag{10}$$

(ii) Terminologie a označení. Funkce $A(t)$, $B(t)$ v rovnici (9) a funkce $p(t)$ v rovnici (10) budeme nazývat **koeficienty rovnice**. Dále, jsou-li funkce $A(t)$, $B(t)$ (resp. $p(t)$) konstantní (tj. nezávisí na proměnné t), pak říkáme, že máme **rovnici s konstantními koeficienty**.

(iii) Homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Je-li v rovnici (9) $C(t) = 0$ (resp. $q(t) = 0$ v rovnici (10), pak se tato rovnice nazývá **homogenní** a má tvar:

$$\begin{aligned} A(t)\frac{dx}{dt} + B(t)\,x(t) &= 0, \text{ resp.} \\ \frac{dx}{dt} + p(t)\,x(t) &= 0. \end{aligned}$$

(iv) Princip superpozice

Uvažujme dvě funkce $q_1(t)$, $q_2(t)$ a konstanty c_1, c_2. Pak funkci $c_1q_1(t) + c_2q_2(t)$ nazýváme **superpozicí** nebo **lineární kombinací funkcí** $q_1(t)$ **a** $q_2(t)$.

Věta 4 *(Princip superpozice) Předpokládejme, že funkce $y_1(t)$ je řešením rovnice $y' + p(t)\,y = q_1(t)$ a $y_2(t)$ je řešením rovnice $y' + p(t)\,y = q_2(t)$. Pak pro libovolné konstanty c_1, c_2 je superpozice $c_1y_1 + c_2y_2$ řešením rovnice*

$$y' + p(t)\,y = c_1q_1(t) + c_2q_2(t)\,.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} & (c_1y_1 + c_2y_2)' + p(t)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ = \; & c_1y_1' + c_2y_2' + c_1p(t)\,y_1 + c_2p(t)\,y_2 \\ = \; & c_1(y_1' + py_1) + c_2(y_2' + py_2) \\ = \; & c_1q_1 + c_2q_2. \end{aligned}$$

Příklad 4. Dosazením lze ověřit, že
(1) $\dot{x} + 2x = 1$ má řešení $x(t) = \frac{1}{2}$;
(2) $\dot{x} + 2x = e^{-2t}$ má řešení $x(t) = te^{-2t}$;
(3) $\dot{x} + 2x = 0$ má řešení $x(t) = e^{-2t}$.
Pomocí principu superpozice hledejme řešení složitějších rovnic:

a) $\dot{x}+2x=1+e^{-2t}$; b) $\dot{x}+2x=2+3e^{-2t}$; c) $\dot{x}+2x=1$ (najděmě více řešení); d) $\dot{x}+2x=1+e^{-2t}$ (najděme více řešení).

Řešení. a) Pravá strana rovnice je zřejmě superpozicí pravých stran rovnic (1) a (2). Tedy řešení bude mít tvar superpozice:

$$x(t)=\frac{1}{2}+te^{-2t}.$$

b) Pravá strana rovnice $2\cdot(1)+3\cdot\left(e^{-2t}\right)$ je superpozicí pravých stran rovnic (s koeficienty $c_1=2$, $c_2=3$).Tedy řešení má tvar superpozice (se stejnými koeficienty):

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(te^{-2t}\right)= \\ &= 1+3te^{-2t}. \end{aligned}$$

c) Napišme pravou stranu jako superpozici:

$$1=1+c\cdot 0.$$

Tedy pravá strana je superpozicí pravé strany rovnice (1) a příslušné homogenní rovnice (3). Pak funkce

$$x(t)=\frac{1}{2}+ce^{-2t}$$

je řešením dané rovnice, kde $c\in R$ je parametr.

d) Pravá strana je součtem pravé strany rovnice (a) a homogenní rovnice:

$$1+e^{-2t}=1\cdot\left(1+e^{-2t}\right)+c\cdot 0.$$

Odtud plyne, že řešením dané rovnice je funkce

$$x(t)=\frac{1}{2}+te^{-2t}+ce^{-2t},$$

kde $c\in R$ je parametr.

8. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

(i) Připomeňme, že nehomogenní lin. rovnice 1. řádu ve standartní formě pro neznámou funkci $x = x(t)$ má tvar

$$\dot{x} + p(t)\,x = q(t)\,, \tag{11}$$

kde funkce $q(t)$ není identicky rovna nule. Potom příslušná homogenní rovnice má tvar:

$$\dot{x} + p(t)\,x = 0.$$

(ii) Řešení homogenní rovnice:

a) Separace proměnných: $\frac{dx}{x} = -p(t)\,dt$.

b) Integrace: $\ln|x| = -\int p(t)\,dt + c_1$.

c) Odlogaritmování: $|x| = e^{c_1} e^{-\int p(t)dt}$.

d) Přejmenování konstanty e^{c_1} na C.

e) Vypuštění absolutní hodnoty a nalezení obecného řešení včetně triviálního řešení $x(t) = 0$:

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt},$$

kde $C \in R$ je libovolná konstanta.

Příklad 5. Řešme rovnici: $\dot{x} + 2tx = 0$.
Řešení.

- Separace proměnných: $\frac{dx}{x} = -2tdt$.
- Integrace:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int (-2t)\,dt \\ \ln|x| &= -t^2 + c_1. \end{aligned}$$

- Odlogaritmování a přeznačení konstanty:

$$|x| = e^{c_1} e^{-t^2} = Ce^{-t^2}.$$

- Vypuštění absolutní hodnoty a nalezení obecného řešení:

$$x(t) = Ce^{-t^2}, \quad C \in R.$$

(iii) Řešení nehomogenní lineární rovnice použitím integračního faktoru
Začněme tím, že napíšeme obecné řešení rovnice $\dot{x} + p(t)\,x = q(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{u(t)}\left(\int u(t)\,q(t)\,dt + C\right), \text{ kde} \\ u(t) &= e^{\int p(t)dt}. \end{aligned}$$

Integračním faktorem rovnice

$$\dot{x} + p(t)\,x = q(t)$$

chápeme jakoukoli funkci $u = u(t)$, pro kterou platí:

$$\begin{aligned} \frac{d(ux)}{dt} &= (\dot{x} + p(t)\,x)\,u \\ \dot{u}x + u\dot{x} &= \dot{x}u + pxu \\ \dot{u}x &= pxu \\ \dot{u} &= pu \text{ ...rovnice se sep. proměnnými} \end{aligned}$$

Řešme tedy rovnici s neznámou funkcí $u = u(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pu \\ \frac{du}{dt} &= p(t)\,u \\ \frac{du}{u} &= p(t)\,dt \\ \int \frac{du}{u} &= \int p(t)\,dt \\ \ln|u| &= \int p(t)\,dt \implies \\ u &= e^{\int p(t)dt} \text{...integrační faktor} \end{aligned}$$

Předpokládejme, že funkce $u(t)$ je integračním faktorem rovnice (11). Pak lze psát:

$$\begin{aligned}
\dot{x} + p(t)\,x &= q(t) \mid \cdot u \\
\dot{x}u + p(t)\,xu &= q(t)\,u \\
\frac{d(ux)}{dt} &= qu \\
&\downarrow \text{ ...integrace} \\
u(t) \cdot x(t) &= \int q(t)\,u(t)\,dt \\
x(t) &= \frac{1}{u(t)} \left(\int u(t)\,q(t)\,dt \right).
\end{aligned}$$

Příklad 6. Řešme metodou integračního faktoru rovnici:

$$\dot{x} + 2x = e^{3t}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
\dot{x} + 2x &= e^{3t} \mid \cdot u \\
\dot{x}u + 2xu &= e^{3t} \cdot u.
\end{aligned}$$

My nyní chceme, aby platilo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}u + 2xu &= \frac{d(ux)}{dt} = \dot{u}x + u\dot{x} \\
&\downarrow \\
2xu &= \dot{u}x \\
\dot{u} &= 2u \\
u &= e^{2t}.
\end{aligned}$$

Nyní pokračujme v řešení výchozí rovnice:

$$\begin{aligned}
\dot{x}u + 2xu &= e^{3t} \cdot u \\
\frac{d(e^{2t}x)}{dt} &= e^{3t} \cdot e^{2t} = e^{5t} \\
&\downarrow \text{ ...integrace} \\
e^{2t}x &= \int e^{5t}dt = \frac{1}{5}e^{5t} + C \\
x(t) &= \frac{1}{5}e^{3t} + Ce^{-2t}, \ \ C \in R.
\end{aligned}$$

Poznamenejme ještě, že funkce $x_p(t) = \frac{1}{5}e^{3t}$ je tzv.**partikulárním řešením** nehomogenní rovnice $\dot{x} + 2x = e^{3t}$ a funkce $x_h(t) = \frac{1}{u(t)} = e^{-2t}$ je řešením příslušné homogenní rovnice $\dot{x} + 2x = 0$.

Příklad 7. Metodou integračního faktoru řešme rovnici

$$\dot{x} + 2tx = t.$$

Řešení. Hledejme integrační faktor $u = u(t)$ jako funkci, pro kterou platí:

$$\begin{aligned}
\frac{d(x \cdot u)}{dt} &= \dot{x}u + x\dot{u} = (\dot{x} + 2tx)u \\
\dot{x}u + x\dot{u} &= (\dot{x} + 2tx)u = \dot{x}u + 2txu \\
x\dot{u} &= 2txu \\
\dot{u} &= 2tu.
\end{aligned}$$

Nyní řešme poslední rovnici metodou separace proměnných:

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= 2tu \\
\frac{du}{dt} &= 2tu \\
\frac{du}{u} &= 2tdt \\
\ln|u| &= t^2 + c_1 \\
|u| &= e^{c_1}e^{t^2} = Ce^{t^2}.
\end{aligned}$$

Volbou $C = 1$ dostaneme integrační faktor:

$$u(t) = e^{t^2}.$$

Po vynásobení výchozí rovnice integračním faktorem dostaneme:

$$\begin{aligned}
(\dot{x} + 2tx)u &= tu \\
\frac{d\left(xe^{t^2}\right)}{dt} &= te^{t^2} \\
xe^{t^2} &= \int te^{t^2}dt = \left| \begin{array}{c} z = t^2 \\ dz = 2tdt \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z + C = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \implies
\end{aligned}$$

Tedy obecným řešením výchozí rovnice je funkce

$$x(t) = e^{-t^2}\left(\frac{1}{2}e^{t^2} + C\right) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}, \quad C \in R.$$

(iv) Důkaz principu superpozice pomocí integračního faktoru
Připomeňme princip superpozice:
je-li $x_1(t)$ řešením rovnice

$$\dot{x} + px = q_1$$

a je-li $x_2(t)$ řešením rovnice

$$\dot{x} + px = q_2,$$

potom pro libovolné konstanty $a, b \in R$ je superpozice $ax_1 + bx_2$ řešením rovnice

$$\dot{x} + px = aq_1 + bq_2. \tag{12}$$

Důkaz principu superpozice. Zvolme libovolně konstanty $a, b \in R$ a dvě řešení $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Obě řešení je pak možné vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{u(t)}F_1(t), \\ x_2(t) &= \frac{1}{u(t)}F_2(t), \end{aligned}$$

kde u je integrační faktor a funkce F_1 resp. F_2 jsou promitivní funkcí k funkci $u(t)\,q_1(t)$ resp. k funkci $u(t)\,q_2(t)$.

Potom máme:

$$\begin{aligned} & a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \\ = \; & a \cdot \frac{1}{u(t)}F_1(t) + b \cdot \frac{1}{u(t)}F_2(t) = \\ = \; & \frac{1}{u(t)}\left(aF_1(t) + bF_2(t)\right). \end{aligned}$$

Funkce $F(t) = aF_1(t) + bF_2(t)$ je potom zřejmě primitivní funkcí k funkci $u(aq_1 + bq_2)$. Odtud pak plyne, že funkce $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ je řešením rovnice (12).

$$\begin{aligned}\text{Obecné řešení rovnice (11)} &= \text{partikulární řešení nehom. rovnice (11)} + \\ &= \text{obecné řešení homogenní rovnice.}\end{aligned}$$

$$x(t) = x_p(t) + C \cdot x_h(t) \tag{13}$$

(v) Odvození vztahu (13) pomocí integračního faktoru

Je-li u integrační faktor rovnice $y' + py = q$, potom je funkce $x_h = \frac{1}{u}$ řešením příslušné homogenní rovnice $y' + py = 0$. Je-li dále F nějaká primitivní funkce k funkci uq, pak je funkce $x_p = \frac{1}{u}F$ partikulárním řešením nehomogenní rovnice. Obecné řešení nehomogenní rovnice vyjádřené pomocí integračního faktoru má tvar:

$$x(t) = \frac{1}{u(t)} \int u(u)\, q(t)\, dt,$$

kde $\int u(u)\, q(t)\, dt = F(t) + C$.

Potom máme:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{u(t)} \int u(u)\, q(t)\, dt \\ &= \frac{1}{u(t)} (F(t) + C) = \frac{1}{u(t)} F(t) + C \frac{1}{u(t)} \\ &= x_p(t) + C x_h(t). \end{aligned}$$

(vi) Řešení lineární rovnice metodou variace konstanty

Příklad 8. Metodou variace konstanty řešme rovnici

$$\dot{x} + 2tx = t.$$

Řešení. 1. krok: nalezení obecného řešení příslušné homogenní rovnice

$$\dot{x} + 2tx = 0.$$

Obecné řešení, které bylo nalezeno v příkladu 5 má tvar:

$$x(t) = Ce^{-t^2},\ C \in R.$$

2. krok: nalezení partikulárního řešení výchozí nehomogenní rovnice, které hledáme ve tvaru:

$$x_p(t) = C(t)\, e^{-t^2},$$

kde $C(t)$ je neznámá funkce.

Nyní dosaďme do výchozí rovnice předpokládaný tvar partikulárního řešení $x_p(t)$:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{C}(t)\, e^{-t^2} + C(t)(-2t)\, e^{-t^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\dot{C}(t)\, e^{-t^2} + C(t)(-2t)\, e^{-t^2} + 2tC(t)\, e^{-t^2} &= t \\
\dot{C}(t)\, e^{-t^2} &= t \\
\dot{C}(t) &= te^{t^2} \\
C(t) &= \int te^{t^2} dt \\
C(t) &= \frac{1}{2}e^{t^2} + k.
\end{aligned}$$

Volbou $k = 0$ dostáváme konkrétní funkci $C(t) = \frac{1}{2}e^{t^2}$. Potom má partikulární řešení tvar:

$$x_p(t) = C(t)\, e^{-t^2} = \frac{1}{2}e^{t^2} \cdot e^{-t^2} = \frac{1}{2}.$$

Závěr: Obecné řešení $x(t)$ je rovno nyní součtem partikulárního řešení a obecného řešení příslušné homogenní rovnice, tj.

$$x(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}.$$

(vii) Nalezení maximálního řešení metodou slepování funkcí

Příklad 9. Nalezněme maximální řešení rovnice

$$xy' - y = x^3.$$

Řešení. Předpokládejme, že $x \neq 0$ a vydělme výchozí rovnici výrazem x:

$$\begin{aligned} xy' - y &= x^3 \;|: x \\ y' - \frac{1}{x}y &= x^2. \end{aligned}$$

Takto jsme dostali rovnici ve standartním tvaru. Řešme nyní tuto rovnici pomocí integračního faktoru na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Určeme integrační faktor

$$u = e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} = e^{-\ln|x|+c},$$

zvolíme-li $c = 0$, dostáváme: $u = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|} \implies$

$$u = \begin{cases} -1/x & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0) \\ 1/x & \text{pro} \quad x \in (0, \infty) \,. \end{cases}$$

Dále určeme integrál $\int u\,(t)\, q\,(t)\, dt$: pro $x \in (-\infty, 0)$ máme

$$\int u\,(t)\, q\,(t)\, dt = \int (-1/x)\, x^2 dx = -\frac{1}{2}x^2 + c_1,$$

pro $x \in (0, \infty)$ máme

$$\int u\,(t)\, q\,(t)\, dt = \int (1/x)\, x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 + c_2.$$

Obecné řešení na jednotlivých intervalech má potom tvar:

$$y\,(t) = \frac{1}{u\,(t)} \int u\,(t)\, q\,(t)\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 - xc_1 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}x^3 + c_2 x & \text{pro} \quad x \in (0, \infty) \,. \end{cases}$$

Dále hledejme konstanty c_1 a c_2 tak, aby platilo

$$\lim_{x \to 0-} \left(\frac{1}{2}x^3 - xc_1\right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{2}x^3 + c_2 x\right).$$

Protože ale

$$\lim_{x \to 0-} \left(\frac{1}{2}x^3 - xc_1\right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{2}x^3 + c_2 x\right) = 0,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty, lze obě řešení na dílčích intervalech spojitým způsobem "slepit" dohromady a získat tak jedinou funkci spojitou v nule:

$$y_{\max}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 - xc_1 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle \\ \frac{1}{2}x^3 + c_2 x & \text{pro} \quad x \in \langle 0, \infty) . \end{cases}$$

Dále hledejme konstanty c_1 a c_2 tak, aby existovala derivace $y'_{\max}(0)$. Tato derivace existuje právě tehdy, když

$$(y_{\max})'_-(0) = (y_{\max})'_+(0) . \tag{14}$$

Zde

$$\begin{aligned} (y_{\max})'_-(0) &= \left[\left(\frac{1}{2}x^3 - xc_1\right)'\right]_{x=0} = \left[\frac{3}{2}x^2 - c_1\right]_{x=0} \\ &= -c_1, \\ (y_{\max})'_+(0) &= \left[\left(\frac{1}{2}x^3 + c_2 x\right)'\right]_{x=0} = \left[\frac{3}{2}x^2 + c_2\right]_{x=0} \\ &= c_2. \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínky (14) dostaneme

$$c_2 = -c_1.$$

Označíme-li nyní $c = c_1$, pak $c_2 = -c$. Potom má pro libovolné $c \in R$ funkce $y_{\max}(x)$ tvar

$$\begin{aligned} y_{\max}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 - cx & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle \\ \frac{1}{2}x^3 - cx & \text{pro} \quad x \in \langle 0, \infty) . \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}x^3 - cx, \ x \in (-\infty, \infty) . \end{aligned}$$

Ještě proveďme zkoušku, zdali je funkce $y_{\max}$ skutečně maximálním řešením výchozí rovnice na intervalu $(-\infty, \infty)$. Pro každé $x \in (-\infty, \infty)$ máme:

$$\begin{aligned} xy' - y &= x\left(\frac{1}{2}x^3 - cx\right)' - \left(\frac{1}{2}x^3 - cx\right) \\ &= x\left(\frac{3}{2}x^2 - c\right) - \frac{1}{2}x^3 + cx \\ &= \frac{3}{2}x^3 - cx - \frac{1}{2}x^3 + cx = x^3. \end{aligned}$$

3 Věty o existenci řešení soustav nelineárních diferenciálních rovnic

3.1 Picard-Lindelöfova věta

Definice 5 *Nechť (X, d) je metrickým prostorem. Zobrazení $T : X \to X$ se nazývá **kontraktivní zobrazení (kontrakce)**, existuje-li konstanta $\lambda \in (0, 1)$ tak, že*

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq \lambda d\left(x, y\right), \text{ pro každé } x, y \in X.$$

*Bod $x \in X$ se pak nazývá **pevným bodem zobrazení** $T : X \to X$, jestliže platí: $T\left(x\right) = x$.*

Věta 6 ***(Banachův princip kontrakce).*** *Nechť (X, d) je úplným metrickým prostorem. Potom má každé kontraktivní zobrazení $T : X \to X$ právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Poznamenejme, že každé kontraktivní zobrazení je automaticky spojité. Jednoznačnost existence pevného bodu plyne bezprostředně. Jestliže $T\left(x\right) = x$ a zároveň $T\left(x'\right) = x'$, pak $d\left(x, x'\right) = d\left(T\left(x\right), T(x')\right) \leq \lambda d\left(x, x'\right) \implies x = x'$. Dokažme nyní existenci pevného bodu. Zvolme libovolně $x_0 \in X$ a definujme induktivně posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bodů prostoru X rovnicí $x_{n+1} = T\left(x_n\right)$. Pak pro libovolné $i \geq 1$ máme:

$$d\left(x_i, x_{i+1}\right) = d\left(T\left(x_{i-1}\right), T\left(x_i\right)\right) \leq \lambda d\left(x_{i-1}, x_i\right).$$

Indukcí lze dokázat, že

$$d\left(x_i, x_{i+1}\right) \leq \lambda^i d\left(x_0, x_1\right).$$

Je-li N přirozené číslo a $j \geq i \geq N$,

$$\begin{aligned} d\left(x_i, x_j\right) &\leq dx_i, x_{i+1}) + d\left(x_{i+1}, x_{i+2}\right) + \ldots + d\left(x_{j-1}, x_j\right) \leq \\ &\leq \left(\lambda^i + \ldots + \lambda^{j-1}\right) d\left(x_0, x_1\right) \leq \lambda^i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\right) d\left(x_0, x_1\right) \leq \\ &\leq \lambda^N \frac{1}{1-\lambda} d\left(x_0, x_1\right). \end{aligned}$$

Poslední výraz na první straně lze učinit libovolně malým pro dostatečně velké N. Tudíž (x_n) je Cauchyovská posloupnost a tedy konverguje k jistému bodu $x \in X$. Ze spojitosti zobrazení T pak plyne:

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x. \end{aligned}$$

Tedy x je pevným bodem zobrazení T. ■

Dále budeme pracovat s prostorem všech spojitých funkcí na kompaktním perfektním intervalu $[a, b]$:

$$C[a,b] = \{f : f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ je spojitá funkce na } [a,b]\}.$$

Nyní není těžké ověřit, že na množině $C[a, b]$ je možné zavést strukturu vektorového prostoru, kde definujeme sčítání funkcí a násobení skalárem následovně:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x),\ \forall x \in [a,b], \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x),\ \forall c \in [a,b]. \end{aligned}$$

Nyní lze zavést na tomto prostoru tzv. **maximovou normu** $\|\cdot\|_{\max} : C[a, b] \to R$ předpisem:

$$\|f\|_{\max} = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\},\ \ f \in [a,b].$$

Cvičení 7 *Ukažte, že funkce $\|\cdot\|_{\max}$ splňuje $\forall f, g \in C[a, b]$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ axiomy normy:*
(a) $\|f\|_{\max} \geq 0$ *a* $\|f\|_{\max} = 0 \iff f = 0.$
(b) $\|\alpha f\|_{\max} = |\alpha| \|f\|_{\max}.$
(d) $\|f + g\|_{\max} \leq \|f\|_{\max} + \|g\|_{\max}.$

Cvičení 8 *Definujme pro každé dvě funkce $f, g \in C[a, b]$, $d_{\max}(f, g) = \|f - g\|_{\max}$. Ukažte, že funkce $d_{\max}$ je metrikou na množině $C[a, b]$.*

Věta 9 *Nechť $[a, b]$ je uzavřený, omezený interval v $\mathbb{R}$. Potom je $(C[a, b], d_{\max})$ úplným metrickým prostorem.*

Důkaz. Uvažujme Cauchyovskou posloupnost $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ v prostoru $C[a,b]$. Z definice normy $\|\cdot\|_{\max}$ plyne, že pro každé $t \in [a,b]$ a pro každá dvě přirozená čísla k,l platí

$$|f_k(t) - f_l(t)| \leq \|f_k - f_l\|_{\max}.$$

Odtud vyplývá, že pro každé $t \in [a,b]$ je posloupnost funkčních hodnot $\langle f_n(t) \rangle_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská. Potom pro každé $t \in [a,b]$ existuje limita

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f(t). \tag{15}$$

Rovností (15) je na intervalu $[a,b]$ definována funkce funkce f. Zbývá tedy dokázat, že $f \in C[a,b]$ a že posloupnost $\langle f_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f vzhledem k maximové metrice $d_{\max}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, potom pro dostatečně velké $n_0 \in \mathbb{N}$ je

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon,\ m,n \in \mathbb{N} \text{ a } t \in [a,b]. \tag{16}$$

Bude-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ pevně zvoleno, potom přejdeme-li ve vztahu (16) k limitě pro $m \to \infty$, dostaneme $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ kdykoliv je $n \geq n_0$ a $t \in [a,b]$. Ze spojitosti funkce f_{n_0} plyne existence $\delta > 0$ tak, že $|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \varepsilon$ kdykoliv je $|t - t_0| < \delta$. Je-li tedy $|t - t_0| < \delta$, pak máme:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tudíž je funkce f spojitou funkcí v bodě t_0 a protože jsme volili tento bod libovolně, dokázali jsme, že $f \in C[a,b]$. Dále z výše uvedeného plyne, že pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $t \in [a,b]$ je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$. Tedy pro každé $n \geq n_0$ platí

$$d_{\max}(f_n, f) = \|f_n - f\|_{\max} \leq \varepsilon.$$

Odtud vyplývá, že $f_n \to f$ pro $n \to \infty$ vzhledem maximové metrice $d_{\max}$ v prostoru $C[a,b]$. ■

Pro správné pochopení dalšího textu je zapotřebí znalost fundamentální věty integrálního počtu (viz. J. Kopáček: Matematická analýza nejen pro fyziky I, Matfyzpres Praha 2004, odstavce 6.8 až 6.10.)

Předpokládejme, že $O \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a (x_0, y_0). Dále uvažujme funkci $g : O \to \mathbb{R}$ a hledejme otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ takový, že $x_0 \in I$ a diferencovatelnou funkci $f : I \to \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\left\{ \begin{array}{c} f'(x) = g(x, f(x)),\ \forall x \in I \\ f(x_0) = y_0. \end{array} \right\} \tag{17}$$

Jestliže $f : I \to \mathbb{R}$ a $\forall x \in I$ je $(x, f(x)) \in O$, pro spojitou funkci g je spojitá funkce f řešením problému (17), právě když f vyhovuje integrální rovnici

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\, dt, \ \forall x \in I. \tag{18}$$

To plyne z fundamentální věty integrálního počtu. Ekvivalence problémů (17) a (18) nám dovoluje při studiu problému (17) používat tzv. věty o pevných bodech.

Věta 10 ***(Picard-Lindelöfova věta).*** *Nechť $O \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $(x_0, y_0) \in O$. Předpokládejme, že funkce $g : O \to \mathbb{R}$ je spojitou funkcí a existuje kladná konstanta M tak, že funkce g splňuje tzv. Lipschitzovu vlastnost vzhledem ke druhé proměnné:*

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, \ (x, y_1) \in O, \ (x, y_2) \in O.$$

Pak existuje otevřený interval I obsahující bod x_0 na němž má problém (17) právě jedno řešení.

Důkaz. S důkazem budeme hotovi, najdeme-li vhodné kladné číslo $\alpha > 0$ takové, že na intervalu $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ existuje jediné řešení $f : I_\alpha \to \mathbb{R}$ integrální rovnice

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\, dt, \ \forall x \in I_\alpha.$$

Nyní vyberme $a > 0$, $b > 0$ tak, aby byl obdélník $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ obsažen v množině O. Takový obdélník existuje v důsledku otevřenosti množiny O. Potom pro každé $\alpha > 0$ splňující $\alpha \leq a$ definujme

$$X_\alpha = \{f \in C(I_\alpha) : |f(x) - y_0| \leq b, \ \forall x \in I_\alpha\}.$$

Tedy $X_\alpha \subset C(I_\alpha)$ a každá z funkcí v množině X_α má graf obsažen v obdélníku $I_\alpha \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Definujme pro každé $f \in X_\alpha$ funkci $T(f)$ předpisem

$$T(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\, dt, \ x \in I_\alpha.$$

Z fundamentální věty integrálního počtu pak plyne, že $T(f) \in C(I_\alpha)$ pro každé $f \in X_\alpha$. Ukažme nyní, že X_α je uzavřenou množinou v metrickém prostoru $(C(I_\alpha), d_{\max})$. Za tím účelem bude stačit dokázat, že je-li $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost elementů množiny X_α a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, potom je $f \in X_\alpha$. Jelikož je funkce f limitou stejnoměrně konvergující posloupnosti, je $f \in C(I_\alpha)$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|f_n(x) - y_0| \leq b,\ \forall x \in I_\alpha.$$

Pokud pak v předchozím vztahu přejdeme k limitě pro $n \to \infty$, pak dostaneme pro každé $x \in I_\alpha : |f(x) - y_0| \leq b$. Poznamenejme, že pokud posloupnost $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k funkci f stejnoměrně neboť konverguje vzhledem k metrice $d_{\max}$, pak pro každé $x \in I_\alpha$ je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tedy $f \in X_\alpha$ odkud plyne uzavřenost množiny X_α. Z úplnosti metrického prostoru $C(I_\alpha)$ pak plyne úplnost metrického podprostoru $(X_\alpha, d_{\max})$. Dále ukážeme, že je-li α dostatečně malé, potom je $T(X_\alpha) \subseteq X_\alpha$ a zobrazení $T : X_\alpha \to X_\alpha$ je kontraktivní. Jelikož je v důsledku Heine-Borelovy věty obdélník R kompaktní množinou v $\mathbb{R}^2$, je v důsledku spojitosti funkce g omezená na obdélníku R. Pak musí existovat kladná konstanta K tak, že $|g(x,y)| \leq K$ pro každý bod $(x,y) \in R$. Pro libovolné $f \in X_\alpha$ a $x \in I_\alpha$ máme

$$|T(f)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |g(t, f(t))| dt \leq \alpha K.$$

Tedy pokud $\alpha > 0$ bude splňovat podmínku $\alpha K \leq b$, bude platit $T(X_\alpha) \subseteq X_\alpha$. Dále z Lipschitzovy podmínky plyne pro každé f_1, f_2 a pro každé $x \in I_x$

$$|g(x, f_1(x)) - g(x, f_2(x))| \leq M d_{\max}(f_1, f_2).$$

Odtud pak pro každé $x \in I_x$ dostáváme:

$$\begin{aligned} |T(f_1)(x) - T(f_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [g(t, f(t)) - g(t, f_2(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |g(t, f_1(t)) - g(t, f_2(t))| dt \\ &\leq |x - x_0| M d_{\max}(f_1, f_2) \leq \alpha M d_{\max}(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Tedy zobrazení T bude kontraktivní, pokud bude splňena podmínka $\alpha M < 1$. Nyní definujme $\alpha = \min\{b/K, 1/2M\} > 0$. Pak z Banachova principu kontrakce plyne existence jediného elementu $\tilde{f} \in X_\alpha$ takového, že $T\left(\tilde{f}\right) = \tilde{f}$. Funkce $\tilde{f}$ je pak zřejmě jediným řešením výchozího problému (17). ∎

Reference

[HJJKZ] V. Hájková, M. Johanis, O. John, O.F.K. Kalenda, M. Zelený: Matematika, Matfyzpress Praha 2012.

[KI] J. Kopáček: Matematická analýza nejen pro fyziky, Matfyzpress Praha 2004.