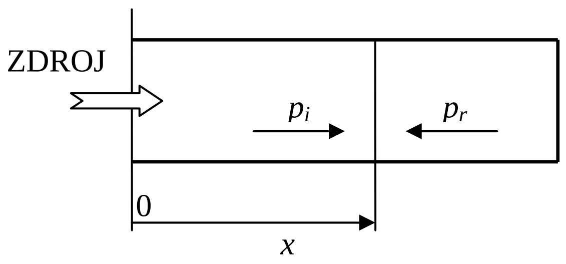
# *Úloha č. 9*

## *Měření rychlosti zvuku a Poissonovy konstanty*

**<u>1) Pomůcky:</u>** Kundtova trubice, mikrofon se sondou, milivoltmetr, měřítko, tónový generátor, zesilovač, čítač.

### <u>2) Teorie:</u>

Šíří-li se konečným libovolným zvukovodem akustická vlna, dochází vždy na konci zvukovodu k jejímu odrazu a k interferenci této odražené vlny s původní vlnou, šířící se od zdroje. Vytvoří se stojaté vlnění, jehož amplituda i průběh závisí na ukončení zvukovodu, na němž dochází k odrazu.




Obr. 1.

Ve většině případů nedochází k úplnému odrazu, část vlny je v případě uzavřeného zvukovodu pohlcena, v případě otevřeného konce zvukovodem vyzářena.

Uvažujme cylindrický zvukovod, v němž se od nějakého zdroje šíří rovinná zvuková vlna. Tuto vlnu můžeme popsat akustickým tlakem *p*, dobře měřitelným pomocí mikrofonu.
Vlnu, šířící se od zdroje ve směru osy *x* označme $p_i$, odraženou vlnu, šířící se v opačném směru $p_r$ (viz obr. 1). Obě vlny se dají vyjádřit v místě *x* ve tvaru:

$$p_i = P_i \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right),\ \ p_r = P_r \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right],$$

kde $P_i$ a $P_r$ jsou amplitudy vln, $\omega$ kruhová frekvence, *c* rychlost zvuku a $\varphi$ fázový posuv mezi nimi. Výsledná vlna vznikne složením obou, tedy

$$p = p_i + p_r = P_i \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + P_r \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right]. \qquad (1)$$

Protože je vždy $P_i \geq P_r$, můžeme výraz pro $p_i$ psát ve tvaru

$$p_i = P_r \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \left(P_i - P_r\right)\sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \qquad (2)$$

Dosazením (2) do (1) a po úpravě získáme výraz

$$p = 2P_r \cos\left(\frac{\omega x}{c} + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) + \left(P_i - P_r\right)\sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \qquad (3)$$

První člen výrazu (3) představuje úplnou stojatou vlnu s amplitudou

$$P = 2P_r \cos\left(\frac{\omega x}{c} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

(4)
druhý člen pak postupnou vlnu, šířící se ve směru vlny tedy ve směru vlny vycházející od zdroje.

Výraz (3) představuje částečné stojaté vlnění s kmitnami a uzly, v uzlech však obecně není, amplituda nulová, nýbrž má velikost $P_i$ - $P_r$ . Pouze v případě $P_i = P_r$ je druhý člen výrazu (3) nulový a dochází k tzv. úplnému stojatému vlnění.

Pro hodnoty $x_k$ pro něž platí

$$\cos\left(\frac{\omega x_k}{c}+\frac{\varphi}{2}\right)=\pm 1 \tag{5}$$

nabývá výraz (4) maximální hodnoty a v místech $x_k$ jsou kmitny stojatého vlnění. Řešením (5) obdržíme

$$\frac{\omega x_k}{c}+\frac{\varphi}{2}=k\pi \text{ pro } k = 0,\ 1\ ,2\ ,3\ ,\ ...$$

a protože

$$c = f\lambda\,, \tag{6}$$

kde $f$ je frekvence a $\lambda$ vlnová délka, obdržíme pro polohy kmiten $x_k$ hodnoty

$$x_k = k\frac{\lambda}{2}-\frac{\varphi}{2\pi}\frac{\lambda}{2}=k\frac{\lambda}{2}+x_0\,, \tag{7}$$

kde

$$x_0 = -\frac{\varphi}{2\pi}\frac{\lambda}{2} \tag{8}$$

představuje polohu první kmitny.
Pro vzdálenost dvou sousedních kmiten platí:

$$x_{k(k+1)}-x_{kk}=\left[(k+1)\frac{\lambda}{2}-x_0\right]-\left(k\frac{\lambda}{2}-x_0\right)=\frac{\lambda}{2}\,. \tag{9}$$

Dvě sousední kmitny tedy leží ve vzdálenosti $\frac{\lambda}{2}$. Pro hodnoty $x_v$ pro něž je

$$\cos\left(\frac{\omega x_v}{c}+\frac{\varphi}{2}\right)=0\,, \tag{10}$$

nabývá výraz (4) nulové hodnoty a v místech $x_v$ jsou uzly stojaté vlny. Řešení (10) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\omega x_v}{c}+\frac{\varphi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ pro } k = 0,\ 1\ ,2\ ,3\ ,\ ...$$

Odtud pro polohy uzlů $x_v$ obdržíme

$$x_v = (2k+1)\frac{\lambda}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\frac{\lambda}{4}=(2k+1)\frac{\lambda}{4}+x_0\,. \tag{11}$$

Vzdálenost dvou sousedních uzlů bude

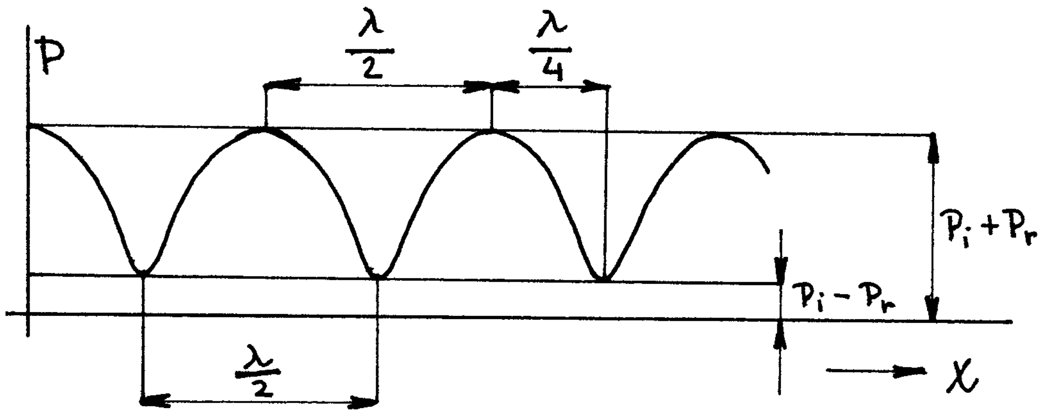
$$x_{v(k+1)}-x_{vk}=\left\{[2(k+1)+1]\frac{\lambda}{4}+x_0\right\}-\left\{(2k+1)\frac{\lambda}{4}+x_0\right\}=\frac{\lambda}{2}\,. \tag{12}$$

Vidíme, že uzly jsou od sebe vzdáleny stejně jako kmitny o $\frac{\lambda}{2}$. Vzdálenost uzlů od kmiten je

$$x_v - x_k = (2k+1)\frac{\lambda}{4} + x_0 - \left(k\frac{\lambda}{2} + x_0\right) = \frac{\lambda}{4}, \tag{13}$$

tedy kmitny jsou od uzlů vzdáleny čtvrt vlnové délky.

Rozborem vztahů (3), (5) a (7) zjistíme, že v místě kmiten bude vždy amplituda kmitání $P_k = P_i + P_r$, pro uzly bude podle (10) a (3) amplituda $P_v = P_i - P_r$. Rozložení amplitudy akustického tlaku v trubici ukazuje obr. 2.




Obr. 2.

Změříme-li průběh akustického tlaku uvnitř trubice, můžeme z poloh uzlů a kmiten podle (9), (12) a (13) určit vlnovou délku $\lambda$ a známe-li frekvenci zdroje $f$ můžeme vypočítat rychlost $c$ šíření se zvuku v trubici.

Rychlost zvuku ve vzduchu závisí na tlaku vzduchu $p$ a hustotě vzduchu $\rho$ podle vztahu

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \tag{14}$$

kde $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ je Poissonova konstanta. Změříme-li rychlost zvuku $c$, můžeme podle (14) určit Poissonovu konstantu $\kappa$. Změříme-li teplotu vzduchu $t$ [°C] a tlak $p$, můžeme určit hustotu $\rho$ buď z tabulek, nebo podle vztahu

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\gamma.t}\frac{p}{p_0} \tag{15}$$

kde $\rho_0$ = 1,276 kg.m$^{-3}$ je hustota při teplotě 0 °C a tlaku 10$^5$ Pa, $\gamma = \frac{1}{273{,}15K}$ = 0,00366 K$^{-1}$ je koeficient tepelné rozpínavosti vzduchu, $p_0$ = 10$^5$ Pa.

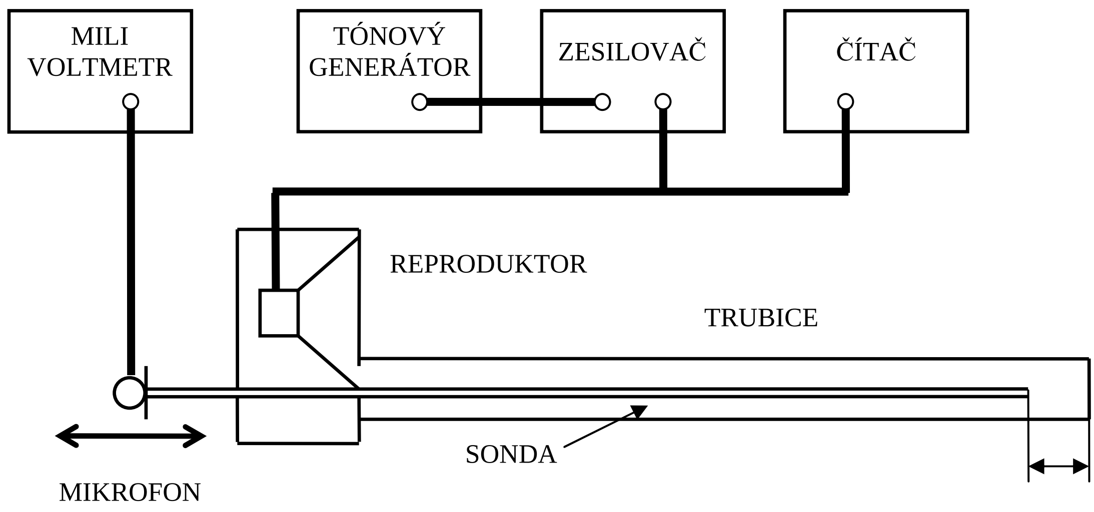
Dosazením (15) do (14) obdržíme

$$\kappa = c^2 \frac{\rho_0}{p_0}\frac{1}{1+\gamma.t}. \tag{16}$$

## 3) Měření:

Vlnovou délku určíme z grafu rozložení amplitudy akustického tlaku v Kundtově trubici. Signál z tónového generátoru zesílený zesilovačem vedeme do reproduktoru, který vyzařuje zvukovou vlnu do uzavřené trubice. V trubici vzniká stojaté vlnění akustického tlaku, který snímáme mikrofonem pomocí úzké trubičky (sondy ), připojené k mikrofonu. Mikrofon se sondou je posunovatelný v ose trubice. Elektrický signál z mikrofonu je úměrný akustickému tlaku (resp. jeho efektivní hodnotě) uvnitř trubice a měříme ho milivoltmetrem. Posouváním mikrofonu podél osy trubice můžeme zaregistrovat rozloženi akustického tlaku uvnitř trubice.

Schéma zapojení měřicí aparatury je na obr. 3.




Obr. 3.

Aby bylo čtení frekvence dostatečně přesné, je signál ze zesilovače veden i do čítače, na kterém odečítáme frekvenci akustické vlny, jejíž vlnovou délku měříme.

## 4) Úkol:

a) Změřte rozložení akustického tlaku uvnitř trubice pro alespoň tři frekvence (kolem 300, 500, 800 Hz). Frekvence odečítejte jako průměrnou hodnotu z 10 odečtených hodnot na čítači během měření.

Aby nebylo měření příliš hlasité a signál zkreslený, měřte při odečítané hodnotě signálu mikrofonu do 1 mV. Mikrofonem posouvejte u hlubších frekvencí po 2 cm, u vyšších frekvenci po 1 cm a pro každou polohu mikrofonu odečtěte hodnotu snímaného napětí $U$ na mikrofonu.

b) Závislost $U = f(x)$ tj. napětí $U$ na poloze mikrofonu $x$ vyneste graficky. Ze vzdáleností všech maxim a minim v grafu určete všechny vlnové délky, které je možno pro danou frekvenci zjistit. Z nich vypočítejte podle (6) rychlosti zvuku $c_i$ pro dané frekvence. Určete průměrnou hodnotu rychlosti zvuku $\overline{c}$ a její chybu $\overline{\sigma_c}$ . Vypočítejte též relativní chybu $\overline{\delta_c}$ naměřené hodnoty rychlosti zvuku.

Zpracováni uveďte do tabulky, $x_{mi}$ a $x_{mj}$ jsou polohy maxim a minim, ze kterých se určují vlnové délky.

| $f$ [Hz] | $x_{mi}$ [m] | $x_{mj}$ [m] | $\lambda_i$ [m] | $c_i$ [m.s$^{-1}$] | $\Delta c$ [m.s$^{-1}$] | $\Delta^2 c$ [m.s$^{-1}$] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | | | | | | |
| 500 | | | | | | |
| 800 | | | | | | |
| | | | | $\overline{c}$ | $\sum\Delta$ | $\sum\Delta^2$ |

$$\overline{\sigma_c} = \sqrt{\frac{\sum\Delta_c^2}{n(n-1)}}\ ,\ \overline{\delta_c} = \frac{\overline{\sigma_c}}{\overline{c}}\ .$$

c) Zjistěte hodnoty tlaku vzduchu $p$ a teploty $t$ a vypočítejte Poissonovu konstantu $\kappa$. Určete její absolutní a relativní chybu $\overline{\sigma_\kappa}, \overline{\delta_\kappa}$ ze znalosti chyby naměřené rychlosti zvuku.

d) Naměřenou hodnotu Poissonovy konstanty porovnejte s tabulkovou hodnotou. Taktéž porovnejte naměřenou hodnotu rychlosti zvuku S vypočtenou pro danou teplotu vzduchu

$$c = 331{,}8 + 0{,}61t.$$

Literatura: Slavík a kol. - Základy fyziky I
ČSAV Praha 1961