PŘÍPRAVNÉ ÚVAHY POTŘEBNÉ PRO CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTU

DEFINICE Je-li X n.v. se střední hodnotou $\mathbb{E}X$ a disperzí DX, pak normovanou náhodnou veličinou X_{norm} budeme rozumět n.v.:

$$X_{norm} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}}.$$

PŘÍKLAD: Uvažujme n.v. X. Ukažme, že pak platí: a) $\mathbb{E}X_{norm} = 0$ a b) $DX_{norm} = 1$.

Ř: (a)

$$\mathbb{E}X_{norm} = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{1}{\sqrt{DX}}\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X = 0.$$

b) $$DX_{norm} = \mathbb{E}(X_{norm} - \mathbb{E}X_{norm})^2 =$$

$$= \mathbb{E}X^2_{norm} = \mathbb{E}\left(\frac{(X - \mathbb{E}X)^2}{DX}\right) =$$

$$= \frac{1}{DX}\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right) = \frac{1}{DX} \cdot DX = 1. \checkmark$$

Řekněme si něco o tzv. obecných a centrálních momentech náhodných veličin.

DEFINICE : Obecný moment r-tého stupně μ'_r náhodné veličiny X definujeme jako číslo

$$\mu'_r = \mathbb{E} X^r, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

DEFINICE : Centrálním momentem r-tého stupně μ_r náhodné veličiny X rozumíme číslo

$$\mu_r = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^r$$

Poznámka : Je zvykem značit obecný moment 1. stupně n. v. X jako μ nebo m. Pak

$$\mu'_1 = \mathbb{E}X = \mu.$$

Dále poznamenejme, že centrální moment 1. stupně je vždy roven nule:

$$\mu_1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) = \mathbb{E}X - \mathbb{E}(\mathbb{E}X) =$$
$$= \mathbb{E}X - \mathbb{E}X = 0.$$

Centrální moment 2. stupně je roven disperzi (značíme též σ^2):

$$\mu_2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = DX = \sigma^2.$$

Odmocnině σ z disperze (rozptylu) říkáme směrodatná odchylka.

VZORCE PRO VÝPOČET MOMENTŮ NÁHODNÝCH VELIČIN X

$$\mu_r' = \begin{cases} \sum_i x_i^r \, p_X(x_i) & \text{- diskr. vel.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\,dx & \text{- spoj. vel.} \end{cases}$$

$$\mu_r = \begin{cases} \sum_i (x_i-\mu)^r \cdot p_X(x_i) & \text{- diskr. vel.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f_X(x)\,dx & \text{- spoj. vel.} \end{cases}$$

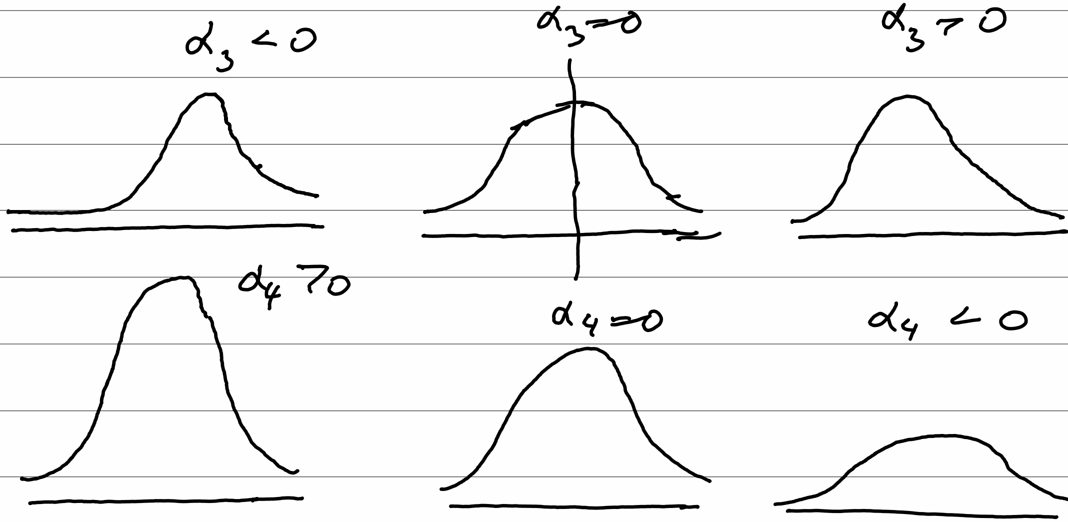
Existují ještě další charakteristiky náhodných veličin kromě charakteristiky polohy – střední hodnoty, charakteristiky variability – disperze (rozptylu). Tyto lze vyjádřit pomocí momentů. Jsou to např.

koeficient asymetričnosti : $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

nebo

koeficient špičatosti : $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

geometrický význam těchto charakteristik



DEFINICE : Řekneme, že náhodná veličina X má normální rozložení pravděpodobnosti, je-li její hustota pravděpodobnosti dána předpisem :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}},$$

pro $x \in (-\infty, \infty)$, kde a, b jsou reálná čísla a $b > 0$. Toto zapíšeme $N(a, b)$.

PŘÍKLAD : Nechť má n.v. X normální rozložení pravděpodobnosti $N(a, b)$. Určeme pak $\mu = EX$ a $\sigma^2 = DX$.

Řešení: Při řešení využijeme následující integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}.$$

(Tento integrál lze vypočítat s využitím dvojného integrálu:
nejdříve integrál na levé straně rovnice zjednodušíme substitucí: $t = x\sqrt{2}$, pak $x \to \pm\infty$ pro $t \to \pm\infty$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Nyní položme $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

V posledním integrálu využijeme substituci do polárních souřadnic:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

Pak $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = r^2 \\ du = 2r\,dr \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cancel{r}\, e^{-r^2} \cdot 2r\,dr \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du \right) = \int_0^{2\pi} (2\pi) \frac{1}{2} \left[-e^{-u} \right]_0^{\infty}$$

$$= \pi \cdot 1 = \pi \Rightarrow I^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}.$$

Spočtěme nyní střední hodnotu $\mu = EX =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ t = \frac{x-a}{b} \\ b\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a+bt) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \cancel{b}} e^{-t^2/2} \cancel{b}\,dt = \left| \begin{array}{l} bt = x-a \\ x = a+bt \end{array} \right|$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt =$$

(poslední integrál je díky lichosti integrandu roven nule) $= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = a.$

Tedy $\mu = EX = a.$

Spočítejme ještě disperzi (= rozptyl) DX:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{subst. } x-a = bt \Rightarrow dx = b\,dt; \\ \frac{(x-a)^2}{b^2} = t^2; \; dx = b\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} b^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} e^{-t^2/2}\, b\,dt =$$

$$= b^2/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \text{„Per partes"}$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = t e^{-t^2/2} \Rightarrow v = -e^{-t^2/2} \end{array} \right| = \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-t e^{-t^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \right\} = \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + \sqrt{2\pi} \right) = b^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma^2 = b^2}.$$

__Poznámka__: Jak je vidět z předchozího příkladu, že pokud X má normální rozložení pravděpodobnosti a $\mu = \mathbb{E}X$, $\sigma^2 = \mathbb{D}X$, pak hustotu pravděpodobnosti f_X píšeme:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.}$$

Má-li n.v. X ~~rovnoměrné~~ normální (Gaussovské) rozložení pravděpodobnosti $N(0,1)$, tj. když $\mu = \mathbb{E}X = 0$ a $\sigma^2 = \mathbb{D}X = 1$, pak:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} \qquad (*)$$

~~Věta~~ Dále z předchozího plyne, že má-li n.v. X normální rozložení $N(\mu,\sigma^2)$, pak $X_{norm} = (X-\mu)/\sigma$ má normální rozložení

$N(0,1)$ s hustotou danou vzorcem $(*)$.

VĚTA : (o součtu n.v. s normálním rozl. pravd.)

Nechť má n.v. X_1 normální rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a n.v. X_2 má normální rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Dále nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé n.v. Potom n.v. $X_1 + X_2$ má normální rozložení $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Důkaz : Provádět nebudeme. Používají se tzv. charakteristické funkce náhodných veličin. $\square$

Poznámka : Předchozí větu lze zobecnit i na součty $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ n n.v..

DŮSLEDEK : Nechť nezávislé n.v. $X_1, \dots, X_n$ mají stejná normální rozložení pravděpodobnosti $N(\mu, \sigma^2)$. Pak má n.v. $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ normální rozložení $N(\mu, \sigma^2/n)$.

VĚTA : (o normalizaci distr. funkce a funkce hustoty)

Předpokládejme, že n.v. X má norm. rozložení $N(\mu, \sigma^2)$ s distribuční funkcí F_X a a hustotou pravděpodobnosti f_X. Jestliže pak $F_{norm} = F_{X_{norm}}$ a $f_{norm} = f_{X_{norm}}$, potom platí $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $F_X(x) = F_{norm}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

b) $f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f_{norm}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

<u>Důkaz</u>: a) Z definice d. funkce $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X-\mu \leq x-\mu) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(X_{norm} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_{norm}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

b) $$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_{norm}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d}{du} F_{norm}(u)\Big|_{u=\frac{x-\mu}{\sigma}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma} f_{norm}(u)\Big|_{u=\frac{x-\mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma} f_{norm}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

$\square$

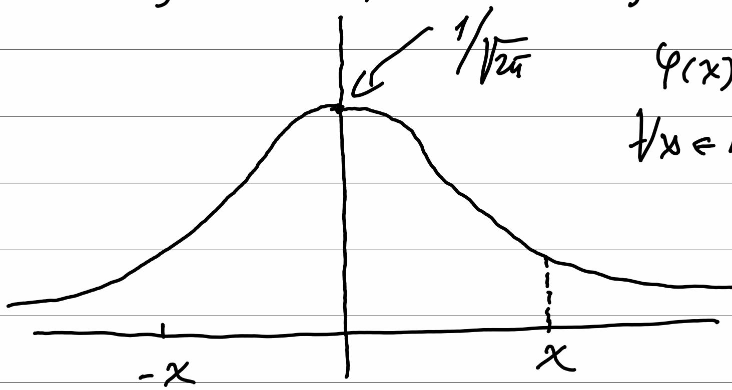
<u>Poznámka</u>: a) Často se označuje hustota pravděpodobnosti tzv. normalizované n.v. s normálním rozdělením $N(0,1)$ jako $\varphi(x)$, kde

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

Příslušná distribuční funkce se pak označuje jako $\Phi(x)$ a

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.}$$

b) Je zřejmé, že funkce φ je sudou fcí:



$\varphi(x) = \varphi(-x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$

Je-li $x > 0$ a chceme-li vyjádřit

hodnotu $\Phi(-x)$ opět lze vyčíslit vztahu:

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,dt \overset{sym.}{=} \int_{x}^{\infty} \varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = 1 - \Phi(x).$$

Dále snadno odvodíme následující vztah pro n.v. X s normálním rozložením $N(\mu, \sigma^2)$. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$\mathbb{P}(\{a < X < b\}) = F_X(b) - F_X(a) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

<u>PŘÍKLAD</u>: Předpokládejme, že n.v. X má normální rozložení $N(\mu, \sigma)$. Vypočítejte pak pravděpodobnosti:

a) $P(\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\})$

b) $P(\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\})$

c) $P(\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\})$.

Řešení: a)

$$P(\{\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\}) = \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(1) - (1-\Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}84134 - 1 \doteq \underline{\underline{0{,}6827}}$$

b) $$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}97725 - 1 \doteq \underline{\underline{0{,}9545}}$$

c) $$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) =$$

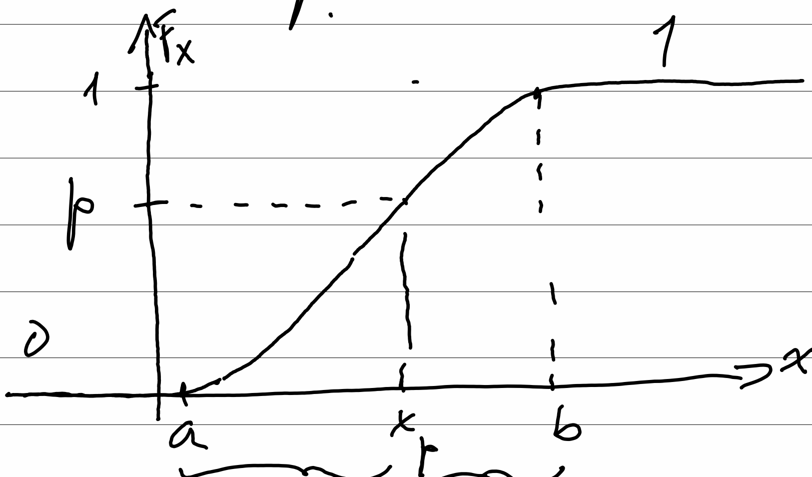
$$= 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}99865 - 1 \doteq \underline{\underline{0{,}9973}}.$$

DEFINICE: Nechť X je abs. spojitá veličina mající hustotu pravděpodobnosti f_X.

a) Je-li $p \in (0,1)$, pak **100p-procentním kvantilem náhodné veličiny** X nazýváme takové číslo x_p pro které platí:

$$P(\{X \leq x_p\}) = F_X(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f_X(t)\,dt$$

$$= p.$$



$$P(X \in \langle a, x_p \rangle) = 1 - P(X \in \langle x_p, b \rangle).$$

$a = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0\}$ a

$b = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 1\}.$

b) Mediánem $\tilde{x}$ n.v. X se rozumí

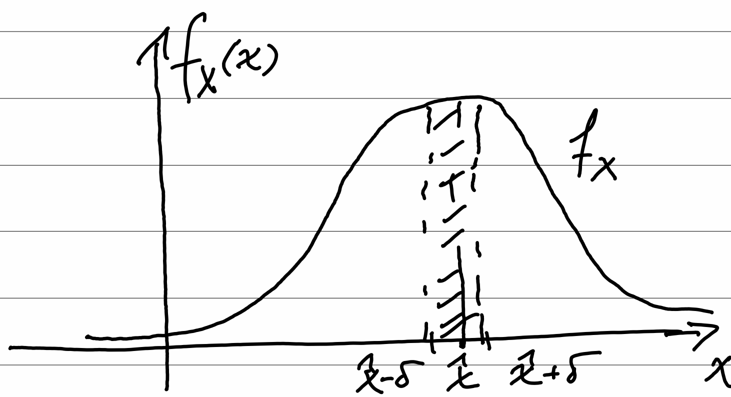
50% kvantil, to znamená, že $\tilde{x} = x_{0.5}$.
Tedy pak

$$P(X \in \langle a, \tilde{x} \rangle) = P(X \in \langle \tilde{x}, b \rangle).$$

c) Modus náhodné veličiny X je takové číslo $\hat{x} \in \mathbb{R}$, kde f hustota pravděpodobnosti f_X nabývá ostré abs. maxima, tj. platí:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \hat{x}: \quad f_X(x) < f(\hat{x}).$$

[



$$\int_{\hat{x}-\delta}^{\hat{x}+\delta} f_X(t)\,dt \approx 1.$$

$\delta > 0$, blízké k nule.

Tedy hodnotu $\hat{x}$ lze interpretovat jako nejpravděpodobnější hodnotu náhodné veličiny X.]

<u>Poznámka</u>: V případě, kdy F_X není spojitou funkcí, nemusí pro $p \in (0,1)$ vždy existovat bod $x_p \in \mathbb{R}$ takový, že

$$F_X(x_p) = p.$$

Obecněji lze tedy v případech, kdy není existence kvantilu zaručena vycházet z obecnější definice:

„x_p je $100 \cdot p$-kvantilem n.v. X, pokud platí:

$$F_X(x_p) \geq p \wedge F_X(x_p^-) \leq p."$$

Tento kvantil nemusí být určen jednoznačně.

CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA

VĚTA : (CLV). Pro každé $n \in \mathbb{N}$, nechť jsou n.v. $X_1, \dots, X_n$ nezávislé a definované na daném pravděpodobnostním prostoru. Dále předp., že n.v. X_i mají všechny stejnou hustotu pravděpodobnosti f s konečnou střední hodnotou μ a konečným rozptylem (disperzí) $\sigma^2 > 0$ a s konečným třetím momentem. Položíme-li pro $n \in \mathbb{N}$:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} =$$

$$= \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}, \quad \text{kde}$$

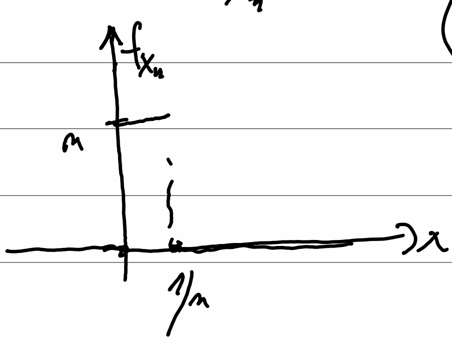
$S_n = X_1 + \dots + X_n$ a $\sigma(S_n)$ je tzv. směrodatná odchylka n.v. S_n, tj. $\sigma(S_n) = \sqrt{D(S_n)}$, pak má n.v. Y_n střední hodnotu $m' = 0$ a disperzi 1. Pak posloupnost $\{Y_n\}$ konverguje k n.v. s normálním rozdělením pravděpodobnosti $N(0,1)$. Konvergence je

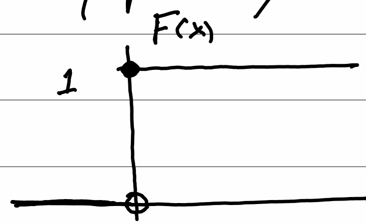
Jde o míru konvergence vzhledem k distribuci, tj. $Y_n \xrightarrow{d} Y$.

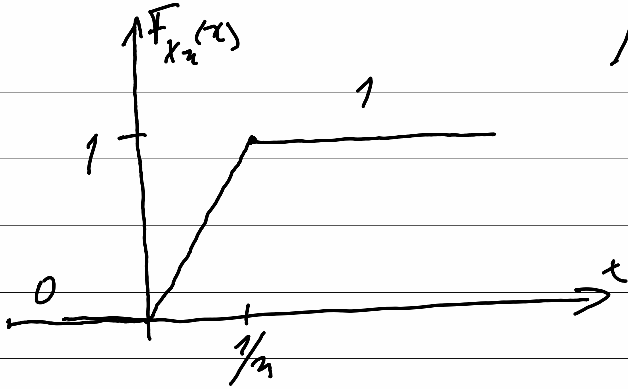
DEFINICE: Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost náhodných veličin s distribučními funkcemi F_{12} $\{F_n\}$. Dále nechť X je náhodnou veličinou s distr. funkcí F. Řekneme, že X_n konverguje k X vzhledem k distribuci a píšeme $X_n \xrightarrow{d} X$, jestliže ~~$\forall x \in \mathbb{R}$:~~ $F_n(x) \to F(x)$ pro všechny $x \in \mathbb{R}$, kde je funkce F spojitá.

PŘÍKLAD ([A, str. 170]): Uvažujme n.v. X_n takové, že X_n má stejnoměrné rozložení pravděpodobnosti mezi 0 a $1/n$. Tj.

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n, & \text{pro } x \in (0, 1/n) \\ 0, & \text{pro } x \notin (0, 1/n) \end{cases}$$







Nyní je $X_n \xrightarrow{d} X$, kde $X \equiv 0$.

∎

Poznámka: Poznamenejme, že konvergence v míře P implikuje konvergenci vzhledem k distribučním funkcím. Tj.

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X.$$

(Viz. [Ash, Problem 1, str. 175]).

Příklad: Předpokládejme, že dva kandidáti A a B kandidují na ~~pr~~ funkci prezidenta a my chceme na základě volebního průzkumu preferencí předpovědět výsledky voleb. Předpokládejme jsme náhodně a nezávisle vybrali vzorek n respondentů, kteří byli dotázáni na to, koho by volili. Nechť p potom označuje pravděpodobnost jevu, že jsme vybrali voliče, který by volil kandidáta A (~~p~~ hodnota p je nám ovšem neznámá.)

Q_n nechť označuje relativní četnost voličů kandidáta A ve vzorku n respondentů. To znamená, že

$$Q_n = \frac{\text{počet voličů k. A ve vzorku}}{\text{velikost vzorku } (=n)}.$$

(a) My chceme nalézt n dostatečně velké, aby platilo, že $P(\{|Q_n - p| \leq 0.001\}) \geq 0.99$ pro jakoukoli pravděpodobnost p. Jinými slovy, přejeme si předpovědět procentní zastoupení voličů kandidáta A s přesností alespoň 1 promile a s 99% spolehlivostí. Odhadněte minimální velikost vzorku n.

(b) Odhadněte minimální velikost vzorku n, pokud chceme predikovat procentní zastoupení voličů kandidáta A s přesností do 1% a se spolehlivostí 95% (užijte CLV).

Ř (a):

Při řešení úlohy se nám bude hodit následující důsledek centrální limitní věty:

VĚTA (Moivre-Laplaceova věta):
Jestliže m je počet uskutečnění jevu A v n nezávislých pokusech, přičemž pravděpodobnost uskutečnění jevu A v každém z pokusů je rovna p, kde $0 < p < 1$, potom

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left\{a \leq \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} \, dt .$$

$\blacksquare$

Zpět k řešení úlohy:

~~Nerovnost~~ $\cancel{a \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b}$ ~~lze upravit ekvivalentně:~~

$$\cancel{\frac{a\sqrt{np(1-p)}}{n} \leq \frac{m}{n} - p \leq \frac{b\sqrt{np(1-p)}}{n}}$$

Pro $a=-1$, $b=1$ máme:

$$-\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \leq \frac{m}{n} - p \leq \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \frac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{0{,}5^2}}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{n}}.$$ Pak pro

dost velké $n \in \mathbb{N}$ je $P(\{|Q_n - p| \leq$

$$\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\}) \leq P(\{|Q_n - p| < \frac{0{,}5}{\sqrt{n}}\})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}}^{0{,}5/\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\, dt = \underbrace{2\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.99}_{\Phi(\cdot) \geq \frac{0.99}{2}}$$

a $\frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \leq 0.001 \iff 500 \leq \sqrt{n} \iff$

$\iff 250000 \leq n$;

Je-li tedy $n \geqq 250\,000$, pak je

$$\frac{\sqrt{n p(1-p)}}{n} \leqq \frac{0,5}{\sqrt{n}} \leqq 0,001. \text{ Dále}$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(-1 \leqq \frac{n - np}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}} \leqq 1\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(|Q_n - p| \leqq \frac{\sqrt{n p(1-p)}}{n}\right) \cancel{\leqq}$$

$$\cancel{\leqq \lim_{n \to \infty} P(|Q_n} \quad = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 0,6827$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \approx \underbrace{2\Phi(1)-1}_{}$$ 0,6827

$$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{0,5}{\sqrt{n}} < 0,001 \quad / \cdot 1000\sqrt{n}$$

$$0,5 \cdot 1000 < \sqrt{n}$$

$$500 < \sqrt{n} \quad /^2$$

$$\boxed{250000 < n}$$

Čebyševova nerovnost:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| < \varepsilon\right) \geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2} \geq 1-\frac{0,25}{\varepsilon^2}$$

$$DX = p(1-p) \leq 0,25 \Big/_{p=0,5}$$

Tedy

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| < 0,001\right) \geq 1-\frac{0,25}{0,001^2} =$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| < 0,001\right) \geq 1-\frac{0,25}{n \cdot 0,001^2} \geq 0,99$$

$$\Rightarrow \quad 0,01 \geq \frac{0,25}{n \cdot 0,001^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n \cdot 0,01 \cdot 0,001^2 \geq 0,25$$

$$P\left(p-0{,}001 \leq Q_n \leq p+0{,}001\right) =$$

$$= P\left(np - n\cdot 0{,}001 \leq \sum_{j=1}^{n} X_j \leq np + n\cdot 0{,}001\right)$$

$$= P\left(-n\cdot 0{,}001 \leq \sum_{j=1}^{n} X_j - np \leq n\cdot 0{,}001\right)$$

$$= P\left(\frac{-\sqrt{n}\cdot 0{,}001}{\sigma} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - np}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}\, 0{,}001}{\sigma}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}001}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\, 0{,}001}{\sigma}\right) =$$

$$= \underbrace{2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}001}{\sigma}\right) - 1}_{\geq 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\, 0{,}001}{0{,}5}\right) - 1} \geq 0{,}99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}001}{0{,}5}\right) \geq \frac{1{,}99}{2} = 0{,}995$$

$$\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}001}{0{,}5} \geq 2{,}576 \quad \Big|\cdot 1000$$

$$2\sqrt{n} \geq 2576$$

$$\Rightarrow n \geq 1\,659\,000$$

b)

$$P(p-0{,}01 \leq Q_n \leq p+0{,}01) =$$

$$= P(-0{,}01 \leq Q_n - p \leq 0{,}01) =$$

$$= P\left(-n\cdot 0{,}01 \leq \sum_{j=1}^{n} X_j - np \leq n\cdot 0{,}01\right) =$$

$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}01}{\sigma} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - np}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}01}{\sigma}\right)$$

$$\sim \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}01}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}01}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}01}{\sigma}\right) - 1 \geq 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0{,}01}{0{,}5}\right) - 1$$

$$= 2\Phi(\sqrt{n}\cdot 0{,}02) - 1 \geq 0{,}95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(\sqrt{n}\cdot 0{,}02) \geq \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$$

$$X_{0{,}975} = 1{,}96 \Rightarrow \sqrt{n}\cdot 0{,}02 \geq 1{,}96$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq 98 \,|^2 \Rightarrow \boxed{n \geq 9604}$$